Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПРИНЦИП ОТСУТСТВИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ И АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Р. Р. АХМЕРОВ, Н. Г. КАЗАКОВА, А. В. ПОКРОВСКИЙ

В статье предлагается подход к исследованию абсолютной устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. Предлагаемый подход в идейном плане совпадает с принципом отсутствия ограниченных решений в задаче об абсолютной устойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений, предложенным М. А. Красносельским и одним из авторов (1977). Наряду с описанием самого подхода, мы приводим три простейших эффективно проверяемых признака абсолютной устойчивости нулевого решения относительно некоторых семейств уравнений нейтрального типа. Сразу же отметим, что мы не стремились к максимальной общности, но хотели лишь продемонстрировать идей и методы.

1. Обозначения. Через R^N мы будем обозначать конечномерное евклидовое пространство с нормой $|\cdot|$; через $C[a, b]$ — пространство непрерывных на промежутке $[a, b]$ (a и b могут принимать, соответственно, значения „$-\infty$“ и „$+\infty$“) функций со значениями в R^N с равномерной нормой $\|x\|_{C[a, b]}=\sup\{|x(t)|:t\in[a,b]\}$; через $C^1[a, b]$ — подпространство $C[a, b]$ непрерывно дифференцируемых функций, снабженное нормой $\|x\|_{C^1}=\|x\|_C+\|x'\|_C$; через $L^2[a, b]$ — пространство измеримых суммируемых с квадратом на промежутке $[a, b]$ функций со значениями в R^N с нормой $\|x\|_{L^2[a, b]}=(\int_a^b|x(t)|^2dt)^{1/2}$; через C_h (соответственно, C_h^1, L_h^2) — пространство $C[-h, 0]$ (соответственно, $C^1[-h, 0]$, $L^2[-h, 0]$), здесь $h>0$; если $x\in C[a-h, b]$, то через $x_t (t\in[a, b])$ мы будем обозначать элемент из C_h, определяемый равенством $x_t(s)=x(t+s)\,(s\in[-h, 0])$; наконец, через $\mathfrak{A}$ мы будем обозначать множество операторов, действующих из $R^1\times C_h\times C_h$ в R^N.

2. Постановка задачи. Ниже мы, в основном, будем интересоваться не устойчивостью индивидуальных уравнений вида

$$x'(t)=f(t, x_t, x_t'); \; f\in\mathfrak{A}, \tag{1}$$

а „абсолютной устойчивостью“ нулевого состояния равновесия относительно семейства уравнений (1) с правыми частями из некоторого множества $\mathfrak{R}\subset\mathfrak{A}$. Дадим строгое определение. Через $\mathfrak{M}_\varphi$ обозначим совокупность решений всех уравнений

$$x'(t)=f(t, x_t, x_t'); \; t\geqq0, \; f\in\mathfrak{R}, \tag{2}$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$x_0=\varphi,$$

где φ удовлетворяет неравенству $|\varphi|_{C_h^1} \leq \varrho$ и условию склейки

$$\varphi'_-(0) = f(0, \varphi, \varphi'). \tag{3}$$

Определение 1. *Нулевое состояние равновесия называется абсолютно устойчивым относительно семейства $\mathfrak{R}$, если при каждом $\varrho > 0$ любое решение из $\mathfrak{M}_\varrho$ нелокально продолжимо и выполнено соотношение*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x \in \mathfrak{M}_\varrho} \{|x(t)| + |x'(t)|\} = 0. \tag{4}$$

В дальнейшем нам будем удобно вместо (4) использовать эквивалентное ему соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x \in \mathfrak{M}_\varrho} \|x_t\|_{C_h^1} = 0.$$

Понятие абсолютной устойчивости хорошо изучено для семейств обыкновенных дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, уравнений с запаздывающим аргументом и т. д.; при этом использовались различные определения абсолютной устойчивости (см., напр., библиографию в [4—6]). Определение 1 — это аналог одного из наиболее употребительных определений.

