Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИЛЬНО ЗАМКНУТЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ И СОВМЕСТНЫЕ СПЕКТРЫ ОПЕРАТОРОВ

РОНИ Н. ЛЕВИ

В настоящей работе вводится понятие сингулярного спектра для сильно замкнутых инвариантных подпространств пространства $l^{\infty}(a, Z^n)$, сопряженного к пространству Винера $l^1(a, Z^n)$ всех последовательностей на группе Z^n, суммируемых с весом a. Изучается связь между совместным спектром нескольких коммутирующих ограниченных операторов в банаховом пространстве и сингулярным спектром индуцированных последовательностей на группе Z^n. Полученные результаты используются при вычислении спектра некоторых конкретных операторов.

Как известно, одна из задач гармонического анализа на кольцах Винера $l^1(a, Z^n)$ состоит в изучении слабозамкнутых инвариантных относительно сдвигов подпространств сопряженного пространства. При этом основную роль играет т. наз. спектр Берлинга [1, с. 105], который для данного элемента из $l^{\infty}(a, Z^n)$ определяется как носитель соответствующей обобщенной функции на дуальной группе T^n (при ограничениях на вес, обеспечивающих регулярность кольца $l^1(a, Z^n)$). Оказалось также, что привлечение понятия спектра Берлинга позволяет исследовать в некоторых случаях структуру совместного спектра коммутирующих операторов [2; 3]. Мы покажем, что для сильно замкнутых инвариантных подпространств можно ввести некоторую структуру на их спектр Берлинга, разделяя его точки на „сингулярные“ и „несингулярные“, что позволяет более точно различать разные подпространства. Так, в § 1 мы даем определение сингулярного спектра элемента пространства $l^{\infty}(a, Z^n)$ и доказываем никоторые его свойства. В § 2 даны некоторые применения этого понятия к исследованию совместных спектров некоторых коммутирующих операторов.

Разультаты работы анонсированы в заметке [4].

1. Основные опрелеления. Далее для краткости будем обозначать через L пространство (обычно обозначаемое $l^1(a, Z^n)$), состоящее из всех последовательностей $\varphi(g)$ на группе Z^n, для которых сумма $\|\varphi\| = \Sigma a(g)|\varphi(g)|$ конечна. Здесь весовая функция $a(g)$ является произвольной положительной функцией на группе Z^n, удовлетворяющей следующим условиям:

(1) $$a(g+h) \leq a(g)a(h) \text{ для любых } g \text{ и } h \text{ из } Z^n,$$

(2) $$\Sigma_{n=1}^{\infty} n^{-2} \ln a(ng) < \infty \text{ для любого } g \text{ из } Z^n.$$

Как известно, при наличии условия (1) пространство L является коммутативным нормированным кольцом относительно свертки, и его пространство максимальных идеалов изоморфно группе T^n, дуальной к Z^n. Условие (2) обеспечивает регулярность соответствующего кольца функций на T^n [5].

Сопряженное к L пространство L^* можно отождествить с пространством $l^{\infty}(a, Z^n)$, состоящим из всех последовательностей $F(g)$ на Z^n таких, что $\|F\|=\sup\{F(g)/\alpha(g): g\in Z^n\}<\infty$. Обозначим через $\langle\varphi, F\rangle=\Sigma\varphi(g)F(-g)$, $g\in Z^n$, соответствующее спаривание для φ из L и F из L^*. Пусть I — открытое коническое подмножество эвклидового пространства $\mathbb{R}^n$. Через l_I мы обозначим замкнутое подпространство пространства L^*, составленное из всех последовательностей $F(g)$, для которых выполняется

$$\lim_{g\to\infty} F(g)/\alpha(g)=0 \tag{3}$$

равномерно по g на любом замкнутом коническом множестве I', содержащемся в I. Здесь и ниже мы рассматриваем Z^n, вложенное в $\mathbb{R}^n$ как множество точек с целочисленными координатами. Для краткости будем писать l_0 вместо $l_{\mathbb{R}^n}$.

