Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

ABHÄNGIGE VERSCHIEBUNGEN III (MIT DISKUSSION)

K.-H. FICHTNER, W. FREUDENBERG, J. KERSTAN

In der Theorie der Punktprozesse gewinnt die Untersuchung von Verschiebungen, besonders im Hinblick auf mögliche Anwendungen in der statistischen Physik, immer mehr an Bedeutung. Besondere Aufmerksamkeit wurde und wird dabei der Frage gewidmet, welche Punktprozesse gegenüber einer Verschiebung invariant bleiben, d. h. ein makroskopisches Gleichgewicht beschreiben. In Verbindung damit interessiert man sich für Punktprozesse, die, sukzessiv verschoben, einem solchen makroskopischen Gleichgewicht zustreben, d. h. in irgendeiner Weise gegen einen verschiebungsinvarianten Punktprozeß konvergieren. Die in dieser Arbeit behandelten Verschiebungen sind so beschaffen, daß für jeden stationären Punktprozeß endlicher Intensität ein derartiges Einschwingen nachgewiesen werden kann.

0. Einleitung. Den Verschiebungen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, entspricht ein Bewegungsmechanismus, der sich anschaulich folgendermaßen interpretieren läßt: Die Orte einer einfachen, beidseitig unendlichen Punktfolge Φ mögen die momentane Lage von Fahrzeugen auf einer beidseitig unendlichen Autobahn angeben. Jedes Fahrzeug bewege sich mit einer linear von den Abständen zwischen allen ihm vorausfahrenden Fahrzeugen abhängenden Geschwindigkeit.

Bezeichnet $x_k^\Phi(t)$ den Ort des Fahrzeuges mit der ursprünglichen Position $x_k(\Phi)$ nach Ablauf der Zeit t, so führt diese Vorstellung auf das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\frac{dx_k^\Phi(t)}{dt} = -\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \,(x_{k-i}^\Phi(t) - x_{k-i-1}^\Phi(t)); \quad \forall k \in \Gamma,$$

$$x_k^\Phi(0) = x_k(\Phi); \qquad \forall k \in \Gamma$$

(Γ bezeichne die ganzen Zahlen).

Es wird gezeigt, daß dieses Differentialgleichungssystem für monoton schwach fallende Folgen nichtnegativer reeller Zahlen $(\lambda_i)_{i=0}^\infty$ mit $\sum_{i=0}^\infty \lambda_i < \infty$ und jedes Φ mit $\sup\{|x_k(\Phi)|/(|k|+1) : k \in \Gamma\} < \infty$ genau eine Lösung besitzt. Diese Lösung wird explizit angegeben. Die Forderungen an die Folge $(\lambda_i)_{i=0}^\infty$ garantieren, daß sich alle Fahrzeuge in eine Richtung bewegen $(-\infty)$ und daß Ein- und Überholen ausgeschlossen ist.

Mittels der Lösung des DGL-Systems kann man nun eine Verschiebungshalbgruppe $(\mathfrak{V}_t)_{t\geq 0}$ definieren, die die durch das DGL-System eingeführte Bewegung beschreibt. Unter einer zusätzlichen Forderung an die Folge $(\lambda_i)_{i=0}^\infty$ (hinreichend ist beispielsweise die Forderung $\lambda_0 > \lambda_1$) wird bewiesen, daß für jeden einfachen, stationären ergodischen Punktprozeß P mit endlicher Intensität λ_P die Folge der verschobenen Punktprozesse $(P_{\mathfrak{V}_t})_{t\geq 0}$ schwach gegen einen regulären Punktprozeß Q mit der Palmschen Verteilung

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 4, 1978, p. 135—163.

$$Q^0 = \delta_{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{k/\lambda_P}} \tag{0.1}$$

konvergiert.

Dabei wird ausgenutzt, daß zu jedem $n \in \{1, 2, \ldots\}$ ein Verteilungsgesetz a_n auf Γ existiert, so daß für alle stationären, ergodischen Folgen von Zufallsgrößen $(\eta_i)_{i=-\infty}^{+\infty}$ mit endlichem Erwartungswert die Konvergenz der Erwartungswerte

$$E \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_n(i)\eta_i - E\eta_0 \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{0.2}$$

statt hat und stets

$$x_k^\Phi(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_n(i) x_{k-i}(\Phi) \tag{0.3}$$

ist.

Man kann für eine beliebige Folge von Verteilungsgesetzen $(a_n)_{n=1}^\infty$ durch (0.3) eine Bewegung definieren. Dabei wird das Punktesystem Φ nach Ablauf der Zeit n in das Punktesystem

$$\Phi_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{x_k^\Phi(n)}$$

überführt. Dadurch wird jedem einfachen, stationären, ergodischen Punktprozeß P mit endlicher Intensität eine Folge von Punktprozessen $(P_n)_{n=1}^\infty$ zugeordnet Jede positive stationäre ergodische Folge von Zufallsgrößen $(\eta_i)_{i=-\infty}^{+\infty}$ mit end lichem Erwartungswert läßt sich aber als Folge Palmscher Pausen eines einfachen stationären ergodischen Punktprozesses P endlicher Intensität auffassen, wobei $E\eta_0 = 1/\lambda_P$ ist. Man kann nun zeigen, daß (0.2) genau dann gilt, wenn die Folge der Punktprozesse $(P_n)_{n=1}^\infty$ schwach gegen den Punktprozeß Q mit (0.1) konvergiert.

Der statistische Ergodensatz läßt sich somit als Konvergenzsatz für spezielle Verschiebungen von Punktprozessen auffassen.

Detailliert sind die Untersuchungen dieser speziellen Verschiebungen und das Grenzverhalten der sukzessiv verschobenen Punktprozesse im vierten Kapitel dargestellt. In den ersten beiden Kapiteln werden die grundlegenden Begriffe eingeführt und einige Hilfssätze bewiesen. Im dritten Kapitel wird dann das erwähnte DGL-System in einem ad hoc gewählten Banachraum gelöst, und es werden Eigenschaften der Lösung angegeben.

1. Einige Grundbegriffe und Hilfssätze. Es bezeichnen Γ die Menge der ganzen Zahlen, **N** die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathfrak{A}$ die σ-Algebra der Borelmengen in der Menge **R** der reellen Zahlen und $\mathfrak{B}$ den Ring der beschränkten Mengen aus $\mathfrak{A}$. Weiter sei **M** die Menge aller einfachen, beidseitig unendlichen Punktfolgen mit dem Phasenraum **R**, d. h. die Menge aller ganzzahligen Maße Φ auf $\mathfrak{A}$ mit

$$\Phi(B) < \infty; \qquad \forall B \in \mathfrak{B},$$

$$\Phi(\{a\}) \le 1; \qquad \forall a \in \mathbf{R},$$

$$\Phi((-\infty, 0]) = \Phi((0, +\infty)) = \infty.$$

Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir die kleinste σ-Algebra über $\mathbf{M}$, bezüglich der für alle $B \in \mathfrak{B}$ die Abbildung $\Phi \to \Phi(B)$ von $\mathbf{M}$ in $\{0, 1, \ldots\}$ meßbar ist. Die Menge $\mathbf{M}^0 = \{\Phi \in \mathbf{M} : \Phi(\{0\}) = 1\}$ ist folglich eine meßbare Teilmenge von $\mathbf{M}$.