3. Принцип отсутствия ограниченных решений в C^1 — нормальных семействах. Для исследования абсолютной устойчивости были развиты различные методы, самым распространенным из которых является второй метод Ляпунова. По-видимому, удовлетворительный перенос этого метода на уравнения нейтрального типа затруднителен (см. по этому поводу, напр., [3]). Здесь мы применим для исследования абсолютной устойчивости принцип отсутствия ограниченных решений (см. [1; 2]). Этот принцип в нашем случае можно было бы (несколько огрубляя ситуацию) сформулировать так: для некоторых классов $\mathfrak{R}$ вопрос об абсолютной устойчивости эквивалентен вопросу об отсутствии у всех уравнений (2) нетривиальных, ограниченных на всей оси решений. Формулировать этот принцип и условия его применимости (так же как и в [1]) удобно не в терминах правых частей исследуемых уравнений, но в терминах множества решений этих уравнений. В связи с этим введем следующие обозначения: пусть $\mathfrak{N}$ — некоторая совокупность непрерывно дифференцируемых функций, каждая из которых определена на промежутке вида $[a, \infty)$; пусть $\mathfrak{N}_0$ — подмножество $\mathfrak{N}$, состоящее из функций, область определения которых содержит отрезок $[-h, 0]$

Определение 2. *Назовем ноль C^1 — абсолютно устойчивым относительно $\mathfrak{N}$, если при любом $\varrho > 0$ выполнено равенство*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x \in \mathfrak{N}_0,\ \|x_0\|_{C_h^1} \leq \varrho} \{\|x_t\|_{C_h^1}\} = 0. \tag{5}$$

Очевидно, абсолютная устойчивость нулевого состояния равновесия относительно семейства $\mathfrak{R}$ эквивалентна C^1 — абсолютной устойчивости нуля относительно семейства $\mathfrak{N}$, если в качестве $\mathfrak{N}$ выбрана совокупность всевозможных решений уравнения (2), определенных на промежутках вида $[a, \infty]$.

Опишем теперь один из классов семейств $\mathfrak{N}$, для которых справедлив принцип отсутствия ограниченных решений. Топологию (на множестве всех непрерывно дифференцируемых функций) равномерной сходимости вместе с производными на каждом компактном промежутке будем называть WC^1 — топологией.

Определение 3. *Семейство $\mathfrak{N}$ назовем C^1 — нормальным, если оно обладает следующими четырьмя свойствами:*

(P1) *Если $x \in \mathfrak{N}$, $\alpha \in (0, 1]$ и $\tau \in R^1$, то функция y, определяемая равенством $y(t) = \alpha x(t+\tau)$, также принадлежит $\mathfrak{N}$.*

(P2) *Существует такая непрерывная функция η, определенная на $[0, \infty)$, что из включения $x \in \mathfrak{N}_0$ и неравенства $\| x_0 \|_{C_h^1} \leqq 1$ вытекает неравенство $\| x_t \|_{C_h^1} \leqq \eta(t)$ при $t \geqq 0$.*

(P3) *Если $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{N}_0$ — ограниченное в $C^1[-h, \infty)$ множество и $\tau_n \to \infty$, то множество $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$, где $y^n(t) = x^n(t+\tau_n)$, относительно компактно в WC^1 — топологии.*

(P4) *Если $x \in \mathfrak{N}_0$ и $\| x_0 \|_{C_h^1} \leqq 1$, то существует функция $y \in \mathfrak{N}_0$ такая, что $x_0 = y_0$ и $\| y \|_{C^1[-h, \infty)} \leqq k$, где k — некоторая универсальная постоянная.*

Теорема 1. *Пусть семейство $\mathfrak{N}$ является C^1 — нормальным. Тогда нуль C^1 — абсолютно устойчив относительно семейства $\mathfrak{N}$, если и только если замыкание семейства $\mathfrak{N}$ в WC^1 — топологии не содержит ненулевых элементов из $C^1(-\infty, \infty)$.*