Рассмотрим представление $g\to T_g$ группы Z^n в пространстве L^* операторами сдвига, действующими по формуле $T_gF(h)=F(g+h)$. Отметим, что его можно продолжить по линейности до представления $\varphi\to T_\varphi$ кольца L, причем выполняется соотношение $\langle T_\varphi F, \psi\rangle=\langle F, \varphi\circ\psi\rangle$. Имеет место:

Лемма 1.1. *Пространства l_I инвариантны относительно операторов сдвига.*

Доказательство. Пусть $F\in l_I$ и $h\in Z^n$. Докажем, что T_hF также принадлежит l_I. Пусть I' — замкнутое коническое множество, содержащееся в I, и пусть I'' — такое же множество, содержащееся в I и содержащее I' в своей внутренности. Обозначим через $h+I'$ множество всех точек из $\mathbb{R}^n$ вида $h+g$, где $g\in Z^n$. Легко видеть, что множество точек, принадлежаших $h+I'$, но не принадлежащих I'', ограничено, и, следовательно, может содержать не более чем конечное число точек из Z^n. Так как для последовательности F на множестве I'' выполняется условие (3), то оно выполнено и на $h+I'$, откуда следует требуемое утверждение.

Теперь мы можем привести основные определения нашей работы.

Определение 1. *Пусть $x\in T^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$. Мы будем говорить, что элемент F пространства L^* несингулярен в точке (x, ξ) пространства $T^n\times\mathbb{R}^n$, если существует коническая окрестность I точки ξ и $\varphi\in L$ так, что $\widehat{\varphi}(x)\neq 0$ и $T_\varphi F\in l_I$.*

Определение 2. *Сингулярным спектром элемента F мы будем называть дополнение в $T^n\times\mathbb{R}^n$ к множеству точек, в которых F несингулярен. Обозначать его мы будем через $S(F)$.*

Соответственно сингулярным спектром подпространства H в L^* мы будем называть дополнение к множеству точек, в которых все элементы H несингулярны. Легко видеть, что сингулярный спектр представляет замкнутое коническое подмножество пространства $T^n\times\mathbb{R}^n$. Следует изложение некоторых его свойств. Пусть φ — элемент кольца L, U — множество точек из T^n, на которых соответствующая функция $\widehat{\varphi}$ отлична от нуля, и пусть I — открытое коническое подмножество $\mathbb{R}^n$.

Лемма 1.2. *Допустим, что для некоторого F из L^* множество $S(F)$ не пересекается с замыканием множества $U\times I$. Тогда $T_\varphi F$ принадлежит l_I.*

Доказательство. Выберем точку ξ из I. По предположению можно покрыть замыкание множества $\{\xi\}\times U$ конечным числом открытых множеств вида $U_i\times I_i$, $i=1,\ldots, k$ и найти такие элементы φ_i пространства L, что $\widehat{\varphi_i}$ не обращается в нуль на U_i и $T_{\varphi_i}F$ принадлежит l_{I_i}. Так как кольцо L регулярно, то стандартным образом можно сконструировать подчиненное разбиение единицы. Это означает, что можно найти набор ψ_i его элементов так что:

1. Сумма функций $\widehat{\psi}_i$ равна единице на U.

2. Носитель функции $\widehat{\psi}_i$ содержится в U_i.

Из леммы 1.1 легко следует, что $T_{\psi_i}F$ принадлежит I_i. Имеем:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \widehat{\varphi}\ \widehat{\psi}_i = \sum_{i=1}^{k} \widehat{\varphi\circ\psi_i}$$

и, следовательно, $T_\varphi F = \Sigma\{T_\varphi T_{\psi_i}F : 1 \leqq i \leqq k\}$. Отсюда следует, что $T_\varphi F$ принадлежит пространству l_{I_0}, где $I_0 = I_1 \cap \ldots \cap I_k$ — коническая окрестность точки ξ. Так как ξ — произвольная точка множества I, то $T_\varphi F$ принадлежит l_I.

Из инвариантности пространства l_I следует, что действие операторов T_φ естественным образом переносится на фактор-пространства $L_I = L/l_I$. Если H — замкнутое инвариантное подпространство в L^*, обозначим через H_I его образ в L_I. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — образующие группы Z^n, и $T_i = T_{e_i}$ — соответствующие операторы сдвига.

