# Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

# Сердика

Българско математическо списание

# SUR LA DISTRIBUTION DE LA MESURE DANS LA THEORIE METRIQUE DES FRACTIONS CONTINUES

PETAR P. ŠOPOV

Soit $\alpha$ un nombre réel et $\alpha=[a_0; a_1, a_2, \dots]$ son développement en fraction continue. Désignons par $p_n/q_n$ ses fractions approchées. Dans le présent travail on obtient une estimation inférieure de la mesure de l'ensemble des points de l'intervalle (0, 1) pour lesquels on a $a_{i+1}/q_i \leqq M$, $i=0, 1, 2, \dots$, où $M \geqq 1$. En outre, la mesure de l'ensemble des points de l'intervalle (0,1) pour lesquels on a $a_{i+1}/q_i \geqq M$, $i=0, 1, 2, \dots$, où $M>0$ est égale à zéro.

**1. Remarques préliminaires.** Soit $\alpha$ un nombre irrationel de l'intervalle (0, 1) et $\alpha=[0; a_1, a_2, \dots]$ son développement en fraction continue. Soit $q_n$, $n=0, 1, 2, \dots$, le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ fraction approchée de $\alpha$.

Dans un travail antérieur [4] nous avons obtenu une estimation supérieure de la mesure de l'ensemble de points de l'intervalle (0, 1) pour lesquels on a $a_{i+1}/q_i \leqq M$, $i=0, 1, 2, \dots$ Si cet ensemble est noté par $E[a_{i+1}/q_i \leqq M]$ et sa mesure par $mE[a_{i+1}/q_i \leqq M]$, on a

$$mE[a_{i+1}/q_i \leqq M] \leqq (1-1/([M]+1))F(M)$$

$$\text{où } F(M)=\Pi_{i=1}^{\infty}(1-1/3(M(M+1)^{2^i-1}+1),\ M \geqq 1.$$

La fonction $F(M)$ possède les propriétés suivantes:

1°. $F(M)<1$ pour tout $M \geqq 1$,

2°. $F(M_1)<F(M_2)$, si l'on a $M_1<M_2$,

3°. $F(M) \to 1$, si $M \to \infty$.

De même, nous avons obtenu $mE[a_{i+1}/q_i \leqq M] \to 1$ quand $M \to \infty$ [4].

Dans le présent travail nous nous proposons de trouver une estimation inférieure de la mesure $mE[a_{i+1}/q_i \leqq M]$, $i=0, 1, 2, \dots$

On s'occupera également de la mesure de l'ensemble de points de l'intervalle (0, 1) pour lesquels on a $a_{i+1}/q_i \geqq M$, $i=0, 1, 2, \dots$, $M>0$. On obtient $mE[a_{i+1}/q_i \geqq M]=0$, alors que $mE[a_{i+1}/q_i \leqq M] \neq 0$, $i=0, 1, 2, \dots$

**2. Estimation inférieure pour $mE[a_{i+1}/q_i \leqq M]$.** L'ensemble de tous les nombres réels de l'intervalle (0, 1) pour lesquels les éléments $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont fixés alors que tous les autres $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ varient (en prenant toutes les valeurs possibles) est un intervalle [1, p. 68], désigné par $I_n$, $n=1, 2, \dots$ et s'appelle intervalle de rang $n$.

D'après le schéma de la méthode, il faut tout d'abord déterminer les intervalles $I_n$ de rang $n$ pour lesquels on a

$$a_{i+1} \leqq Mq_i, \quad i=0, 1, 2, \dots, n-1. \tag{1}$$

Le système (1) a un nombre infini de solutions dans le cas où $M \geqq 1$. Il est évident que $n \geqq 1$ parce que la valeur minimale de l'index $i$ est égale à 0.

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 4, 1978, p. 99—104.

En d'autres termes, on exclut les intervalles $I_n$ de rang 0, c.-à.-d. l'intervalle (0, 1).