Wir setzen $\mathbf{R}^\Gamma = (\{a_n)_{-\infty}^{+\infty} : a_n \in R$ für alle $n \in \Gamma\}$. $\mathbf{R}^\Gamma$ wird durch die σ-Algebra $\mathfrak{A}^\Gamma$ zu einem meßbaren Raum ergänzt. Es ist leicht zu sehen, daß die folgenden Mengen meßbare Teilmengen von $\mathbf{R}^\Gamma$ sind:

$$\mathbf{R}_0^\Gamma = \left\{(a_n)_{-\infty}^{+\infty} : a_n > 0 \text{ für alle } n \in \Gamma,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} = \infty\right\},$$

$$R_1^\Gamma = \{(a_n)_{-\infty}^{+\infty} : a_n < a_{n+1} \text{ für alle } n \in \Gamma,\ \lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty} a_{-n} = \infty\}.$$

Wir numerieren die Punkte der Menge $\{x \in \mathbf{R} : \Phi(\{x\}) > 0\}$ entsprechend ihrer Größe, wobei wir dem ersten positiven Punkt den Index 1, dem letzten nichtnegativen Punkt 0 zuschreiben. Die k-te Ortslage einer Punktfolge Φ bezeichnen wir wie üblich mit $x_k(\Phi)$. Offensichtlich ist die Zuordnung $\Phi \to (x_i(\Phi))_{-\infty}^{+\infty}$ eine eineindeutige Abbildung von $\mathbf{M}$ auf $\mathbf{R}_1^\Gamma$.

Gemäß [5], Kap. 4.1. sei in $\mathbf{M}$ die Metrik $\varrho_{\mathbf{M}}$ eingeführt. Für die Konvergenz einer Folge $(\Phi_m)_{m \in \mathbf{N}}$ gegen ein Φ bezüglich der Punktfolgenmetrik $\varrho_{\mathbf{M}}$ schreiben wir

$$\Phi_m \xRightarrow[m\to\infty]{\mathbf{M}} \Phi.$$

Wir zeigen nun, daß aus komponentenweiser Konvergenz der Ortslagen die Konvergenz bezüglich der Punktfolgenmetrik folgt.

1.1. *Für jede Folge* $(\Phi_m)_{m \in \mathbf{N}}$ *von Elementen aus* $\mathbf{M}$ *und jedes* Φ *aus* $\mathbf{M}$ *folgt aus*

$$x_n(\Phi_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} x_n(\Phi); \qquad \forall n \in \Gamma \tag{1.1}$$

die Konvergenz

$$\Phi_m \xRightarrow[m\to\infty]{\mathbf{M}} \Phi. \tag{1.2}$$

B e w e i s. Nach der Definition der Metrik $\varrho_{\mathbf{M}}$ reicht es aus zu zeigen, daß für jedes $k \in \mathbf{N}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $m_{\varepsilon,k}$ existiert, so daß für $m \geq m_{\varepsilon,k}$ die Punktfolgen Φ_m und Φ (ε, k)-benachbart sind. Hierbei heißen Φ_m und Φ (ε, k)-benachbart, wenn eine umkehrbar eindeutige Abbildung f einer unter Umständen leeren Teilmenge D von Γ in Γ mit den Eigenschaften

$$\{i \in \Gamma : |x_i(\Phi)| < k - \varepsilon\} \subseteq D,$$

$$\{i \in \Gamma : |x_i(\Phi_m)| < k - \varepsilon\} \subseteq f(D),$$

$$|x_i(\Phi) - x_{f(i)}(\Phi_m)| < \varepsilon; \quad \forall i \in D$$

existiert.

Wir geben uns also ein $k \in \mathbf{N}$ und ein $\varepsilon > 0$ vor und untersuchen das Intervall $[-k, k]$. Im Fall $\Phi([-k, k]) = 0$ gilt für genügend großes m natürlich $\Phi_m([-k, k]) = 0$, und somit sind Φ_m, Φ trivialerweise (ε, k)-benachbart. Wir nehmen nun an $\Phi([-k, k])>0$. Dann enthält $[-k, k]$ endlich viele Orte $x_r(\Phi), \ldots, x_{r+l}(\Phi)$ der Punktfolge Φ. Sei nun $D=\{r, \ldots, r+l\}$ und f die identische Abbildung auf D. Aus der Voraussetzung (1.1) und den Ungleichungen $x_{r-1}(\Phi)<-k$, $x_{r+l+1}(\Phi)>k$ folgt, daß ein m_0 existiert, so daß für alle $m \geq m_0$

$$x_{r-1}(\Phi_m)<-k, \quad x_{r+l+1}(\Phi_m)>k$$

gilt. Wir haben somit für $m \geq m_0$ die Inklusionen

$$\{i \in \Gamma : |x_i(\Phi_m)|<k-\varepsilon\} \subseteq f(D),$$

$$\{i \in \Gamma : |x_i(\Phi)|<k-\varepsilon\} \subseteq D.$$

Aus (1.1) folgt weiterhin, daß ein $m_{\varepsilon,k} \geq m_0$ existiert, so daß für $m \geq m_{\varepsilon,k}$ die Ungleichung

$$|x_i(\Phi)-x_{f(i)}(\Phi_m)|=|x_i(\Phi)-x_i(\Phi_m)|<\varepsilon; \quad \forall i \in D$$

erfüllt ist. Somit sind Φ_m und Φ für $m \geq m_{\varepsilon,k}$ (ε, k)-benachbart.

Jedem Φ aus $\mathbf{M}$ ordnen wir die Folge seiner Pausenlängen

$$y_n(\Phi)=x_n(\Phi)-x_{n-1}(\Phi); \quad \forall n \in \Gamma$$

zu. Für Punktfolgen Φ aus $\mathbf{M}^0$ ist die Zuordnung zwischen den Ortslagen und den Pausenlängen umkehrbar eindeutig. Es besteht der Zusammenhang

$$x_n(\Phi)=\sum_{i=1}^{n} y_i(\Phi); \qquad \forall n>0,$$

$$(1.3.) \qquad x_{-n}(\Phi)=-\sum_{i=0}^{n-1} y_{-i}(\Phi); \qquad \forall n>0,$$

$$x_0(\Phi)=0.$$

Für eine Folge $(\Phi_m)_{m \in \mathbf{N}}$ aus $\mathbf{M}^0$ und ein Φ aus $\mathbf{M}^0$ mit

$$y_n(\Phi_m) \xrightarrow[m \to \infty]{} y_n(\Phi); \qquad n \in \Gamma$$

findet somit wegen 1.1. die Konvergenz

$$\Phi_m \xRightarrow[m \to \infty]{\mathbf{M}} \Phi$$

statt.