Напомним, что совместным спектром коммутирующих операторов $T_1, \ldots, T_n$ называется дополнение к совокупности всех точек $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ из $\mathbb{C}^n$, для которых существуют линейные ограниченные операторы P_i, $i = 1, \ldots, n$, так что сумма $\Sigma(T_i - \lambda_i)\, P_i$, $1 \leqq i \leqq n$ равна единичному оператору. Рассмотрим T^n, вложенным в $\mathbb{C}^n$, как множество точек с координатами, равными единице по модулю. Имеет место следующая связь:

Лемма 1.3. *Совместный спектр операторов $T_1, \ldots, T_n$ в пространстве H_I совпадает с замкнутой оболочкой всех точек x из T^n, для которых существует $\xi \in I$, так что точка (x, ξ) принадлежит $S(H)$.*

Доказательство. Для представлений регулярных коммутативных нормированных колец имеет место следующее (доказательство см. в [2] или [3]).

Утверждение. Совместный спектр операторов $T_1, \ldots, T_n$ совпадает с множеством точек x из T^n таких, что $\check{\varphi}(x) = 0$ для всех $\varphi \in L$, для которых $T_\varphi = 0$ тождественно на H_I.

Если точка x не принадлежит совместному спектру, то, взяв такую φ, что $\widehat{\varphi}(x) \neq 0$ и $\widehat{\varphi}$ равна нулю в окрестности совместного спектра, мы получим, что оператор T_φ равен нулю на H_I, т. е. что $T_\varphi F$ принадлежит l_I для любого F из H, и, следовательно, H не имеет сингулярных точек на множестве $\{x\} \times I$. Наоборот, пусть существует окрестность $U \subset T^n$ точки x такая, что $U \times I$ не пересекается с $S(H)$. Тогда для любого φ, такого, что носитель $\widehat{\varphi}$ содержится в U, по лемме 1.2 $T_\varphi F$ принадлежит l_I и T_φ равен нулю в H_I. Доказательство закончено.

Отсюда непосредственно следует следующее утверждение:

Лемма 1.4. *Если для двух элементов F_1 и F_2 пространства L^* значения $F_1(g)$ и $F_2(g)$ совпадают для всех g из некоторого множества вида $g_0 + I$, то элементы F_1 и F_2 одновременно сингулярны или несингулярны во всех точках (x, ξ), для которых $\xi \in I$.*

Для доказательства достаточно заметить, что F_1 и F_2 попадут в один и тот же класс смежности в пространстве L_I, так как их разность равна нулю на $g_0 + I$ и, следовательно, принадлежит пространству l_I.

Лемма 1.5. *$S(F)$ является полунепрерывной сверху функцией от F в топологии, порожденной нормой в L^*.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность F_n, $n=1, 2, \ldots$, элементов L_*, сильно сходящуюся к элементу F. Необходимо доказать, что если $S(F_n)$ для любого n не пересекается с некоторым открытым множеством вида $U\times I$, то то же верно и для $S(F)$. По определению для любого φ из L, такого, что носитель функции $\widehat{\varphi}$ содержится в U, элемент $T_\varphi F_n$ содержится в пространстве l_I. Так как пространства l_I являются сильно замкнутыми, мы получаем, что и $T_\varphi F$ содержится в l_I, что и доказывает требуемое утверждение.

Следствие. *Сингулярный спектр любого элемента совпадает с сингулярным спектром содержащего его минимального сильно замкнутого инвариантного подпространства.*

Заметим, что для спектра Берлинга утверждение леммы 1.5 выполняется в топологии слабой$*$-сходимости.

