Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ZUR BESTIMMUNG DER ASYMPTOTISCHEN VERTEILUNG DES LÖSUNGSVEKTORS ZUFÄLLIGER LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME

KLAUS NEUMANN, GERHARD RICHTER

In der vorliegenden Arbeit wird ein Grenzwertsatz mitgeteilt, der eine Aussage über die asymptotische (gemeinsame) Verteilung von m vorgegebenen Komponenten der Lösungsvektoren einer Folge zufälliger linearer Gleichungssysteme wachsender Dimension enthält. Einerseits kommt man dadurch zu allgemeineren Aussagen als Gizko (1975), wo die Verteilung der einzelnen Komponenten betrachtet wird, andererseits konnten die Bedingungen für die Konvergenz, wie sie Miller und Richter (1974) bzw. Richter (1974) gefordert wurden, abgeschwächt werden.

An einem Beispiel werden die Ergebnisse demonstriert und eine Fehlerabschätzung für die Wahrscheinlichkeit, daß der Lösungsvektor in einem speziellen, aber praktisch oft benutzten Bereich liegt, angegeben. Ein Vergleich mit bekannten Abschätzungen bei „deterministisch-gestörten" Gleichungssystemen zeigt deutlich die Notwendigkeit und Nützlichkeit der in der Arbeit angewandten wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungsweise.

1. Allgemeine Bemerkungen.

1.1. Einleitung. In der vorliegenden Arbeit werden lineare Gleichungssysteme betrachtet, deren Koeffizienten Zufallsgrößen sind. Die Untersuchung solcher Systeme ist sinnvoll, da vielfach die Koeffizienten keine deterministischen Größen sind, sondern sich z. B. aus Messungen oder längeren Rechnungen ergeben und demzufolge mit Meß- bzw. Rundungsfehlern behaftet sind. Hieraus ergibt sich, daß der Lösungsverktor eines solchen Gleichungssystems ist allgemeinen nicht konstant ist. Es ist daher von Interesse, Aussagen über die Verteilung des Lösungsvektors zu gewinnen. Die Bestimmung seiner exakten Verteilung ist außerordentlich schwierig und bisher nur in sehr speziellen Fällen gelungen (vgl. [1; 3]).

Über das asymptotische Verhalten des Lösungsvektors sind bereits verschiedene Arbeiten erschienen (z. B. [1; 2; 8]). In den meisten Fällen werden dabei die eindimensionalen Verteilungen des Lösungsvektors bestimmt (vgl. [1]) oder es erfolgt eine Einbettung der Lösung in den Raum l^2 der quadratisch konvergenten reellen Zahlenfolgen (vgl. [2; 8]).

Die vorliegende Arbeit beinhaltet Aussagen über die gemeinsame Grenzverteilung einer beliebig vorgegebenen Teilmenge der Komponenten des Lösungsvektors sowie damit im Zusammenhang stehende Fehlerabschätzungen.

1.2. Zur Notation. Grundsätzlich werden konstante Größen (Matrizen, Vektoren, Zahlen) mit einer Tilde versehen. Matrizen werden mit großen Buchstaben, Vektoren mit kleinen, fetten Buchstaben und eindimensionale Größen (Zahlen, Zufallsgrößen) mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über einige häufig verwendete Bezeichnungen:

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 4, 1978, p. 50—60.

$\widetilde{X}=(\widetilde{x}_{ij})_{i,j=1}^n$ — konstante Matrix vom Typ (n, n), $\widetilde{x}_{ij}\in R^1$;

$X=(x_{ij})_{i,j=1}^n$ — zufällige Matrix, die Elemente x_{ij} sind reelle Zufallsgrößen über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{a}, \mathsf{P})$;

$M(n, m)$ — Hilbertraum der reellen Matrizen vom Typ (m, n) mit dem Skalarprodukt

$$(\widetilde{X}, \widetilde{Y})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_{ij}\,\widetilde{y}_{ij}; \tag{1}$$

$\widetilde{X}^T$ — Transponierte der Matrix $\widetilde{X}$;

$\widetilde{X}^{T-1}:=(\widetilde{X}^T)^{-1}$ — Kurzschreibweise für die Inverse der transponierten Matrix;

$\widetilde{I}_n$ — Einheitsmatrix vom Typ (n, n);

$N(\widetilde{X})$ — Hilbert-Schmidt-Norm von $\widetilde{X}\in M(n, m)$, $N(\widetilde{X})=\sqrt{(\widetilde{X}, \widetilde{X})}$;

$\|\widetilde{X}\|$ — Spektralnorm von $\widetilde{X}\in M(n, m)$, d. h. die Quadratwurzel aus dem (betrags-)größten Eigenwert von $\widetilde{X}^T\widetilde{X}$;

$\mathbf{x}=(x_i)_{i=1}^n$ — zufälliger Verkor; die Elemente x_i sind reelle Zufallsgrößen;

$\widetilde{\mathbf{x}}=(\widetilde{x}_i)_{i=1}^n$ — konstanter Vektor, $\widetilde{x}_i\in R^1$;

$|\widetilde{\mathbf{x}}|$ — euklidische Vektornorm, $\|\widetilde{\mathbf{x}}\|=(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{x}_i^2)^{1/2}=(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{x}})^{1/2}$;

$N(\widetilde{\mathbf{c}}, \widetilde{K})$ — Normalverteilung mit Mittelwertvektor $\widetilde{\mathbf{c}}$ und Kovarianzmatrix $\widetilde{K}$.

Bemerkung 1. Das in (1) definierte Skalarprodukt hat eine wichtige Eigenschaft (vgl. z. B. [7]), von der im folgenden des öfteren Gebrauch gemacht wird:

Es seien $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ bzw. $\widetilde{C}$ Matrizen vom Typ (m, n), (n, p) bzw. (m, p) dann gilt:

$$(\widetilde{A}\,\widetilde{B}, \widetilde{C})=(\widetilde{B}, \widetilde{A}^T\widetilde{C})=(\widetilde{A}, \widetilde{C}\,\widetilde{B}^T). \tag{2}$$

Dabei ist zu beachten, daß die Skalarproduke in (2) im allgemeinen Skalarprodukte verschiedener Räume sind.

2. Ein Grenzwertsatz. Gegenstand der Untersuchungen in diesem Abschnitt sind Folgen zufälliger linearer Gleichungssysteme, die wir in der Form

$$(\widetilde{A}_n+D_n)\,\mathbf{x}_n=\widetilde{\mathbf{b}}_n \tag{3}$$

schreiben. Dabei bezeichnet $\widetilde{A}_n$ eine konstante, reguläre (n, n)-Matrix und D_n eine „zufällige Störung". Die rechte Seite $\widetilde{\mathbf{b}}_n$ in (3) kann o. E. d. A. als konstanter Vektor angenommen werden (vgl. z. B. [2]).