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству подобного утверждения в [1], однако, для полноты изложения, мы проведем полное доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть в замыкании $\overline{\mathfrak{N}}$ семейства $\mathfrak{N}$ в WC^1 — топологии есть ненулевая функция $x^0 \in C^1(-\infty, \infty)$. Покажем, что соотношение (5) не имеет место. Так как функция x^0 ненулевая, то существует число t_0 такое, что

$$\| x^0_{t_0} \|_{C_h^1} = \varepsilon_0 > 0. \tag{6}$$

Положим $x^n(t) = x^0(t + t_0 - n)$. Очевидно,

$$\| x^n_n \|_{C_h^1} = \varepsilon_0. \tag{7}$$

Далее, в силу условия (P1), функции x^n также принадлежат $\overline{\mathfrak{N}}$ Поэтому найдутся функции $y^n \in \mathfrak{N}_0$ такие, что

$$\| x^n - y^n \|_{C^1[-h, n]} \leqq \varepsilon_0/2. \tag{8}$$

Из (7) и (8) нетрудно получить, что

$$\sup_{x \in \mathfrak{N}_0, \| x_0 \|_{C_h^1} \leqq \varrho_0} \{\| x_n \|_{C_h^1}\} \geqq \| y^n_n \|_{C_h^1} \geqq \varepsilon_0/2.$$

Последнее соотношение противоречит равенству (5). Необходимость доказана.

Перейдем к доказательству достаточности. Предположим, что ноль не является C^1 — абсолютно устойчивым относительно семейства $\mathfrak{N}$. Это означает наличие таких чисел ϱ_0, $\varepsilon_0 > 0$ и последовательностей $x^n \in \mathfrak{N}_0$, $t_n \in R^1$, что $\| x^n_0 \|_{C_h^1} \leqq \varrho_0$, $t_n \to \infty$ и

$$\| x^n_{t_n} \|_{C^1_h} \geq \varepsilon_0. \tag{9}$$

Достаточность будет доказана, если мы, пользуясь C^1 — нормальностью семейства $\mathfrak{N}$, по последовательности x^n сконструируем ненулевую функцию $x^0 \in \overline{\mathfrak{N}} \cap C^1(-\infty, \infty)$.

Рассмотрим два случая. Пусть сначала,

$$\| x^n \|_{C^1[-h, \infty)} \leq M < \infty. \tag{10}$$

Положим $y^n(t) = x^n(t+t_n)$. Эти функции в силу (P1) принадлежат $\mathfrak{N}$. В силу же (P3) множество $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$ компактно в WC^1 — топологии. Пусть x^0 — некоторый предельный (в смысле этой топологии) элемент множества $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$. Нетрудно показать, что $x^0 \in \overline{\mathfrak{N}} \cap C^1(-\infty, \infty)$, $x^0(t) \not\equiv 0$.

Перейдем ко второму случаю. Если соотношение (10) не выполнено, то, очевидно, можно указать последовательности n_k и τ_k такие, что $\| x^{n_k}_{\tau_k} \|_{C^1_h} = \alpha_k \to \infty$ и

$$\| x^{n_k}_{\tau_k} \|_{C^1_h} \geq \| x^{n_k}_t \|_{C^1_h} \quad \text{при всех} \quad t \leq \tau_k. \tag{11}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_k \geq 1$. Поэтому функции z^k, определяемые равенствами

$$z^k(t) = \alpha_k^{-1} x^{n_k}(t),$$

принадлежат $\mathfrak{N}_0$ и $\| z^k_{\tau_k} \|_{C^1_h} = 1$.

Кроме того, из (P2) следует, что $\tau_k \to \infty$. В силу (11), (P1) и (P4) в $\mathfrak{N}_0$ найдутся функции w^k, совпадающие на $[-h, \tau_k]$ с z^k и удовлетворяющие оценке $\| w^k \|_{C^1[-h, \infty)} \leq k$.

Для построения ненулевой функции $x^0 \in \overline{\mathfrak{N}} \cap C^1(-\infty, \infty)$ достаточно теперь применить процедуру, описанную при разборе первого случая, заменив x^n на w^n, t_n на τ_n. Теорема доказана.

4. C^1 — нормальные семейства, связанные с уравнениями нейтрального типа. Значение теоремы 1 определяется тем, что свойством C^1 — нормальности обладают совокупности всевозможных решений уравнений (2) для многих интересных с точки зрения приложений семейств $\mathfrak{N}$ правых частей соответствующих уравнений. В этой статье мы рассмотрим три простейших иллюстративных примера.