Наконец, рассмотрим связь между сингулярным спектром функционала и его представлением в виде граничного значения аналитической функции. Здесь и ниже мы будем представлять себе группу T^n как подмножество n-мерного комплексного эвклидова пространства $\mathbb{C}^n$, состоящее из тех точек, для которых все координаты равны по модулю единице. Пусть U — открытое подмножество группы T^n, и I — открытое коническое выпуклое подмножество n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, рассматриваемое здесь как касательное пространство к группе T^n. Определим отображение из $T^n\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{C}^n$ по формуле $(x, t)\to xe^{-t}=(x_1e^{-t_1}, \ldots, x_ne^{-t_n})$. Область $\widetilde{U}$ в $\mathbb{C}^n$ назовем примыкающей к U по I, если $\widetilde{U}$ содержит для любых $x\in U$ и $t\in I$ все точки вида $xe^{-\varepsilon t}$ для достаточно малых положительных ξ. Функционал F из L^* является на U граничным значением аналитической функции Φ, определенной на $\widetilde{U}$, если для любой функции на T^n, имеющей вид $\widehat{\varphi}$ для некоторого φ из L и с носителем, содержащимся в U, выполняется соотношение

$$\langle F, \varphi\rangle=\lim_{\xi\to 0}\int \widehat{\varphi}(x)\,\Phi(xe^{-\varepsilon t})\,dx,$$

где $t\in I$. В таком случае мы будем писать, что $F=b(\Phi)$. Хорошо известен следующий способ представления произвольного функционала в виде суммы граничных значений. Выберем покрытие I_i, $i=1,\ldots, k$, пространства $\mathbb{R}^n$ замкнутыми выпуклыми конусами с непересекающимися внутренностями. Пусть $F(g)$ — элемент L^*. Обозначим $\Phi_i(z)=\Sigma_i F(g)z^g$, где суммирование в Σ_i происходит по всем g, принадлежащим $I_i\cap Z^n$. Точки из Z^n, принадлежащие одновременно нескольким конусам I_i, нужно причислить к любому одному из них. Здесь для точек $z=(z_1,\ldots, z_n)$ из $\mathbb{C}^n$ и $g=(g_1,\ldots, g_n)$ из Z^n через z^g обозначено выражение $z_1^{g_1}\ldots z_n^{g_n}$. Обозначим через I^* поляру конуса I, т. е. множество точек ξ из $\mathbb{R}^n$ таких, что $\langle\xi, \eta\rangle\geq 0$ для всех η из I. Легко доказать, что ряд, определяющий функцию Φ_i, сходится для тех точек $z=(z_1,\ldots, z_n)$ из $\mathbb{C}^n$, для которых выполняется

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_i\ln|z_i|<0$$

для всех $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ из $\mathbb{R}^n$ и, таким образом, область голоморфности функции Φ_i примыкает к T^n по внутренности конуса I_i^*. Прямое вычисление показывает, что для любого φ из L выполняется

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{T^n}\widehat{\varphi}(x)\,\Phi_i(xl^{-i\varepsilon t})\,dx=\Sigma_i\varphi(g)F(-g),$$

откуда следует, что $F=\Sigma b(\Phi_i)$.

Имеет место следующая связь между сингулярным спектром и представлением в виде граничного значения.

Лемма 1.6. *Допустим, что на открытом множестве $U\subset T^n$ функционал F из L^* является граничним значением функции, аналитической на множестве, примыкающем к U по I. Тогда все точки из $S(F)$ над U имеют направления из I^*.*

Отметим, что лемма является перенесением на интересующий нас случай аналогичного утверждения для сингулярного носителя гиперфункции [6, теор. 13]. При доказательстве также существенно используются теоремы теории гиперфункций.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что I является выпуклым конусом, не содержащем прямых. Зафиксируем покрытие $I_1,\ldots,I_k$ пространства $\mathbb{R}^n$ такого же вида, как и выше, так что замыкание I^* содержалось во внутренности конуса I_1. Из [6, теорема 13] следует, что сингулярный носитель гиперфункции на U, порожденной функционалом F, состоит из точек, содержащихся в $U\times I^*$. Отсюда следует, что сингулярные носители гиперфункций $b(\Phi_i)$, $i=2,\ldots k$, пусты, что по теореме 12 той же работы означает, что все функции Φ_i, $i=2,\ldots,k$ можно продолжить аналитически на некоторую окрестность множества U в $\mathbb{C}^n$. Так, для функционала $F_1=F-b(\Phi_1)$ существует аналитическая в окрестности функция Φ, $\Phi=\Phi_2+\cdots+\Phi_k$, так что

$$\langle F_1,\varphi\rangle=\int_U\widehat{\varphi}(x)\,\Phi(x)\,dx,$$

тогда, когда носитель $\widehat{\varphi}$ принадлежит U. Для таких φ функционал $T_\varphi F_1$ индуцирован непрерывной функцией $\widehat{\varphi}\,\Phi$ и, следовательно, значения соответствующей последовательности на Z^n стремятся к нулю на бесконечности. Так как последовательности $F(g)$ и $F_1(g)$ принимают одинаковые значения для всех g, не принадлежащих множеству I_1, то отсюда и из леммы 1.5 следует требуемое утверждение.