Die Zuordnung $\Phi \to Y(\Phi)=(y_n(\Phi))_{-\infty}^{+\infty}$ ist offensichtlich eine eineindeutige Abbildung von $\mathbf{M}^0$ auf $\mathbf{R}_0^{\Gamma}$. In [5, Satz 3.5.3] wurde gezeigt, daß Y und Y^{-1} meßbare Abbildungen sind. Für jedes $k \in \mathbf{N}$ und alle $i_1, \ldots, i_k \in \Gamma$ ist

$$\Phi \to Y_{i_1, \ldots, i_k}(\Phi)=[y_{i_1}(\Phi), \ldots, y_{i_k}(\Phi)]$$

eine meßbare Abbildung von $\mathbf{M}^0$ auf

$$\mathbf{R}_+^k=\{[a_1, \ldots, a_k] : a_i>0 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\}\}.$$

Unter einem *Punktprozeß* verstehen wir ein Verteilungsgesetz auf $[\mathbf{M}, \mathfrak{M}]$. (In [5] werden Punktprozesse auf einem größeren Punktfolgenraum $\mathbf{M}$ betrachtet). Sei nun P ein Punktprozeß mit $P(\mathbf{M}^0)=1$. Dann ist folglich $P\circ Y^{-1}$ ein Verteilungsgesetz auf $[\mathbf{R}^\Gamma, \mathfrak{A}^\Gamma]$, für das $P\circ Y^{-1}(\mathbf{R}_0^\Gamma)=1$ gilt. Weiter ist für jedes $k\in\mathbf{N}$ und beliebige $i_1,\dots,i_k\in\Gamma$ $P\circ Y^{-1}_{i_1,\dots,i_k}$ ein Verteilungsgesetz auf $[\mathbf{R}^k, \mathfrak{A}^k]$ mit $P\circ Y^{-1}_{i_1,\dots,i_k}(\mathbf{R}^k_+)=1$. Offensichtlich sind die endlichdimensionalen Verteilungsgesetze $(P\circ Y^{-1})_{i_1,\dots,i_k}$ von $P\circ Y^{-1}$ gleich den Verteilungsgesetzen $P\circ Y^{-1}_{i_1,\dots,i_k}$.

Im Raum P aller Punktprozesse sei die Metrik ϱ_{P}, der sogenannte *Prochorow-Abstand* eingeführt (vgl. z. B. [5], Kap. 4.2). Unter *schwacher Konvergenz* einer Folge $(P_m)_{m\in\mathbf{N}}$ von Elementen aus P gegen ein P aus P verstehen wir Konvergenz bezüglich der Metrik ϱ_{P}. Anstelle von $\lim_{m\to\infty}\varrho_{\mathsf{P}}(P_m, P)=0$ schreiben wir $P_m \xRightarrow[m\to\infty]{\mathsf{P}} P$.

Schwache Konvergenz von Verteilungsgesetzen auf $[\mathbf{R}^k, \mathfrak{A}^k]$, $k\geqq 1$ kennzeichnen wir im weiteren durch „$\Longrightarrow$".

Wir zeigen nun den folgenden Hilfssatz:

1.2. *Sei* $(P_m)_{m\in\mathbf{N}}$ *eine Folge von Elementen aus* P, *so daß für jedes* $m\in\mathbf{N}$ $P_m(\mathbf{M}^0)=1$ *gilt und ein* $c>0$ *existiert mit*

$$P_m\circ Y_k^{-1} \xRightarrow[m\to\infty]{} \delta_c;\qquad \forall k\in\Gamma. \tag{1.4}$$

Dann findet die Konvergenz

$$P_m \xRightarrow[m\to\infty]{\mathsf{P}} Q_c=\delta_{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta_{kc}} \tag{1.5}$$

statt (δ_c *bezeichne die Dirac-Verteilung*).

B e w e i s. Wir bringen die zu beweisende Aussage (1.5) in eine für unsere Zwecke vorteilhaftere Form. Aus Theorem 4.2.10. in [5] und Satz 4.2.11 in [5] kann man unmittelbar herleiten, daß (1.5) folgendem äquivalent ist:

Für jedes halboffene Intervall $[a, b)$ mit der Eigenschaft

$$Q_c(\Phi\in\mathbf{M}^0:\Phi(\{a\})>0\quad\text{oder}\quad\Phi(\{b\})>0)=0 \tag{1.6}$$

gilt

$$\lim_{m\to\infty}P_m(\Phi\in\mathbf{M}^0:\Phi([a,b))=l)=Q_c(\Phi\in\mathbf{M}^0:\Phi([a,b))=l); \tag{1.7}$$

$$\forall l\in\{0,1,\dots\}.$$

Sei nun $[a, b)$ so beschaffen, daß (1.6) gilt. Für alle $k\in\Gamma$ ist dann $a\neq kc$, $b\neq kc$. Wir untersuchen zunächst den Fall $a>0$. Aufgrund der Beziehung (1.3) erhalten wir für beliebiges $l\in\{0, 1,\dots\}$

$$(\Phi\in\mathbf{M}_0:\Phi([a,b))=l)$$

$$=\bigcup_{i=0}^{\infty}(\Phi\in\mathbf{M}^0: x_i(\Phi)<a\leq x_{i+1}(\Phi),\quad x_{i+l}(\Phi)<b\leq x_{i+l+1}(\Phi))$$

$$=\bigcup_{i=0}^{\infty}Y^{-1}\left((a_n)_{-\infty}^{+\infty}\in R_0^\Gamma:\sum_{k=1}^{i}a_k<a\leq\sum_{k=1}^{i+1}a_k,\ \sum_{k=1}^{i+l}a_k<b\leq\sum_{k=1}^{i+l+1}a_k\right)$$

$$=\bigcup_{i=0}^{\infty} Y^{-1}_{1,\ldots,i+l+1}\Big([a_1,\ldots,a_{i+l+1}]\in R_+^{i+l+1}: \sum_{k=1}^{i} a_k<a\leq\sum_{k=1}^{i+1} a_k,$$

$$\sum_{k=1}^{i+l} a_k<b\leq\sum_{k=1}^{i+l+1} a_k\Big).$$

Dabei setzen wir $\sum_{k=1}^{0} a_k=0$.

