Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОЦЕНКИ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ РЕЗЕРВИРОВАННЫХ СИСТЕМ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

ВЛАДИМИР А. ЗАЙЦЕВ

В работе приводится метод, позволяющий получать оценки для вероятности безотказной работы резервированных систем с восстановлением. Исследуется скорость сходимости вероятности безотказной работы таких систем к предельному распределению.

1. Основные неравенства. Рассмотрим обычную схему холодного резервирования с восстановлением отказавших элементов и одним ремонтным устройством. Входящий поток считается пуассоновским с параметром $\lambda=1$ (этого всегда можно достичь тривиальным изменением временного масштаба). Восстановление отказавших элементов будем считать произвольным с ф. р. $G(x)$. Число резервных элементов равно k. В этой статье исследован случай $k\geq 2$. Случай $k=1$ (дублирование) подробно разобран в [1].

Отказом системы назовем момент τ_k, когда в очереди на восстановление находится k элементов и откажет работающий элемент. Считаем также, что в момент $t_0=0$ ремонтное устройство свободно и все элементы исправны.

Обозначим

$$p_k(t)=\mathsf{P}\{\tau_k>t\};$$

$q_k^{(m)}(t)=\mathsf{P}\{\tau_k>t$ и в момент t на восстановлении находится m элементов$\}$, $1\leq m\leq k$; $\varphi_k^{(m)}(t)=q_k^{(m)}(t)/p_k(t)$ — вероятность того, что в момент t на восстановлении находится m элементов при условии, что до момента t система не отказала.

Совершенно так же, как это сделано в [1], можно получить уравнение

$$dp_k(t)/dt=-q_k^{(k)}(t),$$

откуда следует

$$p_k(t)=\exp\{-\int_0^t \varphi_k^{(k)}(x)dx\} \tag{1}$$

и

$$q_k^{(m)}(x)=\int_0^x [p_k(y)-\sum_{r=1}^k q_k^{(r)}(y)]\overline{\Pi}_k^{(m)}(x-y)dy. \tag{2}$$

Здесь $\overline{\Pi}_k^{(m)}(y)$ — вероятность того, что период занятости ремонтного устройства имеет длительность не меньше y, за время y система не отказала и

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 3, 1977, с. 322—326.

через время y после начала периода занятости на обслуживании находятся ровно m требований.

Из (1) и (2) получим систему уравнений для определения $\varphi_k^{(m)}(x)$—

$$\varphi_k^{(m)}(x)=\int_0^x \exp\left\{\int_y^x \varphi_k^{(k)}(u)du\right\}\left[1-\sum_{r=1}^k \varphi_k^{(r)}(y)\right]\bar{\Pi}_k^{(m)}(x-y)dy,\quad m=1,\ldots,k, \tag{3}$$

откуда, учитывая, что $0<\varphi_k^{(1)}(x)+\cdots+\varphi_k^{(k)}(x)<1$, получим

$$\int_0^x \left[1-\sum_{r=1}^k \varphi_k^{(r)}(y)\right]\bar{\Pi}_k^{(m)}(x-y)dy<\varphi_k^{(m)}(x)<\int_0^x e^y\bar{\Pi}_k^{(m)}(x-y)dy. \tag{4}$$

В дальнейшем ограничимся оценками снизу для вероятности $p_k(t)$, которые, видимо, наиболее важны для приложений, хотя полученные неравенства позволяют рекуррентно получать экспоненциальные оценки снизу и сверху для $p_k(t)$. Поэтому нам потребуется только правая часть неравенства (4) при $m=k$.

Обозначим через A событие, определяемое вероятностью $\bar{\Pi}_k^{(k)}(x)$, а также обозначим

$u(x_1, x_2)$ — число отказов, обслуженных на интервале $[x_1, x_2)$;

$\nu(x_1, x_2)$ — число отказов, пришедших на интервале $[x_1, x_2)$;

ξ_i — длительность обслуживания i-го отказа (все ξ_i предположим независимыми, одинакового распределенными с ф. р. $G(x)$);

$$S_n=\xi_1+\cdots+\xi_n;$$

ν_i — число отказов, пришедших за время обслуживания i-го отказа.

Тогда выполнено

$$\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}\{A, u(0,x)=0\}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\{A, u(0,x)=n\}$$

$$=\mathsf{P}\{A, u(0,x)=0\}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\{A, S_n<x, S_n+\xi_{n+1}\geq x\}=\mathsf{P}\{A, u(0,x)=0\}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\substack{0\leq x_1+\ldots+x_n<x\\ x_1\geq 0,\ldots,x_n\geq 0}}{\int\cdots\int}\mathsf{P}\{A, \xi_1\in[x_1, x_1+dx_1),\ldots,\xi_n\in[x_n, x_n+dx_n), S_n+\xi_{n+1}\geq x\}$$