2. Некоторые применения к спектрам операторов. Пусть задано банахово пространство X и конечний набор $A_1,\ldots,A_n$ ограниченных линейных операторов в нем, коммутирующих между собой. Ими порождается представление $g\to A_g$ полугруппы Z^n_+, состоящей из всех точек $g\in Z^n$ с неотрицательными координатами. Зафиксируем элемент x^* пространства X^*, сопряженного к X, и элемент x пространства X. Мы рассмотрим порожденную ими функцию на группе Z^n, определенную по формуле $F_{x,x^*}(g)=x^*(A_gx)$ для g из Z^n_+ и равную нулю для остальных g. Мы предположим, что для элемента x^* выполняется следующее условие:

(4) Существует положительная функция $\alpha(g)$ на группе Z^n, удовлетворяющая (1) и (2), такая, что $\|A^*_gx^*\|\leq\alpha(g)$ для всех g из Z^n_+.

Далее мы будем считать элемент x^* фиксированным и для краткости будем обозначать F_{x,x^*} через $\tilde{x}$. Тогда соответствие $x\to\tilde{x}$ определяет отображение пространстра X в пространство $L^*=l^\infty(\alpha,Z^n)$. Легко видеть, что для любых h из Z^n_+ и x из X выполняется равенство

$$T_g x(h) = (A_g x)^\sim(h). \tag{5}$$

Совместный спектр операторов $A_1, \ldots, A_n$ является компактным подмножеством n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Как и выше, мы отождествляем группу T^n с остовом единичного полидиска в $\mathbb{C}^n$. Таким образом, можно рассмотреть вопрос о том, какие из точек T^n принадлежат совместному спектру $A_1, \ldots, A_n$. В основе дальнейших применений лежит следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Допустим, что для некоторого $x \in X$ точка $(z_0, \xi_0) \in T^n \times \mathbb{R}^n$ принадлежит $S(\widetilde{x})$, причем ξ_0 лежит во внутренности первого ортанта $\mathbb{R}^n_+$ пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда точка z_0 принадлежит совместному спектру операторов $A_1, \ldots, A_n$.*

Доказательство. Допустим, что точка z_0 не принадлежит совместному спектру операторов A_i. Тогда для некоторой окрестности U точки z_0 в $\mathbb{C}^n$ существуют операторы $P_i(z)$, $i = 1, \ldots, n$, аналитически зависящие от $z = (z_1, \ldots, z_n)$ на U, так что выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} (I - z_i A_i) P_i(z) = I. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = x^*[(\prod_{i=1}^{n} (I - z_i A_i)^{-1})(x)] = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n_+} x^*(A_g x) z^g.$$

Из (4) следует, что ряд в правой части равенства сходится во внутренности единичного полидиска пространства $\mathbb{C}^n$. Обозначим:

$$\Phi_i(z) = x^*[(\prod_{j \neq i} (I - z_j A_j)^{-1}) P_i(z)(x)], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Функция Φ_i определена для всех z из U таких, что $|z_j| < 1$ для всех j между 1 и n, отличных от i. Рассмотрим граничные значения $b(\Phi_i)$ на U. По лемме 1.6 сингулярный спектр функционала $b(\Phi_i)$ над U лежит в гиперплоскости $\xi_i = 0$. Легко видеть, что $\Phi = \Sigma_{i=1}^n \Phi_i$ в их общей области определения. В самом деле, из (6) следует, что $x = \Sigma_{i=1}^n (I - z_i A_i) P_i(z)(x)$. Подставляя это выражение для x в формулу, определяющую Φ, мы получаем требуемое разложение. Отсюда следует, что F на U равен сумме всех $b(\Phi_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, точки сингулярного спектра F над U содержатся в объединении гиперплоскостей $\xi_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, что противоречит предположению теоремы. Доказательство закончено.