Setzen wir für alle $i,\ l\in\{0,1,\ldots\}$

$$A_i^l=\Big([a_1,\ldots,a_{i+l+1}]\in R_+^{i+l+1}: \sum_{k=1}^{i} a_k<a\leq\sum_{k=1}^{i+1} a_k,\ \sum_{k=1}^{i+l} a_k<b\leq\sum_{k=1}^{i+l+1} a_k\Big),$$

so erhalten wir folglich

$$(1.8)\quad P_m(\Phi\in\mathbf{M}^0:\ \Phi([a,b))=l)=\sum_{i=0}^{\infty} P_m\circ Y^{-1}_{1,\ldots,i+l+1}(A_i^l);\ \forall m\in N,\ \forall l\in\{0,1,\ldots\}$$

$$(1.9)\qquad Q_c(\Phi\in\mathbf{M}^0:\ \Phi([a,b))=l)=\sum_{i=0}^{\infty} Q_c\circ Y^{-1}_{1,\ldots,i+l+1}(A_i^l)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\delta_{[c,\ldots,c]}(A_i^l);\qquad l\in\{0,1,\ldots\},$$

Wie leicht zu sehen ist, sind alle Ereignisse A_i^l, $i,\ l\in\{0,1,\ldots\}$ Stetigkeitsmengen von $\delta_{[c,\ldots c]}$. Weiter folgt aus (1.4) für alle $k\in\mathbf{N}$ die Konvergenz

$$P_m\circ Y^{-1}_{i_1,\ldots,i_k}\underset{m\to\infty}{\Longrightarrow}\delta_{[c,\ldots c]};\qquad \forall i_1,\ldots,i_k\in\Gamma.$$

Wir erhalten deshalb

$$(1.10)\qquad P_m\circ Y^{-1}_{1,\ldots,i+l+1}(A_i^l)\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\delta_{[c,\ldots c]}(A_i^l);\qquad i,l\in\{0,1,\ldots\}.$$

Es existieren nun genau ein k und ein n, $k,\ n\in\{0,1,\ldots.\}$, so daß gilt

$$\delta_{[c,\ldots c]}(A_i^l)=\begin{cases}1 & \text{für } i=k,\ l=n\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Wegen (1.10) haben wir deshalb

$$(1.11)\qquad P_m\circ Y^{-1}_{1,\ldots,k+n+1}(A_k^n)\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}1.$$

Da für alle $m\in\mathbf{N}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_m\circ Y^{-1}_{1,\ldots,i+n+1}(A_i^n)\leq 1,\quad P_m\circ Y^{-1}_{1,\ldots,i+n+1}(A_i^n)\geq 0;\ \forall i\in\{0,1,\ldots\},$$

erhalten wir aufgrund von (1.11), (1.8) und (1.9)

$$\lim_{m\to\infty} P_m(\Phi\in\mathbf{M}^0:\ \Phi([a,b))=n)=1=Q_c(\Phi\in\mathbf{M}^0:\ \Phi([a,b))=n)$$

Folglich gilt auch

$$\lim_{m\to\infty} P_m(\Phi \in \mathbf{M}^0 : \Phi([a, b)) \neq n) = 0 = Q_c(\Phi \in \mathbf{M}^0 : \Phi([a, b)) \neq n).$$

Für alle $[a, b)$ mit der Eigenschaft (1.6) und $a>0$ ist damit (1.7) bewiesen. Die Fälle $b<0$ und $a<0$, $b>0$ lassen sich analog behandeln. Wir verzichten auf eine explizite Darstellung.

Sei nun $(a^m)_{m\in\mathbf{N}}$ eine Folge von Verteilungsgesetzen auf Γ. Gemäß [4] heißt $(a^m)_{m\in\mathbf{N}}$ asymptotisch gleichverteilt, wenn für alle $k\in\Gamma$ die Konvergenz der Variationsabstände

$$\text{Var}\,(a^m - \delta_k * a^m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \tag{1.12}$$

statt hat.

Ein Verteilungsgesetz W auf $[\mathbf{R}^\Gamma, \mathfrak{A}^\Gamma]$ nennen wir stationär, wenn es invariant ist bezüglich der Translation Θ^*, definiert durch

$$\Theta^*((a_n)_{-\infty}^{+\infty}) = (a^*)_{n-\infty}^{+\infty}$$

$$a_n^* = a_{n-1}; \qquad \forall n \in \Gamma.$$

Hat in diesem Falle jede Menge aus der σ-Algebra der bezüglich Θ^* invarianten Mengen die Wahrscheinlichkeit Null oder Eins, so heißt W *ergodisch.* Es gilt der folgende Satz:

1.3. *Seien W ein ergodisches Verteilungsgesetz auf $[R^\Gamma, \mathfrak{A}^\Gamma]$ mit*

$$E_W |a_1| = \int |a_1| W(d\bar{a}) < \infty$$

und $(a^m)_{m\in\mathbf{N}}$ eine asymptotisch gleichverteilte Folge von Verteilungsgesetzen auf Γ.

Dann gilt für alle $k\in\Gamma$

$$\lim_{m\to\infty} \int W(d\bar{a}) \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a^m(i) a_{k-i} - E_W a_1 \right| = 0 \tag{1.13}$$

(*mit $\bar{a}$ bezeichnen wir Elemente $(a_n)_{-\infty}^{+\infty}$ aus $\mathbf{R}^\Gamma$*).

Beweis. Wir erhalten für beliebiges $k\in\Gamma$ und $n\in\mathbf{N}$ die Abschätzung

$$\int W(d\bar{a}) \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a^m(i) a_{k-i} - E_W a_1 \right| \le \int W(d\bar{a}) \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a^m(i) a_{k-i} - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a^m(i) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{k-i-j} \right|$$

$$+ \int W(d\bar{a}) \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a^m(i) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{k-i-j} - E_W a_1 \right|.$$

Den ersten Ausdruck auf der rechten Seite der Ungleichung können wir aufgrund der Stationarität von W folgendermaßen abschätzen:

$$\int W(d\bar{a}) \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a^m(i) a_{k-i} - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a^m(i) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{k-i-j} \right|$$

$$= \int W(d\bar{a}) \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a^m(i) a_{k-i} - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\delta_j * a^m)(i) a_{k-i} \right|$$

$$\le \int W(d\bar{a}) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_{k-i}| \cdot \left| a^m(i) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\delta_j * a^m)(i) \right|$$

$$\leq E_W |a_1| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a^m(i)-(\delta_j * a^m)(i)| = E_W |a_1| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Var}(a^m - \delta_j * a^m).$$

Da $(a^m)_{m \in}$ asymptotisch gleichverteilt ist, strebt dieser Ausdruck bei $m \to \infty$ gegen Null. Weiter haben wir, wiederum unter Ausnutzung der Stationarität von W

$$\int W(d\bar{a}) \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a^m(i) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{k-i-j} - E_W a_1 \right| \leq \int W(d\bar{a}) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a^m(i) \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{k-i-j} - E_W a_1 \right|$$

$$= \int W(d\bar{a}) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a^m(i) \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{k-j} - E_W a_1 \right| = \int W(d\bar{a}) \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{k-j} - E_W a_1 \right|.$$

Nach dem Ergodensatz (vgl. z. B. [7], S. 210) konvergiert dieser Ausdruck bei wachsendem n gegen Null. Folglich ist (1.13) für alle $k \in I'$ richtig, was zu beweisen war.

2. Homogene Verschiebungen. In [1] wurde der Begriff der homogenen Verschiebung und einer Halbgruppe homogener Verschiebungen für markierte Punktprozesse eingeführt. Wir beschränken uns hier auf nichtmarkierte Punktprozesse. Alle in [1] bewiesenen Sätze lassen sich auf den unmarkierten Fall übertragen, da man jeden unmarkierten Punktprozeß als einen markierten mit einpunktigem Markenraum auffassen kann.