$$=\mathsf{P}\{A, u(0,x)=0\}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\Omega_k}\underset{\substack{0\leq x_1+\ldots+x_n<x\\ x_1\geq 0,\ldots,x_n\geq 0}}{\int\cdots\int}\mathsf{P}\{A, \nu_1=i_1,\ldots,\nu_n=i_n,$$

$$\nu(S_n, x)=i_{n+1}, \xi_1\in[x_1, x_1+dx_1),\ldots,\xi_n\in[x_n, x_n+dx_n), S_n+\xi_{n+1}\geq x\}$$

$$=\bar{G}(x)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{-x}+e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\Omega_k}\underset{\substack{0\leq x_1+\ldots+x_n<x\\ x_1\geq 0,\ldots,x_n\geq 0}}{\int\cdots\int}\frac{x_1^{i_1}}{i_1!}\cdots\frac{x_n^{i_n}}{i_n!}\cdot$$

$$\times\frac{[x-(x_1+\cdots+x_n)]^{i_{n+1}}}{i_{n+1}!}\cdot\bar{G}(x-x_1-\cdots-x_n)dG(x_1)\ldots dG(x_n),$$

где область суммирования Ω_k задается условиями

$$\left\{\begin{array}{l} i_1 \geq 0, \ldots, i_{n+1} \geq 0; \\ 1 \leq i_1 \leq k-1; \\ 2 \leq i_1 + i_2 \leq k; \\ \ldots\ldots\ldots \\ n \leq i_1 + \cdots + i_n \leq k+n-2; \\ i_1 + \cdots + i_{n+1} = k+n-1. \end{array}\right. \tag{5}$$

Следовательно,

$$\int_0^x e^y \overline{\Pi}_k^{(k)}(y)\,dy = \int_0^x \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}\overline{G}(y)\,dy + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\Omega_k}\int_0^x \int \cdots \int_{D_n} \frac{x_1^{i_1}}{i_1!} \cdots \tag{6}$$

$$\times \frac{x_n^{i_n}}{i_n!} \cdot \frac{(y-x_1-\cdots-x_n)^{i_{n+1}}}{i_{n+1}!} \cdot \overline{G}(y-x_1-\cdots-x_n)\,dG(x_1)\ldots dG(x_n)\,dy.$$

Так как область интегрирования определена условиями

$$\begin{aligned} D &= [0, x) \times D_n \\ &= \{z \in R^{n+1};\ 0 \leq y < x,\ 0 \leq x_1 + \cdots + x_n < y,\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\} \\ &= \{z \in R^{n+1};\ 0 \leq x_1 + \cdots + x_n < x,\ x_1 + \cdots + x_n \leq y < x,\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}, \end{aligned}$$

то $(n+1)$-мерный интеграл в (6) можно записать в виде

$$\int \cdots \int_D \frac{x_1^{i_1}}{i_1!} \cdots \frac{x_n^{i_n}}{i_n!} \cdot \frac{(y-x_1-\cdots-x_n)^{i_{n+1}}}{i_{n+1}!}\overline{G}(y-x_1-\cdots \tag{7}$$

$$-x_n)\,dG(x_1)\cdots dG(x_n)\,dy$$

$$= \int \cdots \int_{D_n} \frac{x_1^{i_1}}{i_1!} \cdots \frac{x_n^{i_n}}{i_n!}\,dG(x_1) \cdots dG(x_n) \cdot \Big\{\int_0^{x-x_1-\cdots-x_n} \frac{x_{n+1}^{i_{n+1}}}{i_{n+1}!}\overline{G}(x_{n+1})\,dx_{n+1}\Big\}.$$

Из (5) видно, что $0 \leq i_1 \leq k-1, \ldots, 0 \leq i_{n+1} \leq k-1$. Также ясно, что правая часть (7) меньше, чем

$$\int_0^x \frac{x_1^{i_1}}{i_1!}\,dG(x_1) \cdot \int_0^x \frac{x_2^{i_2}}{i_2!}\,dG(x_2) \cdots \int_0^x \frac{x_n^{i_n}}{i_n!}\,dG(x_n) \cdot \int_0^x \frac{x_{n+1}^{i_{n+1}}}{i_{n+1}!}\overline{G}(x_{n+1})\,dx_{n+1}. \tag{8}$$

Обозначим

$$m_i(x) = \int_0^x \frac{y^{i-1}}{(i-1)!}\overline{G}(y)\,dy = \frac{x^i}{i!}\overline{G}(x) + \int_0^x \frac{y^i}{i!}\,dG(y),\ i = 1, \ldots, k.$$

и предположим, что выполняются условия

$$m_i(x) \leq [\varrho(x)]^i, \text{ где } \varrho(x) < 1/k, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{9}$$