Устойчивым совместным спектром операторов $A_1, \ldots, A_n$ в пространстве X мы будем называть такие лежащие на T^n точки совместного спектра, для которых выполняются требования теоремы, т. е. существует $x^* \in X^*$, удовлетворяющий условию (4), $x \in X$ и ξ, принадлежащая внутренности $\mathbb{R}^n_+$, так что ξ принадлежит $S(\widetilde{x})$ и предельные точки всех точек такого типа.

Следствие 2.2. *Пусть X_0 — некоторое всюду плотное линейное подмножество пространства X, являющееся банаховым пространством относительно некоторой своей нормы, и пусть операторы $A_1, \ldots, A_n$ ограничены также и по норме пространства X_0. Предположим, что z принадлежит устойчивому совместному спектру операторов $A_1, \ldots, A_n$ в X. Тогда совместный спектр этих операторов в X_0 тоже содержит точку z.*

Доказательство. Пусть x^*, x и ξ такие же, как и выше. Выберем последовательность x_n элементов X_0, сильно сходящуюся к x. Если предположить, что z не принадлежит совместному спектру A_i в X_0, то из теоремы следует, что все $\widetilde{x}_n$ несингулярны в некоторой окрестности $U\times I$ точки (z, ξ). Легко видеть, что элементы $\widetilde{x}_n$ также сходятся к $\widetilde{x}$ по норме пространства L^*. Используя лемму 1.5, мы приходим к противоречию с условиями в утверждении.

В заключение мы рассмотрим некоторые конкретные применения утверждений настоящего параграфа. Пусть X — коммутативное нормированное кольцо, M — его компакт максимальных идеалов. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — гомоморфизмы кольца X в себя. Тогда сопряженные операторы $A_1^*, \ldots, A_n^*$ определяют непрерывное отображение топологического пространства M в себя. Обозначим через M_0 подмножество пространства M, состоящее из всех точек, предельных для A_g по внутренним для $\mathbb{R}_+^n$ направлениям. Точнее, точка m_0 принадлежит M_0, если существует замкнутый конус I, содержащийся во внутренности конуса $\mathbb{R}_+^n$, последовательность g_k элементов Z^n, содержащихся в $Z^n \cap I$, и точка $m \in M$, так что последовательность $A_{g_k}^* m$ стремится к m_0 в M.

Следствие 2.3. *Допустим, что для любого конечного набора $g_1, \ldots, g_l$ элементов Z_+^n существует точка m_0, принадлежащая M_0, так что все точки $A_{g_i}^* m_0$, $i=1, \ldots, l$ различны между собой. Тогда совместный спектр $A_1, \ldots, A_n$ содержит единичный тор T^n.*

Доказательство. Зафиксируем $m \in M$, $m_0 \in M_0$ и I такие же, как и выше. Так как A_g — гомоморфизмы, то все функционалы вида $A_k^* m$ являются мультипликативными, и их норма в X^* равна единице. Таким образом m как элемент X^* удовлетворяет условию (3) с $\alpha(g)\equiv 1$. Рассмотрим, как и выше, индуцированное им отображение $x \to \widetilde{x}$ пространства X в L^*. Обозначим через $\widetilde{X}$ образ X в пространстве L^*, и через $\widetilde{X}_I$ — соответствующее ему при каноническом изображении подпространство пространства L_I. Имеем

$$\widetilde{x_1 x_2}(g) = m(A_g(x_1 x_2)) = \widetilde{x}_1(g)\, \widetilde{x}_2(g),$$