Der folgende Satz beinhaltet eine Aussage über die Grenzverteilung für m beliebig vorgegebene Komponenten des Lösungsvektors $\mathbf{x}_n$. Zur übersichtli) cheren Formulierung wählen wir die ersten m Komponenten von $\mathbf{x}_n$ $(n\geq m)$.

Satz 1. $(\widetilde{A}_n+D_n)\mathbf{x}_n=\widetilde{\mathbf{b}}_n$ *sei eine Folge zufälliger linearer Gleichungssysteme wachsender Dimension. Es gelte:*

(I) $\widetilde{A}_n$ *sei eine konstante, reguläre* (n, n) *-Matrix* $(n \in N)$;

(II) $(\widetilde{A}_n + D_n)$ *sei fast sicher regulär* $(n \in N)$;

(III) *die Elemente* d_{jkn} *der Matrix* D_n *seien in ihrer Gesamtheit unabhängig mit* $\mathsf{E} d_{jkn} = 0$, $\mathsf{E} d^2_{jkn} = : \widetilde{\sigma}^2_{jkn} > 0$, *und die Größen* $d_{jkn}/\widetilde{\sigma}_{jkn}$ *seien identisch verteilt* $(j, k = 1, \ldots, n;\ n \in N)$;

(IV) *für die Hilbert-Schmidt-Norm von* $\widetilde{A}_n^{-1}$ *gelte* $N(\widetilde{A}_n^{-1}) = o(n^{-1/2})$ *bei* $n \to \infty$.

(V) *für die „ungestörte Lösung"* $\widetilde{\mathbf{c}}_n := \widetilde{A}_n^{-1} \widetilde{\mathbf{b}}_n$ *gelte* $\sup\limits_{j=1,\ldots,n} |\widetilde{c}_{jn}| / \|\widetilde{\mathbf{c}}_n\| = o(1)$ *bei* $n \to \infty$;

(VI) *es exiestieren Konstanten* $\widetilde{a}_1 > 0$ *und* $\widetilde{a}_2 > 0$ *sowie eine natürliche Zahl* n_0 *so, daß für alle* $n \geq n_0$, $\widetilde{a}_1 \leq \widetilde{\sigma}^2_{jkn} \leq \widetilde{a}_2$, $j, k = 1, \ldots, n$, *gilt,*

Dann ist $\widetilde{E}_n \mathbf{x}_n$ *asymptotisch nach* $N(\widetilde{E}_n \widetilde{\mathbf{c}}_n, \widetilde{K}_n)$ *verteilt, wobei*

$$\widetilde{E}_n := \underbrace{\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|}_{n \text{ Spalten}} \Bigg\} m \text{ Zeilen}, \ n \geq m,$$

und

$$\widetilde{K}_n := \mathsf{E} (\widetilde{E}_n \widetilde{A}_n^{-1} D_n \widetilde{\mathbf{c}}_n \widetilde{\mathbf{c}}_n^T D_n^T \widetilde{A}_n^{T-1} \widetilde{E}_n^T) \tag{4}$$

gesetzt wurde:

d. h. die Verteilung von $\widetilde{K}_n^{-1/2} \widetilde{E}_n (\mathbf{x}_n - \widetilde{\mathbf{c}}_n)$ *konvergiert schwach gegen eine Normalverteilung nach* $N(\mathbf{o}, \widetilde{I}_m)$.

B e w e i s. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\mathbf{z}_n := \widetilde{K}_n^{-1/2} \widetilde{E}_n (\mathbf{x}_n - \widetilde{\mathbf{c}}_n), \tag{5}$$

$$\mathbf{w}_n := -\widetilde{K}_n^{-1/2} \widetilde{E}_n \widetilde{A}_n^{-1} D_n \widetilde{\mathbf{c}}_n. \tag{6}$$

Bemerkt sei dabei, daß die Matrix $\widetilde{K}_n$, wie leicht nachzuweisen ist, symmetrisch und positiv definit ist.

Im Teil 1 des Beweises wird gezeigt, daß die Verteilung von $\mathbf{w}_n$ schwach gegen eine Normalverteilung nach $N(\mathbf{o}, \widetilde{I}_m)$ konvergiert.

Teil 2 enthält den Nachweis, daß für jedes $\widetilde{\varepsilon} > 0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\|\mathbf{z}_n - \mathbf{w}_n\| \geq \widetilde{\varepsilon}) = 0$. Daraus folgt dann leicht (vgl. z. B. [8]), daß auch die Verteilung von $\mathbf{z}_n$ schwach gegen die erwähnte Normalverteilung konvergiert.

1. Wir ermitteln die Grenzverteilung von $\mathbf{w}_n$ mit Hilfe der charakteristischen Funktion. Es sei $\widetilde{\mathbf{t}} \in R^m$. $\varphi_{\mathbf{w}_n}(\widetilde{\mathbf{t}}) := \mathsf{E} \exp (i(\widetilde{\mathbf{t}}, \mathbf{w}_n))$ bezeichne die charakteristische Funktion des zufälligen Vektors $\mathbf{w}_n$. Wir zeigen im folgenden die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\mathbf{w}_n}(\tilde{\mathbf{t}}) = \exp(-\|\tilde{\mathbf{t}}\|^2/2) \tag{7}$$

für jedes $\tilde{\mathbf{t}} \in R^m$. Dazu wählen wir $\tilde{\mathbf{t}}$ beliebig, aber fest, und bezeichnen mit $\varphi(\tilde{\mathbf{t}}) = \mathsf{E} \exp(i\tilde{t}\, d_{jkn}/\tilde{\sigma}_{jkn})$, $\tilde{t} \in R^1$, die charakteristische Funktion der (identisch verteilten) Zufallsgrößen $d_{jkn}/\tilde{\sigma}_{jkn}$, $j, k = 1, \ldots, n$; $n \in N$. Da die Streuung von $d_{jkn}/\tilde{\sigma}_{jkn}$ gleich 1 ist, gilt (vgl. z. B. [6]):