Bekanntlich ist für jedes $y \in \mathbf{R}$ die Abbildung

$$\Phi \to T_y \Phi = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta_{x_i(\Phi)-y}$$

eine meßbare Abbildung von $\mathbf{M}$ auf $\mathbf{M}$ und die Zuordnung $\Phi \to \Theta\Phi = T_{x_1(\Phi)} \Phi$ eine meßbare Abbildung von $\mathbf{M}^0$ auf $\mathbf{M}^0$.

Sei D nun eine nichtleere Teilmenge von $\mathbf{M}^0$ mit $D \in \mathfrak{M}$ und $\Theta D = D$ Wir setzen $\widehat{D} = \bigcup_{a \in \mathbf{R}} T_a D$. In [1] wurde gezeigt, daß $\widehat{D}$ in $\mathfrak{M}$ liegt. Desweiteren sei v eine meßbare Abbildung von $[D, \mathfrak{M} \cap D]$ in $[\mathbf{R}, \mathfrak{A}]$. Wir setzen

$$H_v(\Phi) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta_{x_i(\Phi)-v(T_{x_i(\Phi)}\Phi)}; \ \forall \Phi \in \widehat{D},$$

$$H_v^0(\Phi) = T_{-v(\Phi)} H_v(\Phi); \quad \forall \Phi \in D.$$

Das Tupel $\mathfrak{V} = [v, D]$ heißt *homogene Verschiebung*, falls für alle $\Phi \in D$ $H_v^0(\Phi) \in \mathbf{M}^0$ gilt. Da wir in dieser Arbeit keine anderen Typen von Verschiebungen betrachten, nennen wir $\mathfrak{V}$ im weiteren kurz Verschiebung.

Eine Verschiebung $\mathfrak{V} = [v, D]$ nennen wir ordnungsstabil, wenn für alle $\Phi \in D$

$$0 < x_1(\Phi) - v(\Theta\Phi) + v(\Phi) \tag{2.1}$$

gilt. In [1] wurde bewiesen, daß $\mathfrak{V}$ genau dann ordnungsstabil ist, wenn für alle $\Phi \in \widehat{D}$ und alle $i \in I'$ gilt $x_i(\Phi) - v(T_{x_i(\Phi)}\Phi) < x_{i+1}(\Phi) - v(T_{x_{i+1}(\Phi)}\Phi)$. Eine Punktfolge Φ aus $\widehat{D}$ wird durch die Verschiebung gemäß $\mathfrak{V}$ in die Punktfolge $H_v(\Phi)$ überführt. Ein Punkt $x_i(\Phi)$ nimmt dabei die neue Position $x_i(\Phi) - v(T_{x_i(\Phi)}\Phi)$ ein. Ordnungsstabil bedeutet also inhaltlich, daß die Reihenfolge der Punkte erhalten bleibt.

Sei nun $\mathfrak{V}=[v, D]$ eine ordnungsstabile Verschiebung. Wir setzen für edes $n \in \mathbf{N}$

$$v_n(\Phi)=\begin{cases} \min(v(\Phi), n) & \text{für } v(\Phi)\geq 0, \\ -\min(-v(\Phi), n) & \text{für } v(\Phi)<0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Über die Abbildungen v_n können wir die folgenden Aussagen machen:

2.1. *Sei $\mathfrak{V}=[v, D]$ eine ordnungsstabile Verschiebung. Dann ist für jedes $n \in \mathbf{N}$ das Tupel $\mathfrak{V}_n=[v_n, D]$, wobei v_n durch* (2.2) *gegeben ist, eine ordnungsstabile Verschiebung, und es gelten die Beziehungen*

$$\lim_{n\to\infty} v_n(\Phi)=v(\Phi); \quad \forall\, \Phi \in D, \tag{2.3}$$

$$H^0_{v_n}(\Phi) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{M}} H^0_v(\Phi) \quad \forall\, \Phi \in D, \tag{2.4}$$

$$H_{v_n}(\Phi) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{M}} H_v(\Phi) \quad \forall\, \Phi \in \widehat{D} \tag{2.5}$$

Beweis. Es ist offensichtlich, daß alle v_n meßbare Abbildungen sind von $[D, \mathfrak{M} \cap D]$ in $[\mathbf{R}, \mathfrak{A}]$ und daß (2.3) gilt. Wir zeigen zunächst, daß für beliebiges $n \in \mathbf{N}$ die Ungleichung

$$0<x_1(\Phi)-v_n(\Theta\Phi)+v_n(\Phi); \quad \forall\, \Phi \in D \tag{2.6}$$

erfüllt ist. Wir untersuchen die folgenden drei Fälle:

(a) $$v(\Phi)>n,$$

(b) $$v(\Theta\Phi)<-n,$$

(c) $$v(\Phi)\leq n \text{ und } v(\Theta\Phi)\geq -n.$$

In den Fällen (a) und (b) folgt (2.6) unmittelbar aus den für alle $\Phi \in D$ gültigen Ungleichungen $|v_n(\Theta\Phi)|\leq n$, $|v_n(\Phi)|\leq n$. Im Fall (c) erhalten wir $v_n(\Phi) \geq v(\Phi)$, $v_n(\Theta\Phi)\leq v(\Theta\Phi)$ und damit $x_1(\Phi)-v_n(\Theta\Phi)+v_n(\Phi)\geq x_1(\Phi)-v(\Theta\Phi)+v(\Phi)>0$. Folglich gilt (2.6) für beliebiges $n \in \mathbf{N}$. Aus (2.6) und $\Theta D=D$ folgt weiter $H^0_{v_n}(\Phi) \in \mathbf{M}^0$; $\forall\, \Phi \in D$. Damit ist bewiesen, daß alle $\mathfrak{V}_n=[v_n, D]$ ordnungsstabile Verschiebungen sind.

Wir beweisen nun die Konvergenzaussage (2.4). Aufgrund von 1.1. ist es ausreichend zu zeigen, daß die Konvergenz

$$x_k(H^0_{v_m}(\Phi)) \xrightarrow[m\to\infty]{} x_k(H^0_v(\Phi)); \quad \forall\, k \in \Gamma,\ \Phi \in D \tag{2.7}$$

stattfindet. Da alle $\mathfrak{V}_n$ und $\mathfrak{V}$ ordnungsstabil sind, gilt aber $x_k(H^0_{v_m}(\Phi))= x_k(\Phi)-v_m(\Theta^k(\Phi))+v_m(\Phi)$; $\forall\, k \in \Gamma$, $n \in \mathbf{N}$, $\Phi \in D$ und $x_k(H^0_v(\Phi))=x_k(\Phi)-v(\Theta^k(\Phi)) +v(\Phi)$; $\forall\, k \in \Gamma$, $\Phi \in D$. Wir erhalten somit (2.7) unmittelbar aus (2.3) und $\Theta D=D$. Wir müssen nun noch (2.5) beweisen. Nach Satz 4.1.6. in [5] ist die Abbildung $[x, \Phi] \to T_x\Phi$ von $\mathbf{R}\times\mathbf{M}$ in $\mathbf{M}$ stetig. Wegen

$$T_{v_m(T_{x_1(\Phi)}\Phi)-x_1(\Phi)} H^0_{v_m}(T_{x_1(\Phi)}\Phi)=H_{v_m}(\Phi); \quad \forall\, \Phi \in \widehat{D},\ m \in \mathbf{N}$$

$$T_{v(T_{x_1(\Phi)}\Phi)-x_1(\Phi)} H^0_v(T_{x_1(\Phi)}\Phi)=H_v(\Phi) \quad \forall\, \Phi \in \widehat{D},$$

erhalten wir somit aus (2.4) und (2.3) die Beziehung (2.5). Damit ist 2.1 bewiesen.