Les points de l'intervalle $I_n$ vérifiant la condition supplémentaire $a_{n+1}=k$ constituent un intervalle de rang $n+1$, qu'on désignera par $I_{n+1}^{(k)}$. Si nous notons $mI_n$ et $mI_{n+1}^{(k)}$ les mesures des intervalles $I_n$ et $I_{n+1}^{(k)}$, il existe l'inégalité suivante [1, p. 71]

$$mI_{n+1}^{(k)}<2mI_n/k^2, \quad n=1,\ 2, \ldots$$

La fonction $q_n=q_n(\alpha)$ est constante dans tout intervalle $I_n$ de rang $n$. En effet, $q_n=q_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est un polynôme de $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_0=0$ et $a_1, \ldots, a_n$ sont constantes dans tout intervalle $I_n$ de rang $n$. Ensuite on a

$$m\sum_{k>Mq_n} I_{n+1}^{(k)}<2mI_n\sum_{k>Mq_n} 1/k^2<2mI_n\sum_{i=0}^{\infty} 1/(Mq_n+i)^2$$

$$<2mI_n\left\{1/Mq_n+\int_{Mq_n}^{\infty} dn/n^2\right\}=4mI_n/Mq_n, \qquad n=1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Alors, on a

(2) $$m\sum_{k\leq Mq_n} I_{n+1}^{(k)}>mI_n-4mI_n/Mq_n=mI_n(1-4/Mq_n).$$

Mais, d'autre part, [1, p. 20]

(3) $$q_n\geq 2^{(n-1)/2}, \quad n=1,\ 2,\ 3, \ldots$$

En vue de (2) et (3) on a pour tout intervalle $I_n$ de rang $n$ pour leque les inégalités (1) sont vérifiées,

(4) $$m\sum_{k\leq Mq_n} I_{n+1}^{(k)}>mI_n(1-4/M2^{(n-1)/2}), \quad n=1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Comme $1-4/M2^{(n-1)/2}>0$, si l'on veut que la dernière inégalité soit vérifiée pour tout $n\geq 1$, il faut et il suffit que $M>4$. Si l'on veut que la même inégalité soit vérifiée pour tout $M\geq 1$ il faut et il suffit qu'on ait $n\geq 6$. Dans la suite on supposera qu'on a toujours $n\geqq 6$.

Désignons par $E_M^{(n)}$ l'ensemble des nombres de l'intervalle (0, 1) caractérisés par l'inégalité (1). Evidemment $E_M^{(n)}$ est la somme des intervalles $I_n$ de rang $n$ pour lesquels les inégalités (1) sont satisfaites. Comme tout intervalle $I_n$ de rang $n$, qui n'appartient pas à l'ensemble $E_M^{(n)}$, ne contient aucun point de l'ensemble $E_M^{(n+1)}$, on obtiendra, après avoir fait la somme de l'inégalité (4) en suivant tous les intervalles $I_n$ de rang $n$ contenus dans $E_M^{(n)}$

(5) $$mE_M^{(n+1)}>(1-4/M2^{(n-1/2)})mE_M^{(n)}, \quad n\geq 6.$$

En appliquant successivement cette inégalité, on obtiendra

$$mE_M^{(n+1)}>mE_M^{(6)}\prod_{i=6}^{n}(1-4/M2^{(i-1)/2}),$$

d'où, quand $n\to\infty$ on obtient

(6) $$\lim_{n\to\infty} (mE_M^{(n+1)}) \geqq mE_M^{(6)} \prod_{i=6}^{\infty} (1-4/M2^{(i-1)/2}).$$

Posons $E_M = E[a_{i+1}/q_i \leqq M]$ — l'ensemble des nombres de l'intervalle $(0, 1)$ pour lesquels $a_{i+1} \leqq Mq_i$, $i=0, 1, 2, \ldots$ Comme $E_M^{(n+1)} \subset E_M^{(n)}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, on a $E_M = E_M^{(1)} E_M^{(2)} E_M^{(3)} \ldots$.