$$\varphi(\tilde{t}) = 1 - 2^{-1}\tilde{t}^2 + o(\tilde{t}^2) \tag{8}$$

für $\tilde{t} \to 0$. Mit

$$\tilde{\mathbf{u}}_n := \tilde{A}_n^{T-1} \tilde{E}_n^T \tilde{K}_n^{-1/2} \tilde{\mathbf{t}}, \quad \tilde{V}_n := -\tilde{\mathbf{u}}_n \tilde{\mathbf{c}}_n^T \tag{9}$$

läßt sich nach Voraussetzung (III) $\varphi_{\mathbf{w}_n}(\tilde{\mathbf{t}})$, wie folgt bestimmen:

$$\varphi_{\mathbf{w}_n}(\tilde{\mathbf{t}}) \mathsf{E} \exp(i(\tilde{\mathbf{t}}_1 - \tilde{K}_n^{-1/2} \tilde{E}_n \tilde{A}_n^{-1} D_n \tilde{\mathbf{c}}_n)) = \mathsf{E} \exp(i(\tilde{V}_n, D_n))$$

$$= \prod_{j,k=1}^{n} \mathsf{E} \exp(i\tilde{v}_{jkn} d_{jkn}) = \prod_{j,k=1}^{n} \varphi(\tilde{\sigma}_{jkn} \tilde{v}_{jkn}) = \prod_{j,k=1}^{n} (1 - 2^{-1} \tilde{\sigma}_{jkn}^2 \tilde{v}_{jkn}^2 + \tilde{\gamma}_{jkn}).$$

Für die i. a. komplexwertigen Restglieder $\tilde{\gamma}_{jkn}$ gilt wegen (8): Zu jedem $\tilde{\varepsilon} > 0$ existiert eine reelle, von n unabhängige Zahl $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\tilde{\varepsilon}) > 0$ so, daß für $j, k = 1, \ldots, n$: und beliebiges $n \in N$ gilt:

$$\tilde{\sigma}_{jkn}^2 \tilde{v}_{jkn}^2 \leq \tilde{\delta}(\tilde{\varepsilon}) \longrightarrow |\tilde{\gamma}_{jkn}| \leq \tilde{\varepsilon}\, \tilde{\sigma}_{jkn}^2 \tilde{v}_{jkn}^2. \tag{10}$$

Weiter gilt unter Beachtung von (9) nnd den Voraussetzungen (VI) und (III))

$$\tilde{\sigma}_{jkn}^2 \tilde{v}_{jkn}^2 = \tilde{u}_{jn}^2 \tilde{c}_{kn}^2 \tilde{\sigma}_{jkn}^2 \tag{11}$$

$$\leq \tilde{a}_2 \|\tilde{\mathbf{c}}_n\|^{-2} \sup\{\tilde{c}_{ln}^2 : l = 1, \ldots, n\} \sum_{k=1}^{n} \tilde{u}_{jn}^2 \tilde{c}_{kn}^2$$

$$\leq \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1} \|\tilde{\mathbf{c}}_n\|^{-2} \sup\{\tilde{c}_{ln}^2 : l = 1, \ldots, n\} \sum_{j,k=1}^{n} \tilde{u}_{jn}^2 \tilde{c}_{kn}^2 \mathsf{E} d_{jkn}^2$$

$$= \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1} \|\tilde{\mathbf{c}}_n\|^{-2} \sup\{\tilde{c}_{ln}^2 : l = 1, \ldots, n\} \mathsf{E}\Big(\sum_{j_1, k_1=1}^{n} \tilde{u}_{j_1 n} \tilde{c}_{k_1 n} d_{j_1 k_1 n} \sum_{j_2, k_2=1}^{n} \tilde{u}_{j_2 n} \tilde{c}_{k_2 n} d_{j_2 k_2 n} \Big)$$

$$= \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1} \|\tilde{\mathbf{c}}_n\|^{-2} \sup\{\tilde{c}_{ln}^2 : l = 1, \ldots, n\} \mathsf{E}(\tilde{\mathbf{u}}_n^T D_n \tilde{\mathbf{c}}_n)^2$$

$$= \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1} \|\tilde{\mathbf{c}}_n\|^{-2} \sup\{\tilde{c}_{ln}^2 : l = 1, \ldots, n\} \mathsf{E}(\tilde{\mathbf{t}}^T \tilde{K}_n^{-1/2} \tilde{E}_n \tilde{A}_n^{-1} D_n \tilde{\mathbf{c}}_n, \tilde{\mathbf{t}}^T \tilde{K}_n^{-1/2} \tilde{E}_n \tilde{A}_n^{-1} D_n \tilde{\mathbf{c}}_n)$$

$$= \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1} \|\tilde{\mathbf{c}}_n\|^{-2} \sup\{\tilde{c}_{ln}^2 : l = 1, \ldots, n\} (\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}).$$

Dabei wurde bei der Umformung der Doppelsumme die Beziehung $\mathsf{E}(d_{j_1 k_1 n} d_{j_2 k_2 n}) = \delta_{j_1 j_2} \delta_{k_1 k_2} \tilde{\sigma}_{j_1 k_1 n}^2$ berücksichtigt. Wir setzen jetzt in (10) $\tilde{\varepsilon} = 1/2$.

Abschätzurg (11) zeigt in Verbindung mit Voraussetzung (V), daß für alle hinreichend großen n, $n \geq n_1$, gilt:

$$\widetilde{\sigma}^2_{jkn}\widetilde{v}^2_{jkn} \leq \widetilde{\delta}_1 := \min(1/2, \widetilde{\delta}(1/2)).$$

Für $n \geq n_1$ gilt außerdem wegen (10):

$$|\widetilde{\gamma}_{jkn}| \leq \widetilde{\sigma}^2_{jkn}\widetilde{v}^2_{jkn}/2 \leq 1/4, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

Damit wird für $n \geq n_1$ die Ungleichung

$$|-2^{-1}\widetilde{\sigma}^2_{jkn}\widetilde{v}^2_{jkn} + \widetilde{\gamma}_{jkn}| \leq 1/2, \quad j, k = 1, \ldots, n,$$

erfüllt. Das gestattet nun, den Logarithmus von $\varphi_{\mathbf{w}_n}(\widetilde{\mathbf{t}})$ unter Ausnutzung der bekannten Beziehung

$$\ln(1+\widetilde{z}) = \widetilde{z} + \widetilde{\vartheta}\,\widetilde{z}^2, \quad |\widetilde{z}| \leq 1/2, \quad |\widetilde{\vartheta}| \leq 1,$$

wobei $\widetilde{z}$ und $\widetilde{\vartheta}$ i. a. komplex sein können, wie folgt zu entwickeln:

$$\ln \varphi_{\mathbf{w}_n}(\widetilde{\mathbf{t}}) = \sum_{j,k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{\widetilde{\sigma}^2_{jkn} v^2_{jkn}}{2} + \widetilde{\gamma}_{jkn}\right)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n}\left(-\frac{\widetilde{\sigma}^2_{jkn}\widetilde{v}^2_{jkn}}{2} + \widetilde{\gamma}_{jkn} + \widetilde{\vartheta}_{jkn}\left(-\frac{\widetilde{\sigma}^2_{jkn}\widetilde{v}^2_{jkn}}{2} + \widetilde{\gamma}_{jkn}\right)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\widetilde{\sigma}^2_{jkn}\widetilde{v}^2_{jkn} + \widetilde{r}_n.$$

Dabei ist $|\widetilde{\vartheta}_{jkn}| \leq 1$, die Bedeutung von $\widetilde{r}_n$ ist aus der letzten Gleichheit ersichtlich.