Ein Punktprozeß P heißt $\mathfrak{V}=[v, D]$-*verschiebbar*, falls $P(\widehat{D})=1$ gilt. Wir nennen in diesem Fall das Verteilungsgesetz $P_{\mathfrak{V}}=({}_{\widehat{D}}P)\circ(H_v)^{-1}$ auf $[\mathbf{M}, \mathfrak{M}]$ den gemäß $\mathfrak{V}$ verschobenen Punktprozeß (${}_{\widehat{D}}P$ bezeichne die Einschränkung von P auf $\mathfrak{M}\cap\widehat{D}$).

Wie üblich heißt ein Punktprozeß *stationär*, wenn er durch alle T_y in sich überführt wird. Die Intensität λ_P eines stationären Punktprozesses P ist definiert vermöge $\lambda_P=\int P(d\Phi)\Phi([0, 1])$. Jedem stationären Punktprozeß P mit endlicher Intensität λ_P können wir das Palmsche Maß P^0 und die Palmsche Verteilung P^0 zuordnen (s. z. B. [5], Kap. 3.4, 3.6). Es gilt

$$P^1(Z)=\frac{1}{\mu(B)}\int P(d\Phi)\int_B \Phi(dx)k_Z(T_x\Phi) \quad \forall\, Z\in\mathfrak{M}^0, \tag{2.8}$$

wobei μ das Lebesguesche Maß auf $[\mathbf{R}, \mathfrak{A}]$, k die Indikatorfunktion bezeichnet und B eine beliebige Menge aus $\mathfrak{B}$ ist. Die Palmsche Verteilung ist durch

$$P^0=P^1/\lambda_P \tag{2.9}$$

gegeben.

2.2. Theorem. *Seien* $\mathfrak{V}=[v, D]$ *eine ordnungsstabile Verschiebung und* P *ein stationärer,* $\mathfrak{V}$*-verschiebbarer Punktprozeß mit endlicher Intensität. Dann ist* $P_{\mathfrak{V}}$ *ebenfalls stationär, und es gilt:*

$$\lambda_{P_{\mathfrak{V}}}=\lambda_P, \tag{2.10}$$

$$(P_{\mathfrak{V}})^0=({}_DP^0)\circ(H_v^0)^{-1}. \tag{2.11}$$

Beweis. 1. Die Stationarität von P folgt unmittelbar aus der Identität

$$T_xH_v(\Phi)=H_v(T_x\Phi); \quad \forall\, \Phi\in\widehat{D}, x\in\mathbf{R}. \tag{2.12}$$

Die Beziehung (2.10) wurde in [1] für markierte Punktprozesse bewiesen; wir können daher auf die Richtigkeit von (2.10) im nichtmarkierten Fall schließen. Weiter können wir nach [1] aus der Voraussetzung, daß P $\mathfrak{V}$-verschiebbar ist, schlußfolgern, daß $P^0(D)=1$ gilt.

2. Den Beweis von (2.11) führen wir zunächst unter der zusätzlichen Voraussetzung durch, daß v beschränkt ist, d. h. es existiert ein $c>0$, so daß gilt $|v(\Phi)|<c$; $\forall\, \Phi\in D$. Aufgrund von (2.12), (2.8) und (2.9) erhalten wir dann für beliebiges $Z\in\mathfrak{M}^0$ und beliebiges n aus $\mathbf{N}$ die folgende Gleichungskette:

$$({}_DP^0)\circ(H_v^0)^{-1}(Z)=\int P(d\Phi)k_Z(H_v^0(\Phi))$$

$$=\frac{1}{n\lambda_P}\int P(d\Phi)\int_0^n \Phi(dx)k_Z(H_v^0(T_x\Phi))=\frac{1}{n\lambda_P}\int P(d\Phi)\int_0^n \Phi(dx)k_Z(T_{x-v(T_x\Phi)}H_v(\Phi)).$$

Für die Palmsche Verteilung $(P_{\mathfrak{V}})^0$ von $P_{\mathfrak{V}}$ erhalten wir unter Verwendung von (2.10) für alle $n\in\mathbf{N}$ und beliebiges $Z\in\mathfrak{M}^0$

$$(P_{\mathfrak{V}})^0(Z)=\frac{1}{n\lambda_{P_{\mathfrak{V}}}}\int({}_{\widehat{D}}P)\circ(H_v)^{-1}(d\Phi)\int_0^n \Phi(dx)k_Z(T_x\Phi)$$

$$=\frac{1}{n\lambda_P}\int P(d\Phi)\int_0^n H_v(\Phi)(dx)k_Z(T_x H_v(\Phi))$$

$$=\frac{1}{n\lambda_P}\int P(d\Phi)\int \Phi(dx)k_Z(T_{x-v(T_x\Phi)}H_v(\Phi))k_{(A_n^\Phi)}(x),$$

wobei für alle $\Phi\in\widehat{D}$

$$A_n^\Phi=\{x\in\mathbf{R}:\ \Phi(\{x\})>0,\ x-v(T_x\Phi)\in[0,n]\}$$

gesetzt wurde.

Berücksichtigen wir die an v gestellte Beschränktheitsforderung, so erhalten wir für alle $n\in\mathbf{N}$ und beliebiges $Z\in\mathfrak{M}^0$ die folgende Ungleichungskette:

$$|({}_DP^0)\circ(H_v^0)^{-1}(Z)-(P_{\mathfrak{V}})^0(Z)|$$

$$\leq\frac{1}{n\lambda_P}\int P(d\Phi)\,|\int\Phi(dx)k_Z(T_{x-v(T_x\Phi)}H_v(\Phi))k_{[0,n]}(x)$$

$$-\int\Phi(dx)k_Z(T_{x-v(T_x\Phi)}H_v(\Phi))k_{A_n^\Phi}(x)|$$

$$\leq\frac{1}{n\lambda_P}\int P(d\Phi)\int\Phi(dx)k_Z(T_{x-v(T_x\Phi)}H_v(\Phi))\,|k_{[0,n]}(x)-k_{A_n^\Phi}(x)|$$

$$\leq\frac{1}{n\lambda_P}\int P(d\Phi)\int\Phi(dx)\,|k_{[0,n]}(x)-k_{A_n^\Phi}(x)|\leq\frac{1}{n\lambda_P}\int P(d\Phi)\,(\Phi([-c,0])+\Phi([0,c])$$

$$+\Phi([n-c,n])+\Phi([n,n+c]))=\frac{4}{n\lambda_P}\int P(d\Phi)\Phi([0,c])=\frac{4c}{n}\cdot$$

Aus der Beliebigkeit von $n\in\mathbf{N}$ folgt, daß (2.11) für beschränkte v richtig ist.