Пусть A — гурвицева $N \times N$ — матрица. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{a}}$ совокупность всевозможных операторов $\tilde{f} \in \mathfrak{a}$, представимых в виде

$$\tilde{f}(t, u, v) = Au(0) + f(t, u, v), \tag{12}$$

где $f \in \mathfrak{a}$ удовлетворяет условию Липшица

$$| f(t_1, u^1, v^1) - f(t_2, u^2, v^2) | \leq \gamma_1 (\| u^1 \|_{C_h} + \| v^1 \|_{C_h}) |t_1 - t_2| + \gamma_2 \| u^1 - u^2 \|_{C_h} + \gamma_3 \| v^1 - v^2 \|_{C_h} \tag{13}$$

с некоторыми универсальными константами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, причем $\gamma_3 < 1$.

Через $\mathfrak{R}_1(\alpha, \beta)$ обозначим множество операторов $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{A}}$, оператор f в представлении (12) которых удовлетворяет условию

$$|f(t, u, v)| \leqq \alpha \| u \|_{C_h} + \beta \| v \|_{C_h}, \beta < 1. \tag{14}$$

Через $\mathfrak{R}_2(\alpha, \beta)$ — множество операторов $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{A}}$, оператор f в представлении (12) которых имеет вид

$$f(t, u, v) = g(t, u(-h), v(-h)), \tag{15}$$

где g: $R^1 \times R^N \times R^N \to R^N$ удовлетворяет условию

$$|g(t, u, v)|^2 \leqq \alpha |u|^2 + \beta |v|^2. \tag{16}$$

Наконец, через $\mathfrak{R}_3(\alpha, \beta)$ обозначим множество операторов $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{A}}$, оператор f в представлении (12) которых удовлетворят условию

$$|f(t, u, v)|^2 \leqq \alpha \| u \|^2_{L^2_h} + \beta \| v \|^2_{L^2_h}.$$

Из результатов работы [11] вытекает, что при любых $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{A}}$, $t_0 \in R^1$ и любой начальной функций $\varphi \in C^1[t_0 - h, t_0]$, удовлетворяющей условию склейки

$$\varphi'_-(t_0) = \tilde{f}(t_0, \varphi_{t_0}, \varphi'_{t_0}),$$

решение задачи Коши

$$x'(t) = \tilde{f}(t, x_t, x'_t), \tag{17}$$

$$x_{t_0} = \varphi_{t_0} \tag{18}$$

определено и единственно на $[t_0 - h, \infty)$.

Через $\mathfrak{N}_i(\alpha, \beta)$, $i = 1, 2, 3$, обозначим совокупность всевозможных решений уравнений вида

$$x'(t) = \tilde{f}(t, x_t, x'_t), \quad \tilde{f} \in \mathfrak{R}_i(\alpha, \beta),$$

определенных на промежутках вида $[a, \infty)$.

Теорема 2. *Множества $\mathfrak{N}_i(\alpha, \beta)$, $i = 1, 2, 3$, являются C^1 — нормальными семействами функций.*

Доказательство. Мы докажем теорему лишь при $i = 1$. Доказательства при $i = 2, 3$ аналогичны. Проверка условия (P1) тривиальна. Свойство (P2) очевидным образом вытекает из результатов работы [7]. Пояснений требует проверка свойства (P3). Для этого нужна следующая

Лемма 1. *Пусть $\tilde{f} \in \mathfrak{A}$, x — решение задачи* (17) — (18) *на* $[t_0 - h, \infty)$ *и* $\| x \|_{C^1[t_0 - h, \infty)} \leqq M$. *Тогда при* $t \in [t_0 + nh, \infty)$ *и* $\tau \geqq 0$ *имеет место оценка*

$$|x'(t) - x'(t+\tau)| \leqq \frac{(\| A \| + \gamma_1 + \gamma_2)M}{1 - \gamma_3} \tau + 2\gamma_3^{n+1} M.$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из оценки

$$\begin{aligned} |x'(t) - x'(t+\tau)| &\leqq (\| A \| + \gamma_1 + \gamma_2) M (1 + \gamma_3 + \gamma_3^2 + \cdots + \gamma_3^n)\tau \\ &+ \gamma_3^{n+1} \max \{ |x'(t+s) - x'(t+\tau+s)| : s \in [-h(n+1), 0] \}, \end{aligned} \tag{19}$$

$t \in [t_0 + nh, \infty)$, $\tau \geqq 0$, справедливость которой легко проверяется по индукции.