Verwendet man die Gleichungskette in (11), so erhält man

$$\sum_{j,k=1}^{n}\widetilde{\sigma}^2_{jkn}\widetilde{v}^2_{jkn} = \mathsf{E}\sum_{j,k=1}^{n}\widetilde{u}^2_{jn}\widetilde{c}^2_{kn}d^2_{jkn} = (\widetilde{\mathbf{t}}, \widetilde{\mathbf{t}}).$$

Aus Voraussetzung (V) folgt leicht $\lim_{n\to\infty}\widetilde{r}_n = 0$. Somit haben wir endgültig

$$\lim_{n\to\infty} \ln \varphi_{\mathbf{w}_n}(\widetilde{\mathbf{t}}) = -\|\widetilde{\mathbf{t}}\|^2/2$$

erhalten und damit (7) bewiesen.

2. Wir zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\|\mathbf{z}_n - \mathbf{w}_n\| \geq \widetilde{\varepsilon}) = 0$$

für jedes $\widetilde{\varepsilon} > 0$. Es sei

(12) $$\Omega_n := \{\omega \in \Omega : \|\widetilde{A}_n^{-1}D_n\| < 1/2\}.$$

Damit gilt:

(13) $$\mathsf{P}(\|\mathbf{z}_n - \mathbf{w}_n\| \geq \widetilde{\varepsilon}) \leq \mathsf{P}(\Omega_n) + \mathsf{P}(\{\omega : \|\mathbf{z}_n - \mathbf{w}_n\| \leq \widetilde{\varepsilon}\} \cap \Omega_n).$$

Es genügt also, die folgenden Limesbeziehungen zu verifizieren:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\bar{\Omega}_n)=0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\{\omega : \|\mathbf{z}_n-\mathbf{w}_n\|\geq\tilde{\varepsilon}\}\cap\Omega_n)=0.$$

2.1. Bei Beachtung von Voraussetzung (III) und Formel (12) gilt unter Verwendung der Markoffschen Ungleichung

$$\mathsf{P}(\bar{\Omega}_n)=\mathsf{P}(\|\tilde{A}_n^{-1}D_n\|^2\geq 1/4)\leq 4\,\mathsf{E}\,\|\tilde{A}_n^{-1}D_n\|^2\leq 4\mathsf{E}\,(\tilde{A}_n^{-1}D_n,\ \tilde{A}_n^{-1}D_n)$$

$$=4\mathsf{E}\,(D_nD_n^T,\ \tilde{A}_n^{T-1}\tilde{A}_n^{-1})=4\,(\operatorname{diag}\,(\sum_{l=1}^{n}\tilde{\sigma}_{jln}^2),\ \tilde{A}_n^{T-1}\tilde{A}_n^{-1})$$

$$\leq 4\sup_{j=1,\ldots,n}\sum_{l=1}^{n}\tilde{\sigma}_{jln}^2\ \operatorname{Sp}\,(\tilde{A}_n^{T-1}\,\tilde{A}_n^{-1})\leq 4n\tilde{a}_2N^2(\tilde{A}_n^{-1})\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Letzteres ergibt sich aus Voraussetzung (IV).

2.2. Sei nun $\omega\in\Omega_n$, dann läßt sich die Inverse von $(\tilde{A}_n+D_n)$ in eine (im Sinne der Spektralnorm) konvergente Reihe entwickeln:

$$(\tilde{A}_n+D_n)^{-1}=(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\tilde{A}_n^{-1}D_n)^k)\tilde{A}_n^{-1}.$$

Daraus folgt $\mathbf{x}_n=(\tilde{I}_n-(\tilde{A}_n^{-1}D_n)+(\tilde{A}_n^{-1}D_n)^2-+\ldots)\tilde{\mathbf{c}}_n$. Damit erhält man (vgl. (5) und (6)):

$$\text{(14)} \qquad \mathbf{z}_n-\mathbf{w}_n=\tilde{K}_n^{-1/2}\tilde{E}_n(\mathbf{x}_n-\tilde{\mathbf{c}}_n+\tilde{A}_n^{-1}D_n\tilde{\mathbf{c}}_n)$$

$$=\tilde{K}^{n-1/2}\tilde{E}_n\tilde{A}_n^{-1}D_n(\tilde{I}_n+\tilde{A}_n^{-1}D_n)^{-1}\tilde{A}_n^{-1}D_n\tilde{\mathbf{c}}_n.$$

Die Abschätzung der Norm ergibt

$$\|\mathbf{z}_n-\mathbf{w}_n\|\leq\|\tilde{K}_n^{-1/2}\tilde{E}_n\tilde{A}_n^{-1}D_n\|\,\|(\tilde{I}_n+\tilde{A}_n^{-1}D_n)^{-1}\|\,\|\tilde{A}_n^{-1}D_n\tilde{\mathbf{c}}_n\|.$$

Wegen $\omega\in\Omega_n$ läßt sich der mittlere Faktor auf der rechten Seite sofort durch $\|(\tilde{I}_n+\tilde{A}_n^{-1}D_n)^{-1}\|\leq 2$ abschätzen. Mit $s_n:=\|\tilde{K}_n^{-1/2}\tilde{E}_n\tilde{A}_n^{-1}D_n\|$ und $t_n:=\|\tilde{A}_n^{-1}D_n\tilde{\mathbf{c}}_n\|$ ergibt sich bei Verwendung der Markoffschen Ungleichung

$$\text{(15)} \qquad \mathsf{P}(\{\omega:\|\mathbf{z}_n-\mathbf{w}_n\|\geq\tilde{\varepsilon}\}\cap\Omega_n)\leq\mathsf{P}(2\,s_n\,t_n\geq\tilde{\varepsilon})\leq 2\,\mathsf{E}(s_n\,t_n)/\tilde{\varepsilon}.$$