откуда следует, что пространства $\widetilde{X}$ и $\widetilde{X}_I$ замкнуты относительно поточечного умножения последовательностей. Комбинируя утверждения теоремы 2.1 и леммы 1.3, мы получаем, что для доказательства нашего предложения достаточно показать, что совместный спектр операторов сдвига на минимальном замкнутом инвариантном подпространстве, содержащем $\widetilde{X}_I$, совпадает с всей группой T^n. Обозначим это подпространство через $\widetilde{\widetilde{X}}_I$. Легко доказать, что $\widetilde{\widetilde{X}}_I$ также является нормированным кольцом относительно поточечного умножения. Для вычисления совместного спектра действующей на нем группы Z^n мы воспользуемся теоремой 4 из [3]. Докажем, что выполняются предположения теоремы. Легко видеть, что функционал m_0 переносится как ограниченный мультипликативный функционал на пространстве $\widetilde{X}$. Так как он равен нулю на пространстве $\widetilde{X} \cap l_I$, то его можно рассматривать и на пространстве $\widetilde{X}_I$, а, следовательно, и на $\widetilde{\widetilde{X}}_I$. Для любого конечного набора элементов Z^n можно найти элементы $g_1, \ldots, g_l$ из Z_+^n, так что любой элемент первоначально заданного набора можно представить как разность двух g_i. Тогда из сделаных предположений следует, что функционал m_0 на $\tilde{\tilde{X}}_l$ удовлетворяет предположениям теоремы 4 из [3]. Доказательство закончено.

Теорему 2.1 можно применить и в следующей ситуации: пусть, как и выше, X — коммутативное полупростое нормированное кольцо с компактом M максимальных идеалов. Пусть задано банахово пространство Y и пусть Z — банахово пространство, элементами которого являются функции на M со значениями в Y. Допустим, что Z — банахов X-модуль, т. е. умножение на скалярную функцию из X определяет ограниченний оператор в Z. Примером могут служить пространства дифференцируемых или аналитических функций со значениями в Y по отношению к кольцам дифференцируемых или аналитических функций. Рассмотрим, как и выше, набор $A_1, \dots, A_n$ коммутирующих между собой гомоморфизмов кольца X в себя и пусть $B_1, \dots, B_n$ — коммутирующие между собой ограниченные операторы в Z такие, что $B_i(x \cdot z) = A_i(x) B_i(z)$ для любых x из X и z из Z.

Следствие 2.4. *Допустим, что гомоморфизмы $A_1, \dots, A_n$ удовлетворяют условиям следствия 2.3. Допустим, что существует весовая функция $\alpha(g)$ на группе Z^n, удовлетворяющая условиям* (1) *и* (2), *так что*

$$c_1\alpha(g) \| z(m) \| \leqq \| B_g z(m) \| \leqq c_2\alpha(g) \| z(m) \|$$

для любого z из Z. Тогда совместный спектр операторов $B_1, \dots, B_n$ содержит тор T^n.

Доказательство. Предложение доказывается тем же способом, что и следствие 2.3, и приводить его полностью мы не будем. Основное отличие состоит в том, что отображение Z в L^* здесь строится при помощи функционала $\psi \in Z^*$, имеющего вид $\psi(z) = \varphi(z(m))$, где $\varphi \in Y^*$ и $m \in M$. Из условия следует, что функционал ψ удовлетворяет условию (3).

Предположения, сделанные выше, имеют место, например, в случае, когда оператор B является оператором взвешенного сдвига, действующий по формуле: $(Bz)(m) = U_m[z(\omega(m))]$, где U_m является унитарным оператором в гильбертовом пространстве Y, и $\omega(m)$ — некоторое преобразование пространства M в себя.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. Коммутативные нормированные кольца. Москва, 1960.
2. Ю. Н. Любич, В. И. Мацаев, Г. М. Фельдман. Об отделимости спектра представления локально компактной абелевой группы. *Доклады АН СССР*, **201**, 1971, № 6, 1232—1234.
3. Р. Н. Леви. Об автоморфизмах банаховых алгебр. *Функц. анализ и его прилож.*, **6**, 1972, № 1, 16—19.
4. Р. Н. Леви. О точках сингулярности обобщенных мер. *Функц. анализ и его прилож.*, **9**, 1975, № 2, 79—80.
5. J. Domar. Harmonic analysis based on certain commutative Banach algebras. *Acta math.*, **96**, 1956, No. 1—2, 1—66.
6. M. Morimoto. Edge of the wedge theorem and hyperfunction. *Lecture Notes in Mathematics*, **287**. Berlin, 1973.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 30. 5. 1977