Замечание. Утверждение леммы 1, по существу, означает, что оператор сдвига [8] по траекториям уравнения (17) за достаточно большое время уменьшает меру некомпактности [9; 10] каждого ограниченного множества.

Перейдем непосредственно к проверке свойства (Р3). Пусть $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{N}_1(\alpha, \beta)$, $\| x^n \|_{C^1[-, h, \infty)} \leq M$, $\tau_n \to \infty$ и $y^n(t) = x^n(t+\tau_n)$. Очевидно, достаточно установить равностепенную непрерывность множества $\{(y^n)'\}_{n=n_0}^{\infty}$ на каждом конечном промежутке $[a, b]$ при достаточно больших n_0. Выберем натуральное число n_1 так, чтобы все функции y^n при $n \geq n_1$ были определены на $[a, b]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $n_0 \geq n_1$ и $\delta > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\tau_n + (n_0 - 1)h < a, \quad \frac{(\| A \| + \gamma_1 + \gamma_2)M}{1 - \gamma_3} \delta + 2\gamma_3^{n_0+1} M < \varepsilon.$$

Поэтому в силу леммы 1 при $n \geq n_0$ из неравенства $|t_1 - t_2| < \delta$, $t_1, t_2 \in [a, b]$, следует неравенство

$$|(y^n)'(t_1) - (y^n)'(t_2)| < \varepsilon. \tag{20}$$

Равностепенная непрерывность множества $\{(y^n)'\}_{n=n_0}^{\infty}$ на промежутке $[a, b]$ легко следует из (20). Свойство (Р3) проверено.

Остается проверить справедливость свойства (Р4). Пусть $x \in \mathfrak{N}_1(\alpha, \beta)$ определена на $[-h, \infty)$ и $\| x_0 \|_{C_h^1} \leq 1$. По определению множества $\mathfrak{N}_1(\alpha, \beta)$ эта функция удовлетворяет уравнению

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x_t, x_t'); \; t \geq 0, \; A + f \in \mathfrak{N}_1(\alpha, \beta).$$

Здесь и в дальнейшем мы используем формально нестрогое обозначение $A+f$ для обозначения оператора $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{A}}$, определяемого формулой (12). Определим оператор $g \in \mathfrak{A}$ формулой

$$g(t, u, v) = \begin{cases} f(t, u, v), & \text{если } t < 0, \\ w(t) f(0, u, v), & \text{если } 0 \leq t \leq a, \\ 0, & \text{если } t > a. \end{cases}$$

Здесь $w(t) = 1 - \gamma_1(\alpha+\beta)^{-1} t$, $a = (\alpha+\beta)\gamma_1^{-1}$. Очевидно, $A + g \in \mathfrak{N}_1(\alpha, \beta)$. Пусть y — решение задачи

$$y'(t) = Ay(t) + g(t, y_t, y_t'); \; t \geq 0, \; y_0 = x_0.$$

В силу (Р2) функция y удовлетворяет оценке $\| y_t \|_{C_h^1} \leq \eta(t)$ при $t \in [0, a]$. Свойство (Р4) очевидным образом вытекает теперь из гурвицевости матрицы A и определения оператора g. Теорема доказана.

5. Признаки абсолютной устойчивости. В силу теорем 1 и 2 для того, чтобы проверить абсолютную устойчивость нулевого состояния равновесия относительно семейства $\mathfrak{N}_i(\alpha, \beta)$ необходимо и достаточно доказать, что замыкание семейства $\mathfrak{N}_i(\alpha, \beta)$ в WC^1 — топологии не содержит ненулевых элементов из $C^1(-\infty, \infty)$.