Dabei sei $\tilde{\varepsilon}<0$ beliebig, aber fest gewählt. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gestattet für $\mathsf{E}\,(s_nt_n)$ die Abschätzung $\mathsf{E}\,(s_nt_n)\leq\sqrt{\mathsf{E}s_n^2}\,\sqrt{\mathsf{E}t_n^2}$. Nun gilt

$$t_n^2=\sum_{l=1}^{n}t_l^2 \quad\text{mit}\quad t_{ln}:=\sum_{j,k=1}^{n}\tilde{\alpha}_{ljn}\,d_{jkn}\tilde{c}_{kn},$$

wobei $(\tilde{\alpha}_{ljn})_{l,j=1}^n:=\tilde{A}_n^{-1}$ ist. Damit ergibt sich

$$\mathsf{E}\,t_n^2=\sum_{l=1}^{n}\mathsf{E}\,t_{ln}^2=\sum_{l,j,k=1}^{n}\tilde{\alpha}_{ljn}^2\,\tilde{\sigma}_{jkn}^2\tilde{c}_{kn}^2\leq\tilde{a}_2\,\|\tilde{\mathbf{c}}_n\|^2\,N^2(\tilde{A}_n^{-1}).$$

Wir erhalten jetzt

(16) $$\mathsf{E}(s_n t_n) \leqq \sqrt{\mathsf{E} s_n^2 \|\tilde{\mathbf{c}}_n\|^2} \sqrt{\tilde{a}_2}\, N(\tilde{A}_n^{-1}).$$

Es bleibt noch $\mathsf{E} s_n^2 \|\tilde{\mathbf{c}}_n\|^2$ abzuschätzen. Wir setzen hierzu

$$\tilde{B}_n = (\tilde{b}_{jkn})_{\substack{j=1,\ldots,m\\ k=1,\ldots,n}} := \tilde{K}_n^{-1/2} \tilde{E}_n \tilde{A}_n^{-1}$$

und bekommen

(17) $$\mathsf{E} s_n^2 \|\tilde{\mathbf{c}}_n\|^2 \leqq \mathsf{E}(\tilde{B}_n D_n, \tilde{B}_n D_n) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{j_1,k=1}^{n} \mathsf{E}\, d_{j_1 kn}^2 \tilde{b}_{jj_1 n}^2 \|\tilde{\mathbf{c}}_n\|^2$$

$$\leqq \tilde{a}_2 \|\tilde{\mathbf{c}}_n\|^2 n \sum_{j=1}^{m} \sum_{j_1=1}^{n} \tilde{b}_{jj_1 n}^2 \leqq \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1} n \sum_{j=1}^{m} \sum_{j_1, j_2=1}^{n} \tilde{b}_{jj_1 n}^2 \tilde{c}_{j_2 n}^2 \sigma_{j_1 j_2 n}^2$$

$$= \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1} n \sum_{j=1}^{m} \mathsf{E}\Big(\sum_{j_1, j_2=1}^{n} \tilde{b}_{jj_1 n} d_{j_1 j_2 n} \tilde{c}_{j_2 n}\Big)^2 = \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1} n \mathsf{E}(\tilde{B}_n D_n \tilde{\mathbf{c}}_n, \tilde{B}_n D_n \tilde{\mathbf{c}}_n)$$

$$= \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1} n \mathsf{E}(\tilde{K}_n^{-1/2} \tilde{E}_n \tilde{A}_n^{-1} D_n \tilde{\mathbf{c}}_n, \tilde{K}_n^{-1/2} \tilde{E}_n \tilde{A}_n^{-1} D_n \tilde{\mathbf{c}}_n) = \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1} nm.$$

Letzteres gilt wegen (4).

Aus (15), (16) uud (17) folgt bei Berücksichtigung von Voraussetzung (IV) letztlich

$$\mathsf{P}(\{\omega : \|\mathbf{z}_n - \mathbf{w}_n\| \geqq \tilde{\varepsilon}\} \cap \Omega_n) \leqq \frac{2\tilde{a}}{\tilde{\varepsilon}\sqrt{\tilde{a}_1}} \sqrt{mn}\, N(\tilde{A}_n^{-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Damit ist Beweisteil 2 beendet und Satz 1 vollständig bewiesen.

Bemerkung 2. Voraussetzung (II) des Satzes ist z. B. immer erfüllt, wenn die Elemente d_{jkn} von D_n unabhängig sind und eine Dichte besitzen (vgl. [8]).

Bemerkung 3. Die Voraussetzungen (IV) und (VI) besagen, daß der konstante Anteil $\tilde{A}_n$ „groß" gegenüber der zufälligen Störung D_n ist.

Bemerkung 4. Hinreichend für die Bedingung (IV) ist z. B.

$$\|\tilde{A}_n^{-1}\| = o(1/n), n \to \infty.$$

Der nachfolgende Satz ist eine unmittelbare Folgerung des Satzes 1.

Satz 2. $(\tilde{A}_n + D_n)\mathbf{x}_n = \tilde{\mathbf{b}}_n$ *sei eine Folge zufälliger linearer Gleichungssysteme wachsender Dimension mit folgenden Eigenschaften:*

(I) $\tilde{A}_n$ *sei eine konstante reguläre (n, n)-Matrix* $(n \in N)$;

(II) $(\tilde{A}_n + D)$ *sei fast sicher regulär* $(n \in N)$;

(III) *die Elemente d_{jkn} der Matrix D_n seien in ihrer Gesamtheit unabhängig und identisch verteilt mit* $\mathsf{E} d_{jkn} = 0$, $\mathsf{E} d_{jkn}^2 = \sigma^2$, $j, k = 1, \ldots, n$; $n \in N$;

(IV) *für die Hilbert-Schmidt-Norm von $\tilde{A}_n^{-1}$ gelte* $N(A_n^{-1}) = o\,(n^{-1/2})$ *bei* $n \to \infty$;