Mais dans ce cas l'ensemble $E_M$ est mesurable et l'on a

(7) $$\lim_{n\to\infty} (mE_M^{(n)}) = m(E_M^{(1)} E_M^{(2)} E_M^{(3)} \ldots) = mE_M.$$

Les inégalités (6) et (7) impliquent l'inégalité suivante

(8) $$mE_M \geqq mE_M^{(6)} \prod_{i=6}^{\infty} (1-4/M2^{(i-1)/2}).$$

Comme la série $\Sigma_{i=6}^{\infty} 2^{(1-i)/2}$ est convergente, le produit infini de la partie droite de (8) est convergent et, par conséquent, est différent de zéro. On va montrer que $\lim mE_M^{(n)} = 1$, $M \to \infty$, pour tout $n \geqq 1$. Il est facile de prouver que $mE_M^{(1)} = 1 - 1/([M]+1)$, d'où on conclut que pour $n=1$ l'assertion est vraie [4]. C'est de l'inégalité

$$mE_M^{(n+1)} < (1-1/3(M(M+1)^{v^n-1}+1) mE_M^{(n)}, \quad M \geqq 1, \quad n \geqq 1,$$

qu'il suit

$$\lim_{M\to\infty} (mE_M^{(n+1)}) \leqq \lim_{M\to\infty} (mE_M^{(n)})$$

si $M \to \infty$ [4].

Ensuite, de l'inégalité (5), $M>4$, $n \geqq 1$, si $M \to \infty$, on a

$$\lim_{M\to\infty} (mE_M^{(n+1)}) \geqq \lim_{M\to\infty} (mE_M^{(n)}), \quad n \geqq 1.$$

Ainsi, l'assertion est prouvée.

Posons $\Phi(M) = \prod_{i=6}^{\infty}(1-4/M2^{(i-1)/2})$.

La fonction $\Phi(M)$ a les mêmes propriétés que la fonction $F(M)$:

1°. $\Phi(M) < 1$ pour tout $M \geqq 1$.

2°. $\Phi(M_1) < \Phi(M_2)$, si $M_1 < M_2$.

3°. $\Phi(M) \to 1$, si $M \to \infty$.

On prouvera la troisième propriété. Posons $\Phi_n(M) = \prod_{i=6}^{n}(1-4/M2^{(i-1)/2})$.

Il est facile de vérifier que $\Phi_n(M)$ tend uniformément vers $\Phi(M)$, quand $1 \leqq M < \infty$. Il en est ainsi parce que le produit infini $\Phi(M)$ est normalement convergent dans son domaine. En effet, on a $4/M2^{(i-1)/2} \leqq 4/2^{(i-1)/2}$ et la série $\Sigma_{i=6}^{\infty} 4 \cdot 2^{(1-i)/2}$ est convergente.

Mais $\lim \{\Phi_n(M);\ M \to \infty\} = 1$, $n=1, 2, \ldots$ Alors, de l'identité $\Phi(M) = [\Phi(M) - \Phi_n(M)] + \Phi_n(M)$, on obtient $\lim \{\Phi(M);\ M \to \infty\} = 1$.

Ainsi nous avons obtenu que l'estimation inférieure pour $mE_M$ tend vers 1 quand $M \to \infty$. Les formules obtenues pour les estimations inférieures et supérieures nous permettrons de trouver une estimation pour l'erreur, mais pour le moment, on ne s'y arrêtera pas. La formule (8) montre que si $M=1$, on a $mE_M \neq 0$. Si $M<1$, l'ensemble $E_M$ n'est pas défini (c.-à-d. n'existe pas) parce qu'on a $a_1/q_0 \geqq 1$.

**3. L'ensemble complémentaire de** $E_M=E[a_{i+1}/q_i \leqq M]$. Désignons par $\bar{E}_M=E(a_{i+1}/q_i>M)$ l'ensemble des points de l'intervalle (0, 1) pour lesquels l'inégalité $a_{i+1}/q_i>M$ est vérifiée pour une valeur de l'index $i$ au moins, $M \geqq 1$. Si $E$ indique l'ensemble de points du même intervalle pour lesquels le rapport $a_{i+1}/q_i$, $i=0, 1, 2, \ldots$, est illimitée et dont la mesure est 0, il est évident que $E \subset \bar{E}_M$[2, p. 241]. Ensuite $\bar{E}_{M_1} \supset \bar{E}_{M_2}$, si $M_1<M_2$ et

(9) $$E=\bar{E}_{M_1} \,.\, \bar{E}_{M_2} \,.\, \bar{E}_{M_3} \ldots, \quad 1 \leqq M_1 \leqq M_2 \leqq \ldots \leqq M_n \to \infty.$$