3. Sei nun $\mathfrak{V}=[v,D]$ eine beliebige ordnungsstabile Verschiebung und $\mathfrak{V}_m=[v_m,D]$, $m\in\mathbf{N}$, die gemäß (2.2) definierte Folge beschränkter ordnungsstabiler Verschiebungen. Nach 2.1 gelten die Beziehungen (2.4) und (2.5). Daraus kann man unmittelbar schlußfolgern, daß die Konvergenzaussagen

$$({}_DP^0)\circ(H_{v_m}^0)^{-1}\underset{m\to\infty}{\overset{\mathbf{P}}{\Longrightarrow}}({}_DP^0)\circ(H_v^0)^{-1} \tag{2.13}$$

und

$$P_{\mathfrak{V}_m}\underset{m\to\infty}{\overset{\mathbf{P}}{\Longrightarrow}}P_{\mathfrak{V}} \tag{2.14}$$

richtig sind.

Aus dem zweiten Beweisschritt haben wir

$$({}_DP^0)\circ(H_{v_m}^0)^{-1}=(P_{\mathfrak{V}_m})^0\quad\forall\, m\in\mathbf{N}. \tag{2.15}$$

Somit erhalten wir aus (2.13)

$$(P_{\mathfrak{V}_m})^0\underset{m\to\infty}{\overset{\mathbf{P}}{\Longrightarrow}}({}_DP^0)\circ(H_v^0)^{-1}. \tag{2.16}$$

Nach (2.10) gilt weiter $\lambda_{P_{\mathfrak{V}_m}}=\lambda_P$; $\forall\, m\in\mathbf{N}$. Nach dem Stetigkeitssatz (s. [5], Satz 4.6.5) muß dann ein stationärer Punktprozeß Q endlicher Intensität existieren mit

$$P_{\mathfrak{V}_m} \underset{m\to\infty}{\overset{\mathbf{P}}{\Longrightarrow}} Q$$

und $Q^0 = ({}_D P^0) \circ (H_v^0)^{-1}$. In Verbindung mit (2.14) ergibt das (2.11). Damit ist Theorem 2.2 bewiesen.

Wir führen nun gemäß [2] noch den Begriff einer *Verschiebungshalbgruppe* ein. Dazu benötigen wir zunächst eine Operation zwischen zwei Verschiebungen.

Seien $\mathfrak{V}_1 = [v_1, D]$ und $\mathfrak{V}_2 = [v_2, D]$ zwei Verschiebungen, für die $H_{v_1}^0(\Phi) \in D$; $\forall\, \Phi \in D$ gilt.

Wir setzen

$$(v_1 \oplus v_2)(\Phi) = v_1(\Phi) + v_2(H_{v_1}^0(\Phi)); \quad \forall\, \Phi \in D. \tag{2.17}$$

Offensichtlich ist $v_1 \oplus v_2$ wiederum eine meßbare Abbildung von $[D, \mathfrak{M} \cap D]$ in $[\mathbf{R}, \mathfrak{A}]$. Es gilt die Gleichheit

$$H_{v_1 \oplus v_2}^0(\Phi) = H_{v_2}^0(H_{v_1}^0(\Phi)): \quad \forall\, \Phi \in D. \tag{2.18}$$

Folglich ist $[v_1 \oplus v_2, D]$ wieder eine Verschiebung. Ein Punktprozeß P ist genau dann $\mathfrak{V}_1 \oplus \mathfrak{V}_2$-verschiebbar, wenn P $\mathfrak{V}_1$-verschiebbar ist. Dabei gilt

$$P_{\mathfrak{V}_1 \oplus \mathfrak{V}_2} = (P_{\mathfrak{V}_1})_{\mathfrak{V}_2}. \tag{2.19}$$

Man kann also die Verschiebung des Punktprozesses P gemäß $\mathfrak{V}_1 \oplus \mathfrak{V}_2$ durchführen, indem man zunächst gemäß $\mathfrak{V}_1$ und anschließend mit $\mathfrak{V}_2$ verschiebt.

Sei nun für jedes $t \in [0, \infty)$ eine Verschiebung $\mathfrak{V}_t = [v_t, D]$ gegeben, für die $H_{v_t}^0(\Phi) \in D$; $\forall\, \Phi \in D$ gilt. Weiter sei $[t, \Phi] \to v_t(\Phi)$ eine meßbare Abbildung von $[[0, \infty) \times D, (\mathfrak{A} \cap [0, \infty)) \times \mathfrak{M} \cap D]$ in $[\mathbf{R}, \mathfrak{A}]$. Die Schar $\mathfrak{W} = (\mathfrak{V}_t)_{t \geq 0}$ bildet eine Verschiebungshalbgruppe, wenn gilt

$$\mathfrak{V}_{t_1} \oplus \mathfrak{V}_{t_2} = \mathfrak{V}_{t_1 + t_2}; \quad \forall t_1, t_2 \in [0, \infty). \tag{2.20}$$

Die Verschiebung $\mathfrak{V}_0$ spielt hierbei die Rolle des Nullelements der Halbgruppe. Eine Verschiebungshalbgruppe $(\mathfrak{V}_t)_{t \geq 0}$ heißt ordnungsstabil, wenn alle Verschiebungen $\mathfrak{V}_t$ ordnungsstabil sind.

Ein Punktprozeß P heißt $\mathfrak{W}$-*verschiebbar*, falls $P(\widehat{D}) = 1$ gilt. Einen $\mathfrak{W}$-verschiebbaren Punktprozeß P nennen wir $\mathfrak{W}$ — *invariant*, falls $P_{\mathfrak{V}_t} = P$; $\forall t \geq 0$ gilt.

Detailliertere Ausführungen kann man in [2] finden.