(V) *für die ungestörte Lösung* $\widetilde{\mathbf{c}}_n = \widetilde{A}_n^{-1}\widetilde{\mathbf{b}}_n$ *sei* $\sup_{j=1,\ldots,n} |\widetilde{c}_{jn}| / \|\widetilde{\mathbf{c}}_n\| = o(1)$ *bei* $n \to \infty$ *erfüllt. Dann ist* $\widetilde{E}_n\mathbf{x}_n$ *asymptotisch nach* $N(\widetilde{E}_n\widetilde{\mathbf{c}}_n, \widetilde{K}_n)$ *verteilt. Für die Kovarianzmatrix* $\widetilde{K}_n$ *gilt dabei*

$$\widetilde{K}_n = \widetilde{\sigma^2} \| \widetilde{\mathbf{c}}_n \|^2 \widetilde{E}_n \widetilde{A}_n^{-1} \widetilde{A}_n^{T-1} \widetilde{E}_n^T. \tag{18}$$

3. Zur numerischen Auswertung.

3.1. Fehlerabschätzung. Dem Problem der Abschätzung der Wahrscheinlichkeit $\mathsf{P}(\widetilde{E}_n\mathbf{x}_n \in G)$, wobei G eine Borelmenge des R^m ist, ist der Abschnitt 3.1. in [2] gewidmet. Für die praktische Anwendung ist dabei wichtig, daß G ein Parallelepipedon des R^m mit speziellen Kantenrichtungen ist.

Wahrscheinlichkeiten der Art $\mathsf{P}(\cap_{j=1}^m \{x_{jn} \in G_j\})$, wobei die G_j Borelmengen des R^1 sind, lassen sich nur recht schwierig berechnen. Allerdings kann man relativ leicht die eindimensionalen Verteilungen von $\mathbf{x}$ abschätzen und mit deren Hilfe obere Schranken für Wahrscheinlichkeiten der folgenden speziellen, praktisch aber sehr wichtigen Form gewinnen: $\mathsf{P}(\cap_{j=1}^m \{ |x_{jn} - \widetilde{c}_{jn}| \geqq \widetilde{a}_j\})$.

Im weiteren verwenden wir die Bezeichnungen des Abschnitts 2. Gegeben sei ein Gleichungssystem der Gestalt (3), desweiteren seien die Voraussetzungen (I), (II) und (III) des Satzes 1 erfüllt, wobei $n \in N$ jetzt fest gewählt wird.

Interessiert man sich nur für die eindimensionalen Verteilungen des Lösungsvektors, so ist $\widetilde{E}_n$ vom Typ $(1, n)$ und $\widetilde{K}_n$ vom Typ $(1, 1)$. Zur Bestimmung der Verteilung der k-ten Komponente x_{kn} des Lösungsvektors definieren wir folgende Größen:

$$\widetilde{\gamma}_{kn} := \mathsf{E}\widetilde{\mathbf{e}}_k^T \widetilde{A}_n^{-1} D_n \widetilde{\mathbf{c}}_n \widetilde{\mathbf{c}}_n^T D_n^T \widetilde{A}_n^{T-1} \widetilde{\mathbf{e}}_k, \tag{4'}$$

$$z_{kn} := (x_{kn} - \widetilde{c}_{kn}) / \sqrt{\widetilde{\gamma}_{kn}}, \tag{5'}$$

$$w_{kn} := -\frac{1}{\sqrt{\widetilde{\gamma}_{kn}}} \widetilde{\mathbf{e}}_k^T \widetilde{A}_n^{-1} D_n \widetilde{\mathbf{c}}_n = -\frac{1}{\sqrt{\widetilde{\gamma}_{kn}}} \sum_{j,\, l=1}^{n} \widetilde{a}_{kjn} d_{jln} \widetilde{c}_{ln}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{6'}$$

Hierbei bezeichnet $\widetilde{\mathbf{e}}_k$ einen Einheitsvektor des R^n, gegeben durch

$$\widetilde{\mathbf{e}}_k = (\widetilde{e}_{kj})_{j=1}^n \text{ mit } \widetilde{e}_{kj} = \delta_{kj} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Weiter sei $F_{kn}(\widetilde{x}) = \mathsf{P}(w_{kn} < \widetilde{x})$ die Verteilungsfunktion von w_{kn}. Dann gilt der folgende Satz dessen Beweis offensichtlich ist Satz 3: Für die Verteilung der k-ten Komponente x_{kn} des Lösungsvektors $\mathbf{x}_n$ gilt:

$$\sup_{\widetilde{\varepsilon} > 0} (F_{kn}(\widetilde{x} - \widetilde{\varepsilon}) - \mathsf{P}(|z_{kn} - w_{kn}| \geqq \widetilde{\varepsilon})) \leqq \mathsf{P}(x_{kn} < \widetilde{c}_{kn} + \widetilde{x}\sqrt{\widetilde{\gamma}_{kn}}) \tag{19}$$

$$\leqq \inf_{\widetilde{\varepsilon} > 0} (F_{kn}(\widetilde{x} + \widetilde{\varepsilon}) + \mathsf{P}(|z_{kn} - w_{kn}| \geqq \widetilde{\varepsilon})), \quad \widetilde{x} \in R^1.$$

Bemerkung 5. Die Abschätzung von $\mathsf{P}(|z_{kn} - w_{kn}| \geqq \widetilde{\varepsilon})$ erfolgt im Ab schnitt 3.2. mit den im Beweisteil 2 (Satz 1) bereitgestellten Mitteln.

Bemerkung 6. Sind die Elemente von D_n normalverteilt, so gilt $F_{kn}(\widetilde{x}) = \Phi(\widetilde{x})$, wobei $\Phi(\widetilde{x})$ die Verteilungsfunktion der $N(0, 1)$-Verteilung ist. Falls die Elemente von D_n recht-eckverteilt sind, so ist bereits für relativ kleines) n (vgl. [5]) die Approximation von $F_{kn}(\tilde{x})$ durch $\Phi(\tilde{x})$ gerechtfertigt man beachte (6')).