Сначала мы исследуем вопрос об абсолютной устойчивости нулевого состояния равновесия относительно семейства $\mathfrak{N}_1(\alpha, \beta)$. Для этого нам понадобится следующее проясняющее структуру замыкания множества $\mathfrak{N}_1(\alpha, \beta)$ в WC^1 — топологии вспомагательное утверждение.

Пусть $\widetilde{\mathfrak{N}}_1(\alpha, \beta)$ — совокупность операторов $\widetilde{f} \in \mathfrak{A}$, представимых в виде (12), причем оператор f удовлетворяет условию (14), условиям Липшица по второму и третьему аргументам с константами γ_2 и γ_3, соответственно, и непрерывен по совокупности переменных.

Лемма 2. *Пусть x^0 — принадлежит замыканию множества $\mathfrak{N}_1(\alpha, \beta)$ в WC^1 — топологии. Тогда функция x^0 является решением некоторого уравнения*

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x_t, x'_t), \quad A + f \in \widetilde{\mathfrak{N}}_1(\alpha, \beta).$$

Для доказательства достаточно определить оператор f равенством

$$f(t, u, v) = \begin{cases} \dfrac{\alpha \| u \|_{C_h} + \beta \| v \|_{C_h}}{\alpha \| x_t^0 \|_{C_h} + \beta \| (x_0)'_t \|_{C_h}} [(x^0)'(t) - Ax^0(t)], & \text{если } \| x_t^0 \|_{C_h} > 0, \\ 0, & \text{если } \| x_t^0 \|_{C_h} = 0. \end{cases}$$

Теперь мы можем доказать признак абсолютной устойчивости нулевого решения относительно семейства $\mathfrak{N}_1(\alpha, \beta)$.

Через $G(s)$, $s \geqq 0$, обозначим функцию Грина задачи об ограниченных решениях уравнения $x'(t) - Ax(t) = \psi(t)$.

Теорема 3. *Пусть $\alpha \int\limits_0^\infty \| G(s) \| ds + \beta \int\limits_0^\infty \| G'(s) \| ds < 1$. Тогда нулевое состояние равновесия является абсолютно устойчививым относительно семейства $\mathfrak{N}_1(\alpha, \beta)$.*

Доказательство. В силу теоремы 2 семейство $\mathfrak{N}_1(\alpha, \beta)$ является C^1 — нормальным. Поэтому в силу теоремы 1 достаточно проверить, что замыкание $\overline{\mathfrak{N}}_1(\alpha, \beta)$ множества $\mathfrak{N}_1(\alpha, \beta)$ в WC^1-топологии не содержит ненулевых элементов из $C^1(-\infty, \infty)$. Пусть $x^0 \in \overline{\mathfrak{N}}_1(\alpha, \beta) \cap C^1(-\infty, \infty)$ и $x^0(t) \not\equiv 0$. Тогда в силу леммы 2 x^0 является решением некоторого уравнения

$$(x^0)'(t) = Ax^0(t) + f(t, x_t^0, (x^0)'_t), \tag{21}$$

где $A + f \in \widetilde{\mathfrak{N}}(\alpha, \beta)$. Равенство (21) означает, что

$$x^0(t) = \int\limits_0^\infty G(t-s) f(s, x_s^0, (x^0)'_s) ds.$$

Введем в пространстве $C^1(-\infty, \infty)$ норму $\| x \|_* = \alpha \| x \|_C + \beta \| x' \|_C$ и оценим $\| x^0 \|_*$:

$$\| x_0 \|_* \leqq [\alpha \int\limits_0^\infty \| G(s) \| ds + \beta \int\limits_0^\infty \| G'(s) \| ds] \cdot \| x^0 \|_*. \tag{22}$$

Из условий теоремы и (22) следует равенство x^0 нулю. Полученное противоречие доказывает теорему.

Перейдем к исследованию абсолютной устойчивости относительно семейства $\mathfrak{N}_2(\alpha, b)$. В данной ситуации имеет место аналог леммы 2 в следующей формулировке. Пусть $\widetilde{\mathfrak{N}}_2(\alpha, \beta)$ — множество операторов $\widetilde{f} \in \mathfrak{A}$, оператор

f в представлении (12) которых имеет вид (15), а $g: R^1 \times R^N \times R^N \to R^N$ непрерывен и удовлетворяет условию (16).