Les ensembles $E_M=E[a_{i+1}/q_i \leqq M]$ et $\bar{E}_M=E(a_{i+1}/q_i>M)$ sont des ensembles complémentaires par rapport de l'intervalle (0, 1) et c'est des inégalités $0<a \leqq mE_M<1$, $M \geqq 1$, qu'on a $0<m\bar{E}_M \leqq 1-a$. Spécialement, on a $m\bar{E}_M \neq 0$. Comme $mE_M \to 1$ quand $M \to \infty$, on a encore $m\bar{E}_M \to 0$ quand $M \to \infty$.

On peut déduire la dernière propriété également de la relation (9), à savoir

(10) $$0=mE=m(\bar{E}_{M_1} \,.\, \bar{E}_{M_2} \,.\, \bar{E}_{M_3} \ldots)=\lim_{M_n \to \infty} (m\bar{E}_{M_n}).$$

Par contre, c'est de $m\bar{E}_M \to 0$ et de (10) qu'il suit que $mE=0$.

Ainsi, nous avons obtenu encore une démonstration de l'assertion que la mesure de l'ensemble de nombres dans (0, 1), pour lesquels la fraction $a_{i+1}/q_i$ est illimitée, est égale à 0.

**4. Estimation supérieure pour** $mE[a_{i+1}/q_i \geqq M]$. Notons par $E[a_{i+1}/q_i \geqq M]$ l'ensemble de tous les points de l'intervalle (0, 1) pour lesquels on a $a_{i+1}/q_i \geqq M$, $i=0, 1, 2, \ldots$ On cherchera une estimation supérieure pour la mesure $mE[a_{i+1}/q_i \geqq M]$ de cet ensemble. D'après la méthode déja indiquée on déterminera d'abord les intervalles $I_n$ du rang $n$, $n=1, 2, 3, \ldots$, dont les points vérifient les conditions

(11) $$a_{i+1} \geqq Mq_i, \quad i=0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ces intervalles $I_n$ existent, si $n \geqq 1$. Le système (11) a un nombre infini de solutions pour tout $M>0$. On emploiera de nouveau l'inégalité

$$mI^{(k)}_{n+1}<2mI_n/k^2, \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Alors

(12) $$m \sum_{k \geqq Mq_n} I^{(k)}_{n+1}<2mI_n \sum_{k \geqq Mq_n} 1/k^2 \leqq 2mI_n \sum_{i=0}^{\infty} 1/(Mq_n+i)^2$$
$$<2mI_n \left\{ 1/Mq_n+\int_{Mq_n}^{\infty} n^{-2}dn \right\}=4mI_n/Mq_n, \quad n=1, 2, 3 \ldots$$

Mais c'est des inégalités (11) qu'on déduit

(13) $$q_n \geqq M^{1+2+\cdots+2^{n-1}}, \quad n=1, 2, 3 \ldots$$

Ainsi, de (12) et (13) on a

$$m \sum_{k \geqq Mq_n} I_{n+1}^{(k)} < 4mI_n/M2^n, \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots, \tag{14}$$

pour tout intervalle $I_n$ pour lequel les inégalités (11) sont satisfaites.

Notons par $E_M^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, l'ensemble de nombres de l'intervalle $(0, 1)$ caractérisés par les inégalités (11). Evidemment, $E_M^{(n)}$ est la réunion des intervalles $I_n$ de rang $n$, pour lesquels les inégalités (11) sont satisfaites. Comme tout intervalle $I_n$ de rang $n$, qui n'appartient pas à l'ensemble $E_M^{(n)}$, ne peut contenir aucun point de l'ensemble $E_M^{(n+1)}$, en faisant la somme des inégalités (14) suivant tous les intervalles $I_n$ de rang $n$, comprises dans l'ensemble $E_M^{(n)}$ on obtiendra

$$mE_M^{(n+1)} < 4mE_M^{(n)}/M2^n, \qquad n \geqq 1.$$

En appliquant successivement cette inégalité, on obtient

$$mE_M^{(n+1)} < mE_M^{(1)} \prod_{i=1}^{n} 4/M2^i ,$$

d'où, quand $n \to \infty$, on a

$$\lim_{n\to\infty} (mE_M^{(n+1)}) \leqq mE_M^{(1)} \prod_{i=1}^{\infty} 4/M2^i \tag{15}$$