Folgerung. *Es seien die Elemente d_{jkn} von D_n symmetrisch um Null verteilt. Für $\tilde{a}>0$ gilt dann:*

$$\mathsf{P}(|x_{kn}-\tilde{c}_{kn}|\geq\tilde{a})\leq\inf_{\tilde{\varepsilon}>0}\left(2\left(1-F_{kn}\left(\frac{\tilde{a}}{\sqrt{\tilde{\gamma}_{kn}}}-\tilde{\varepsilon}\right)\right)+\mathsf{P}(|z_{kn}-w_{kn}|\geq\tilde{\varepsilon})\right). \tag{20}$$

Beweis. Wegen (6') ist auch w_{kn} symmetrisch verteilt und es gilt für beliebiges $\tilde{\varepsilon}>0$:

$$\mathsf{P}(|x_{kn}-\tilde{c}_{kn}|\geq\tilde{a})=\mathsf{P}(|x_{kn}-\tilde{c}_{kn}|/\sqrt{\tilde{\gamma}_{kn}}\geq\tilde{a}/\sqrt{\tilde{\gamma}_{kn}})=\mathsf{P}(|z_{kn}|\geq\tilde{a}/\sqrt{\tilde{\gamma}_{kn}})$$

$$\leq\mathsf{P}\left(|w_{kn}|\geq\frac{\tilde{a}}{\sqrt{\tilde{\gamma}_{kn}}}-\tilde{\varepsilon}\right)+\mathsf{P}(|z_{kn}-w_{kn}|\geq\tilde{\varepsilon})\leq2\left(1-F_{kn}\left(\frac{\tilde{a}}{\sqrt{\tilde{\gamma}_{kn}}}-\tilde{\varepsilon}\right)\right)$$

$$+\mathsf{P}(|z_{kn}-w_{kn}|\geq\tilde{\varepsilon}).$$

3.2. Ein Beispiel. Das folgende Beispiel dient zur Illustration der im Abschnitt 2 erhaltenen Resultate. Gegeben sei das zufällige Gleichungssystem $(\tilde{A}+D)\,\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{b}}$ mit

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}2{,}02 & 0{,}54 & 3{,}12 & -1{,}44\\ 0{,}54 & 0{,}58 & 1{,}44 & 0{,}72\\ 3{,}12 & 1{,}44 & -3{,}02 & 0{,}54\\ -1{,}44 & 0{,}72 & 0{,}54 & -1{,}58\end{pmatrix},\quad \tilde{\mathbf{b}}=\begin{pmatrix}-1{,}2\\ 0{,}8\\ -0{,}4\\ -0{,}1\end{pmatrix}.$$

(Der Index $n=4$ wird zur Vereinfachung der Schreibweise weggelassen.) Die Elemente d_{jk} $(j,k=1,\ldots,4)$ von D seien in ihrer Gesamtheit unabhängig und identisch gleichmäßig verteilt auf dem Intervall $[-0{,}005;\,0{,}005]$. Ein solches Gleichungssystem kann sich z. B. ergeben, wenn die Elemente der Koeffizientenmatrix im Laufe einer Rechnung als auf zwei Stellen nach dem Komma gerundete Werte entstehen. Es ergibt sich

$$\tilde{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}214 & -0{,}162 & 0{,}102 & -0{,}234\\ -0{,}162 & 0{,}646 & 0{,}234 & 0{,}522\\ 0{,}102 & 0{,}234 & -0{,}119 & -0{,}027\\ -0{,}234 & 0{,}522 & -0{,}027 & -0{,}191\end{pmatrix},\quad \tilde{\mathbf{c}}=\tilde{A}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}=\begin{pmatrix}-0{,}4038\\ 0{,}5654\\ 0{,}1151\\ 0{,}7283\end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$\tilde{\sigma}^2=\mathsf{E}d_{11}^2=\frac{25}{3}\cdot10^{-6},\quad\|\tilde{A}^{-1}\|=1,\quad|\tilde{\mathbf{c}}|^2=1{,}0264$$

sowie wegen (18)

$$\tilde{K}=\begin{pmatrix}1{,}1735 & -2{,}0323 & -0{,}1873 & -0{,}7929\\ -2{,}0323 & 6{,}5929 & 0{,}7929 & 2{,}3017\\ -0{,}1873 & 0{,}7929 & 0{,}6847 & 0{,}9122\\ -0{,}7929 & 2{,}3017 & 0{,}9122 & 3{,}1173\end{pmatrix}\cdot10^{-6}.$$

Zur Anwendung von (20) benötigt man eine obere Schranke für $\mathsf{P}(\|z_{kn}-w_{kn}\|\geq\tilde{\varepsilon})$, wobei zunächst zum Zwecke der genaueren numerischen Auswertung die rechte Seite von (13) nicht mit Hilfe der Markoffschen Ungleichung, sondern wie folgt abgeschätzt wird (dabei sei die Gleichheit der Streuungen $\tilde{\sigma}^2_{jkn}=\tilde{\sigma}^2$, $j, k=1,\ldots,n$, vorausgesetzt):

Ausgehend von (14) erhält man für $\omega\in\Omega_{n,\tilde{g}}:=\{\omega:\|\tilde{A}_n^{-1}D_n\|<\tilde{g}\}$, $0<\tilde{g}<1$ die Ungleichung

$$\|\mathbf{z}_n-\mathbf{w}_n\|\leq\|\tilde{K}_n^{-1/2}\tilde{E}_n\tilde{A}_n^{-1}D_n\|\cdot\|(\tilde{I}_n+\tilde{A}_n^{-1}D_n)^{-1}\|\cdot\|\tilde{A}_n^{-1}D_n\tilde{\mathbf{c}}_n\|$$

$$\leq\frac{1}{1-\tilde{g}}\|\tilde{K}_n^{-1/2}\tilde{E}_n\tilde{A}_n^{-1}\|\,\|\tilde{A}_n^{-1}\|\,\|D_n\|^2\|\tilde{\mathbf{c}}_n\|$$

$$\leq\frac{1}{1-\tilde{g}}\|\tilde{K}_n^{-1/2}\tilde{E}_n\tilde{A}_n^{-1}\|\,\|\tilde{A}_n^{-1}\|\,N^2(D_n)\|\tilde{\mathbf{c}}_n\|.$$

Der Faktor $\|\tilde{K}_n^{-1/2}\tilde{E}_n\tilde{A}_n^{-1}\|$ läßt sich wegen (18) in folgender Weise abschätzen

$$\|\tilde{K}_n^{-1/2}\tilde{E}_n\tilde{A}_n^{-1}\|^2\leq(\tilde{K}_n^{-1/2}\tilde{E}_n\tilde{A}_n^{-1},\ \tilde{K}_n^{-1/2}\tilde{E}_n\tilde{A}_n^{-1})$$

$$=(\tilde{K}_n^{-1/2}\tilde{E}_n\tilde{A}_n^{-1}\tilde{A}_n^{T-1}\tilde{E}_n^T\tilde{K}_n^{-1/2},\tilde{I}_m)=m/\tilde{\sigma}^2\|\tilde{\mathbf{c}}_n\|^2.$$