Лемма 3. *Пусть x^0 принадлежит замыканию множества $\mathfrak{N}_2(\alpha, \beta)$ в WC^1 — топологии. Тогда x^0 является решением некоторого уравнения вида*

$$x'(t) = Ax(t) + g(t, x(t-h), x'(t-h)), \ A + g \in \mathfrak{N}_2 \ (\alpha, \ \beta).$$

Теорема 4. *Пусть имеет место неравенство*

$$\sup_{-\infty<\omega<\infty} \|(i\omega I - A)^{-1}\| (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}(\|A\| + \sqrt{\alpha})/(1 - \sqrt{\beta})) < 1. \tag{23}$$

Тогда ноль абсолютно устойчив относительно семейства $\mathfrak{N}_2(\alpha, \beta)$.

Доказательство. Семейство $\mathfrak{N}_2(\alpha, \beta)$ в силу теоремы 2 является C^1-нормальным. Поэтому достаточно доказать, что замыкание $\overline{\mathfrak{N}}_2(\alpha, \beta)$ множества $\mathfrak{N}_2(\alpha, \beta)$ в WC^1-топологии не содержит ненулевых элементов из $C^1(-\infty, \infty)$. Допустим противное: пусть $x^0 \in \overline{\mathfrak{N}}_2(\alpha, \beta) \cap C^1(-\infty, \infty)$ и $x^0(t) \not\equiv 0$. В силу леммы 3 x^0 удовлетворяет уравнению

$$(x^0)'(t) = Ax^0(t) + g(t, x^0(t-h), (x^0)'(t-h)),$$

причем g удовлетворяет условию (16). Далее, без ограничения общности можно считать (см. доказательство свойства (P4) в теореме 2), что $\|x_t\|_{C_h^1} \leq e^{-\varepsilon_0 t}$ при $t \geq 0$, $\varepsilon_0 > 0$.

Определим функцию y^0 равенством $y^0(t) = e^{\varepsilon t} x^0(t)$; здесь ε — параметр, точное значение которого мы выберем позже; пока же мы будем считать только, что $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Поэтому функция y^0 и ее производная интегруемы с квадратом на всей оси. Непосредственным подсчетом проверяется, что функция y^0 удовлетворяет уравнению

$$(y^0)'(t) = (A + \varepsilon I) y^0(t) + g_1(t, y^0(t-h), (y^0)'(t-h)), \tag{24}$$

где

$$g_1(t, u, v) = e^{\varepsilon t} g(t, e^{-\varepsilon(t-h)} u, e^{-\varepsilon(t-h)} (v - \varepsilon u)).$$

Очевидно, $|g_1(t, u, v)|^2 \leq \alpha_\varepsilon |u|^2 + \beta_\varepsilon |v - \varepsilon u|^2$, где $\alpha_\varepsilon = e^{2\varepsilon h}\alpha$, $\beta_\varepsilon = e^{2\varepsilon h}\beta$. Учитывая, что $y^0, (y^0)' \in L^2(-\infty, \infty)$, из (24) легко получить, что

$$\|(y^0)'\|_{L^2} \leq (\|A + \varepsilon I\| + \sqrt{\alpha_\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon \beta_\varepsilon}) \|y^0\|_{L^2} + \sqrt{\beta_\varepsilon} \|(y^0)'\|_{L^2}$$

(здесь и всюду ниже под L^2 подразумевается $L^2(-\infty, \infty)$). Поскольку $\beta_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \beta < 1$, то при малых ε отсюда следует оценка

$$\|(y^0)'\|_{L^2} \leq (1 - \sqrt{\beta_\varepsilon})^{-1} (\|A + \varepsilon I\| + \sqrt{\alpha_\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon \beta_\varepsilon}) \|y^0\|_{L^2}. \tag{25}$$

Пусть теперь Y — образ (на мнимой оси) функции y^0 при применении преобразования Лапласа, а G — образ функции $t \to g_1(t, y^0(t-h), (y^0)'(t-h))$ (возможность применения преобразования Лапласа очевидна). Применив к обеим частям равенства (24) преобразование Лапласа, получим $i\omega Y(\omega) = (A + \varepsilon I) Y(\omega) + G(\omega)$, или (при малых ε): $Y(\omega) = (i\omega I - A - \varepsilon I)^{-1} G(\omega)$.