Posons $E_M = E[a_{i+1}/q_i \geqq M]$, c.-à-d. considérons l'ensemble de tous les nombres dans l'intervalle $(0, 1)$ pour lesquels $a_{i+1} \geqq Mq_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Comme $E_M^{(n+1)} \subset E_M^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, on a $E_M = E_M^{(1)} . E_M^{(2)} . E_M^{(3)} \ldots$

Mais dans ce cas $E_M$ est mesurable et on a

$$\lim_{n\to\infty} (mE_M^{(n)}) = m(E_M^{(1)} E_M^{(2)} E_M^{(3)} \ldots) = mE_M. \tag{16}$$

Ainsi de (15) et (16) on obtient

$$mE_M \leqq mE_M^{(1)} \prod_{i=1}^{\infty} 4/M2^i. \tag{17}$$

Le produit infini de la partie droite de (17) est infiniment grand, si $M \leqq 1$ et dans le cas où $M > 1$, le même produit est égal à 0. Ainsi on obtient $mE_M = 0$, si $M > 1$. Ce qui revient à

$$mE[a_{i+1}/q_i \geqq M] = 0. \tag{18}$$

Mais les inégalités (13) dans le cas où $M \leqq 1$ sont, en général, inconvenables. Voilà pourquoi, on ne peut pas obtenir de résultat positif dans ce cas. Au lieu d'employer les inégalités (13), on emploiera les inégalités (3) qui ne dépendent pas des inégalités (11). Alors, de (3) et (12) on obtient

$$m \sum_{k \geqq Mq_n} I_{n+1}^{(k)} < 4mI_n/M2^{(n-1)/2}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

En suivant les mêmes raisonnements, on obtient

$$mE_M^{(n+1)} < 4mE_M^{(n)}/M2^{(n-1)/2}, \qquad n \geq 1.$$

Et à la fin

$$mE_M \leq mE_M^{(1)} \prod_{n=1}^{\infty} 4/M2^{(n-1)/2}.$$

Mais maintenant le produit infini dans la partie droite de la dernière inégalité est égal à 0 et cela est vrai pour tout $M>0$. Ainsi, on obtient de nouveau l'égalité (18), mais pour $M>0$.

**5. L'ensemble complémentaire de** $E_M = E[a_{i+1}/q_i \geq M]$. Soit $\bar{E}_M = E(a_{i+1}/q_i < M)$ l'ensemble de tous les points de l'intervalle (0, 1), pour lesquels l'inégalité $a_{i+1}/q_i < M$, $M>0$, est satisfaite pour au moins une valeur de l'index $i$. Les ensembles $E_M = E[a_{i+1}/q_i \geq M]$ et $\bar{E} = E(a_{i+1}/q_i < M)$ sont des ensembles complémentaires par rapport à l'intervalle (0, 1) et, par conséquent, $mE(a_{i+1}/q_i < M) = 1$. Par exemple, l'ensemble de points de l'intervalle (0, 1) dans le développement desquels on a un nombre infini d'unités (qui a sa mesure égale à 1[3, p. 45] est un sousensemble de $E(a_{i+1}/q_i < M)$ si petit que soit $M>0$.

## BIBLIOGRAPHIE

1. А. Хинчин. Верижни дроби. София, 1965.
2. П. Шопов. Върху мярката на едно множество от реални числа, които не допускат известна степен на апроксимация. *Научни трудове на Пловд. унив., мат.*, 11, 1973, кн. 4.
3. П. Шопов. Върху една метрична теорема от диофантовите апроксимации. *Доклади на XII Научна сесия на Пловд. унив.*, 1976, 45—46.
4. П. Шопов. Върху оценката на знаменателите на приближените дроби и мярката в метричната теория на верижните дроби. *Научни трудове на Пловд. унив., мат.*, 15, 1977, кн. 1.

*University of Plovdiv, 4000 Plovdiv*

*Reçu le 21 mars 1977*