Damit findet man für die rechte Seite von (13) folgende obere Schranke (im Fall gleicher Streuungen $\tilde{\sigma}^2_{jkn}$):

$$\text{(21)}\qquad \mathsf{P}(\|\mathbf{z}_n-\mathbf{w}_n\|\geq\tilde{\varepsilon})\leq\mathsf{P}(\bar{\Omega}_{n,\tilde{g}})+\mathsf{P}(\{\omega:\|\mathbf{z}_n-\mathbf{w}_n\|\geq\tilde{\varepsilon}\}\cap\Omega_{n,\tilde{g}})$$

$$\leq\mathsf{P}(\|\tilde{A}_n^{-1}D_n\|^2\geq\tilde{g}^2)+\mathsf{P}\Big(\frac{1}{1-\tilde{g}}\|\tilde{K}_n^{-1/2}\tilde{E}_n\tilde{A}_n^{-1}\|\,\|\tilde{A}_n^{-1}\|\,N^2(D_n)\,\|\tilde{\mathbf{c}}_n\|\geq\tilde{\varepsilon}\Big)$$

$$\leq\mathsf{P}(N^2(D_n)\,\|\tilde{A}_n^{-1}\|^2\geq\tilde{g}^2)+\mathsf{P}\Big(\frac{\sqrt{m}}{\tilde{\sigma}(1-\tilde{g})}\|\tilde{A}_n^{-1}\|\,N^2(D_n)\geq\tilde{\varepsilon}\Big)$$

$$=\mathsf{P}\left(\frac{N^2(D^n)}{\tilde{\sigma}^2}\geq\frac{\tilde{g}^2}{\tilde{\sigma}^2\|\tilde{A}_n^{-1}\|^2}\right)+\mathsf{P}\left(\frac{N^2(D_n)}{\tilde{\sigma}^2}\geq\frac{\tilde{\varepsilon}(1-\tilde{g})}{\tilde{\sigma}\sqrt{m}\|\tilde{A}_n^{-1}\|}\right).$$

B e m e r k u n g 7. Falls die d_{jkn} normalverteilt nach $N(0,\tilde{\sigma}^2)$ sind, so ist $N^2(D_n)\tilde{\sigma}^{-2}$ χ^2-verteilt mit n^2 Freiheitsgraden. Damit läßt sich die rechte Seite von (21) leicht berechnen.

Im Falle einer Rechteckverteilung der d_{jkn} auf einem Intervall $[-\tilde{a},\tilde{a}]$ ist $\tilde{\sigma}^2=\tilde{a}^2/3$ und es gilt $\mathsf{P}(N^2(D_n)\tilde{\sigma}^{-2}\geq 3n^2)=0$. Daher erhält man im betrachteten Beispiel für $m=1$, $\tilde{\varepsilon}_1=0{,}1414$, $\tilde{g}_1=0{,}02$: $\mathsf{P}(|z_k-w_k|\geq\tilde{\varepsilon}_1)=0$, $k=1,\ldots,4$.

Aus (20) ergibt sich zum Beispiel

$$\text{(22)}\qquad \mathsf{P}(\{|x_1-\tilde{c}_1|<3{,}1\,.\,10^{-3}=:\tilde{a}_1\}\cap\{|x_2-\tilde{c}_2|<7{,}3\,.\,10^{-1}=:\tilde{a}_2\}$$

$$\cap\{|x_3-\tilde{c}_3|<2{,}4\,.\,10^{-3}=:\tilde{a}_3\}\cap\{|x_4-\tilde{c}_4|<5{,}1\,.\,10^{-3}=:\tilde{a}_4\})$$

$$=1-\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{4}\{|x_k-\tilde{c}_k|\geq\tilde{a}_k\}\Big)\geq1-\sum_{k=1}^{4}\mathsf{P}(|x_k-\tilde{c}_k|\geq\tilde{a}_k)$$

$$\geqq 1-2 \sum_{k=1}^{4} (1-F_k(\frac{\widetilde{a}_k}{\sqrt{\widetilde{\gamma}_k}}-\widetilde{\varepsilon}_1)) \approx 1-2 \sum_{k=1}^{4} (1-\Phi(\frac{\widetilde{a}_k}{\sqrt{\widetilde{\gamma}_k}}-\widetilde{\varepsilon}_1))=0{,}974.$$

Eine wesentliche Verbesserung von Abschätzungen der Form (21) durch eine Variation von $\widetilde{\varepsilon}$ ist nicht zu erwarten, wohl aber für die Abschätzung der Verteilungsfunktion selbst (vgl. Formel (19)). Dies soll jedoch an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden. Es sei noch vermerkt, daß sich aus klassischen deterministischen Abschätzungen (vgl. insbesondere den Anhang 1 in [4]) ergibt, daß mit Sicherheit gilt:

$$|x_1-\widetilde{c}_1| \leqq 6{,}87 \,.\, 10^{-3}, \quad |x_2-\widetilde{c}_2| \leqq 14{,}59 \,.\, 10^{-3}, \tag{23}$$

$$|x_3-\widetilde{c}_3| \leqq 4{,}79 \,.\, 10^{-3}, \quad |x_4-\widetilde{c}_4| \leqq 9{,}25 \,.\, 10^{-3}.$$

Ein Vergleich von (22) und (23) zeigt, daß die Verwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Methoden bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen mit fehlerbehafteten Koeffizienten neue Erkenntnisse über das Verhalten des Lösungsvektors liefert.

LITERATUR

1. В. Л. Гирко. Случайные матрицы. Киев, 1975.
2. P. H. Müller, G. Richter. Zur asymptotischen Verteilung des Lösungsvektors bei zufälligen linearen algebraischen Gleichungssystemen. *Beiträge Numer. Math.*, **4**, 1975, 157—169.
3. F. Nake. Über die Anzahl der reellen Lösungen zufälliger Gleichungssysteme. Dissertation. Stuttgart, 1967.
4. K. Reinschke. Numerische Verfahren zur Analyse passiver linearer Netzwerke. Dissertation. Dresden, 1966.
5. K. Reinschke. Zuverlässigkeit von Systemen, Band 2. Berlin, 1973.
6. A. Renyi. Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit einem Anhang über Informationstheorie. Berlin, 1966.
7. G. Richter. Einige Anwendungen eines Matrizen-Skalarproduktes. *Wiss. Z. Hochsch. Verkehrsw. Dresden* (im Druck).
8. G. Richter. Untersuchung zufälliger Matrizen uuter besonderer Berücksichtigung linearer Gleichungssysteme mit zufälligen Koeffizienten. Dissertation. Dresden, 1974.

Sektion Mathematik,
Rechentechnik und Naturwissenschaften
der Hochschule für Verkehrswesen
8072 Dresden PSF 103

Eingegangen am 30. 9. 1977