Поэтому

$$\|Y\|_{L^2} \leq \sup_{-\infty<\omega<\infty} \|(i\omega I - A - \varepsilon I)^{-1}\| \|G\|_{L^2}. \tag{26}$$

Так как преобразование Лапласа в L^2 является изометрией, то из (25) и (26) после несложных преобразований получим

$$\|y^0\|_{L^2} \leq \sup_{-\infty<\omega<\infty} \|(i\omega I - A - \varepsilon I)^{-1}\| \tag{27}$$

$$\times[\sqrt{\alpha_\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon\beta_\varepsilon}+\sqrt{\beta_\varepsilon}(1-\sqrt{\beta_\varepsilon})^{-1}(\|A+\varepsilon I\|+\sqrt{\alpha_\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon\beta_\varepsilon})]\|y^0\|_{L^2}.$$

В силу (23) коэффициент, стоящий перед $\|y^0\|_{L^2}$ в правой части оценки (27) при достаточно малых ε будет меньшим единицы. Поэтому из оценки вытекает равенство y^0 нулю. Но вместе с y^0 равна нулю и x^0. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следующая теорема об абсолютной устойчивости относительно семейства $\mathfrak{R}_3(\alpha, \beta)$ доказывается почти так же, как теорема 4.

Теорема 5. *Пусть выполнена оценка*

$$\sup_{-\infty<\omega<\infty} \|(i\omega I - A)^{-1}\|(\sqrt{\alpha h}+\sqrt{\beta h}(\|A\|+\sqrt{\alpha h})/(1-\sqrt{\beta h}))<1.$$

Тогда нулевое состояние равновесия абсолютно устойчиво относительно семейства $\mathfrak{R}_3(\alpha, \beta)$.

Авторы благодарны М. А. Красносельскому и Б. Н. Садовскому за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Красносельский, А. В. Покровский. Принцип отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости. *Доклады АН СССР*, **233**, 1977, 293—296.
2. М. А. Красносельский, А. В. Покровский. Об абсолютной устойчивости систем с дискретным временим. *Автоматика и телемеханика*, 1978, № 2, 42—52.
3. А. Ф. Мисник. Абсолютная устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования нейтрального типа. *Тр. семинара по теор. дифф. уравн. с отклоняющимся аргументом, Унив. дружбы народов им. П. Лумумбы*, **4**, 1969, 92—106.
4. В. М. Попов. Гиперустойчивость автоматических систем. Москва, 1970.
5. Е. С. Пятницкий. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования. *Автоматика и телемеханика*, 1968, № 6, 5—36.
6. С. Cordineanu. Integral equations and stability of feedback systems. New York — London, 1973.
7. А. Е. Родкина, Б. Н. Садовский. К принципу связности Красносельского — Перова. *Тр. мат. фак. Воронежского гос. унив.*, 1971, вып. 4, 89—103.
8. Б. Н. Садовский. Применение топологических методов в теории периодических решений нелинейных дифференциально-операторных уравнений нейтрального типа. *Доклады АН СССР*, **200**, 1971, 1037—1041.
9. Б. Н. Садовский. О мерах некомпактности и уплотняющих операторах. *Проблемы мат. анализа сложных систем, Воронеж*, 1968, вып. 2, 89—119.
10. Б. Н. Садовский. Предельно компактные и уплотняющие операторы. *Успехи мат. наук.*, **27**, 1972, № 1, 81—146.
11. Е. М. Непомнящая, Б. Н. Садовский. О методе последовательных приближений для дифференциальных уравнений нейтрального типа. *Тр. мат. фак. Воронежского гос. унив.*, 1972, вып. 6, 59—68.

Воронежский государственный университет
Математический факультет
394633 Воронеж

Пловдивский университет, 4000 Пловдив

Институт проблем управления АН СССР
Москва

Поступила 19. 10. 1977;
в переработанном виде 15. 2. 1978