Тогда, заметив, что число членов внутренней суммы (6) во всяком случае меньше k^{k+1} и каждой член этой суммы в силу (8) и (9) меньше $[\varrho(x)]^{k+n}$, получим следующее неравенство для $\varphi_k^{(k)}(x)$:

$$(10)\qquad \varphi_k^{(k)}(x)<m_k(x)+\sum_{n=1}^{\infty}k^{n+1}[\varrho(x)]^{k+n}=m_k(x)+k^2[\varrho(x)]^{k+1}/[1-k\varrho(x)].$$

Если существуют первые k моментов распределения $G(x)-(\mu_i=\int\limits_0^\infty x^i dG(x)$, где $i=1,\ldots,k)$, которые удовлетворяют условиям

$$(11)\qquad \mu_i/i!\leqq\varrho^i \quad\text{и}\quad \varrho<1/k,$$

то неравенство (10) можно только усилить, если написать

$$(12)\qquad \varphi_k^{(k)}(x)<\mu_k/k!+k^2\varrho^{k+1}/[1-\varrho k].$$

2. О скорости сходимости $p_k(x)$ к предельному распределению. Применим теперь полученную оценку к случаю, когда восстановление элементов быстрое. При этом для простоты будем предполагать, что ф. р. времени восстановления имеет вид $G^*(x/\alpha)$, где α — малый числовой параметр. Будем также предполагать, что ф. р. $G^*(x)$ имеет первые k моментов $\mu_1^*,\ldots,\mu_k^*$.

В этом случае $\mu_i/i!=\mu_i^*\alpha^i/i!$, $i=1,\ldots,k$ и если $\max_{1\leq i\leq k}(\mu_i^*/i!)=M\leqq 1$, то $\mu_i/i!\leqq\alpha^i$. Принимая в (11) $\varrho=\alpha$, получим из (12) при $\alpha<1/k$

$$\varphi_k^{(k)}(x)<\mu_k^*\alpha^k/k!+k^2\alpha^{k+1}/[1-k\alpha].$$

Если же $M>1$, то $\mu_i/i!\leqq(M\alpha)^i$ и положив в (11) $\varrho=M\alpha$, при $M\alpha<1/k$ получим $\varphi_k^{(k)}(x)<\mu_k^*\alpha^k/k!+k^2(M\alpha)^{k+1}/[1-Mk\alpha]$. Из (1) теперь следует: для случая $M\leqq 1$

$$(13)\qquad \mathsf{P}\{\alpha^k\tau_k>t\}>\exp\{-\mu_k^*t/k!\}\ \exp\{-k^2\alpha t/[1-k\alpha]\};$$

для случая $M>1$

$$(14)\qquad \mathsf{P}\{\alpha^k\tau_k>t\}>\exp\{-\mu_k^*t/k!\}\exp\{-k^2M^{k+1}\alpha t/[1-Mk\alpha]\}.$$

Эти оценки дают информацию о скорости сходимости нормированной величины τ_k/α_k^k к предельному распределению при $\alpha\to 0$, которое, как известно, имеет вид $\exp\{-\mu_k t/k!\}$.

Заметим, что из (4) можно получить аналогичные верхние оценки для $\mathsf{P}\{\alpha^k\tau_k>t\}$, как это сделано в [1], и уже из двойных оценок получить предельное распределение для величины $\alpha^k\tau_k$ при $\alpha\to 0$.

Для наиболее важного, после дублирования, частного случая $k=2$ легко получить более точное неравенство, так как в этом случае внутренняя сумма в (6) исчезает и все i_m $(m=1,\ldots,n+1)$ равны 1. Поэтому верно

$$\varphi_2^{(2)}(x)<\int\limits_0^x y\bar{G}(y)\,dy\,[1+\sum_{n=1}^{\infty}\int\cdots\int\limits_{0\leq x_1+\ldots+x_n<x}x_1\ldots x_n dG(x_1)\ldots dG(x_n)].$$

Этому неравенству можно придать более привлекательный вид. Но при этом, вообще говоря, значительно усилим его, заменив n-мерные интегралы на произведение интегралов. Тогда

$$\varphi_2^{(2)}(x) < [1 - m_1(x)]^{-1} \int_0^x y\bar{G}(y)dy.$$

Если существуют первые два момента распределения $G(x)$, то еще более усиливая неравенство, можно написать

$$\varphi_2^{(2)}(x) < \mu_2/[\alpha(1-\mu_1)].$$

Отсюда

$$p_2(t) > \exp\{-\mu_2 t/[\alpha(1-\mu_1)]\}.$$

Заметим, что замена n-мерных интегралов произведением интегралов вполне оправдана, когда время восстановления сосредоточено в основном в малой окрестности нуля. Если же это не так, то лучше оценивать n-мерные интегралы непосредственно, исходя из вида ф. р. $G(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Зайцев. О скорости сходимости к показательному распределению вероятности безотказной работы дублированных систем с восстановлением. *Известия АН СССР, Техническая кибернетика,* 1976, № 2, 67—73.

ССР, Московская обл., С Мытыщи, ул. Летная, д. 28, к. 1, кв. 137

Поступила 13.5.1977