3. Lösung eines speziellen Differentialgleichungssystems. Es bezeichne wie in den vorangegangenen Kapiteln $\mathbf{R}^\Gamma$ den Raum aller beidseitig unendlichen Folgen reeller Zahlen. Elemente $(a_n)_{-\infty}^{+\infty}$ aus $\mathbf{R}^\Gamma$ bezeichnen wir wie bisher mit $\bar{a}$. Wir führen die folgende meßbare Untermenge von $\mathbf{R}^\Gamma$ ein:

$$\bar{\mathbf{R}}^\Gamma = \left\{ \bar{a} \in \mathbf{R}^\Gamma : \sup_{k \in \Gamma} \frac{|a_k|}{|k|+1} < \infty \right\}.$$

Wie man leicht überprüfen kann, bildet $\overline{\mathbf{R}}^\Gamma$ bezüglich der in üblicher Weise definierten Operationen „$+$", „$\cdot$" und versehen mit der Norm

$$\|\overline{a}\| = \sup\{|a_k|/(|k|+1) : k \in \Gamma\}$$

einen Banachraum. Wir benötigen den folgenden Hilfssatz:

3.1. *Für jede Folge $(\nu_i)_{i=0}^\infty$ nichtnegativer reeller Zahlen, für jedes $k \in \Gamma$ und beliebiges $\overline{a} \in \overline{\mathbf{R}}^\Gamma$ gilt die Ungleichung*

$$\sum_{i=0}^\infty \nu_i |a_{k-i}| \leq \|\overline{a}\| \left(\sum_{i=1}^\infty i\nu_i + (|k|+1) \sum_{i=0}^\infty \nu_i \right). \tag{3.1}$$

Beweis. Die Ungleichung (3.1) erhalten wir unmittelbar aus der für alle $\overline{a} \in \overline{\mathbf{R}}^\Gamma$ und jedes $k \in \Gamma$ geltenden Abschätzung

$$\sum_{i=0}^\infty \nu_i |a_{k-i}| = \sum_{i=0}^\infty (|k-i|+1)\nu_i \frac{|a_{k-i}|}{|k-i|+1} \leq \|\overline{a}\| \left((|k|+1) \sum_{i=0}^\infty \nu_i + \sum_{i=1}^\infty i\nu_i \right).$$

Setzen wir nun voraus, daß

$$\sum_{i=1}^\infty i\nu_i < \infty \tag{3.2}$$

gilt, so garantiert 3.1, daß das im folgenden Satz auftretende Differentialgleichungssystem sinnvoll ist, da die rechten Seiten absolut konvergente Reihen darstellen.

3.2. Theorem. *Eine Folge $(\nu_i)_{i=0}^\infty$ nichtnegativer reeller Zahlen erfülle* (3.2) *Dann besitzt das System von Differentialgleichungen*

$$\frac{da_k(t)}{dt} + \nu_0 a_k(t) = \sum_{i=1}^\infty \nu_i a_{k-i}(t); \qquad \forall k \in \Gamma \tag{3.3}$$

für beliebigen Anfangswert

$$(a_k(0))_{-\infty}^{+\infty} = \overline{a}^0 \in \overline{\mathbf{R}}^\Gamma \tag{3.4}$$

in $\overline{\mathbf{R}}^\Gamma$ genau eine für alle $t \geq 0$ erklärte Lösung $\overline{a}(t)$, die durch

$$a_k(t) = \sum_{i=0}^\infty a^t(i) a_{k-i}^0 \qquad \forall k \in \Gamma,\ t \geq 0 \tag{3.5}$$

mit $a^t(0) = e^{-\nu_0 t}$; $\quad \forall t \geq 0$,

$$a^t(i) = e^{-\nu_0 t} \sum_{l=1}^i \frac{t^l}{l!} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_l \geq 1 \\ i_1+\dots+i_l = i}} \nu_{i_1} \cdots \nu_{i_l}; \qquad \forall t \geq 0,\ i \in \mathbf{N} \tag{3.6}$$

gegeben ist.

Liegt der Anfangswert $\overline{a}^0$ in der Menge

$$\tilde{R}^\Gamma = \{\overline{a} \in \overline{\mathbf{R}}^\Gamma : a_k < a_{k+1} \text{ für alle } k \in \Gamma,\ \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} -a_{-k} = \infty\},$$

so liegt auch die Lösung $\overline{a}(t)$ für alle $t \geq 0$ in $\tilde{\mathbf{R}}^\Gamma$.

Beweis. 1. Wir weisen zunächst Existenz und Eindeutigkeit der Lösung nach. Offenbar ist das DGL-System (3.3) mit dem Anfangswert (3.4) gleichbedeutend mit der folgenden Differentialgleichung im Banachraum $\overline{\mathbf{R}}^\Gamma$:

$$d\bar{\alpha}(t)/dt = A\bar{\alpha}(t); \qquad \forall t \geq 0,$$
$$\bar{\alpha}(0) = \bar{\alpha}^0 \in \bar{\mathbf{R}}^{\Gamma},$$

wobei der Operator A durch die Matrix $(a_{ij})_{i,j \in \Gamma}$ beschrieben ist mit

$$a_{i,i} = -\nu_0; \qquad \forall i \in \Gamma$$
$$a_{i,i+k} = \nu_k \qquad \forall i \in \Gamma,\ k \in \mathbf{N},$$
$$a_{i,j} = 0 \qquad \forall i,\ j \in \Gamma \text{ mit } i > j.$$

Da die Folge $(\nu_i)_{i=0}^{\infty}$ die Bedingung (2.1) erfüllt, folgt unmittelbar aus 3.1, daß der lineare Operator A, $A: \bar{\mathbf{R}}^{\Gamma} \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}^{\Gamma}$, beschränkt ist. Nach einem bekannten Satz (vgl. z. B. [6], S. 138) hat deshalb (3.7) genau eine auf $[0, \infty)$ erklärte Lösung $\bar{\alpha}(t)$, die durch

$$\bar{\alpha}(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!}\right)\bar{\alpha}^0$$

gegeben ist, wobei A^0 den Einheitsoperator, A^n, $n \in \mathbf{N}$, die n-te Potenz von A bezeichnen.

2. Um die Lösung explizit angeben zu können, ermitteln wir vorerst die Gestalt der den Operator A^n beschreibenden Matrix $(a^n_{i,j})_{i,j \in \Gamma}$. Es erweist sich als zweckmäßig, die Konstanten ν_i folgendermaßen umzubenennen:

$$\mu_0 = -\nu_0, \ \mu_i = \nu_i; \qquad \forall i \in \mathbf{N}. \tag{3.8}$$

Wir zeigen induktiv, daß für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt

$$a^n_{i,i+k} = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \geq 0 \\ i_1+\dots+i_n = k}} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_n}; \qquad \forall i \in \Gamma,\ k = 0, 1, \dots \tag{3.9}$$
$$a^n_{i,j} = 0; \qquad i, j \in \Gamma \text{ mit } i > j.$$

Für $n=1$ ist (3.9) offensichtlich richtig. Wir nehmen nun an, (3.9) sei für $n = 1, \dots, l$ richtig. Da A^{l+1} durch $A^{l+1} = A(A^l)$ definiert ist, haben wir

$$a^{l+1}_{i,j} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{i,k} a^l_{k,j}; \qquad \forall i, j \in \Gamma.$$

Für $-\infty < k < i$ ist $a_{i,k} = 0$, für $j < k < \infty$ gilt aufgrund der Indiktionsvoraussetzung $a^l_{k,j} = 0$. Folglich haben wir $a^{l+1}_{i,j} = 0$; $\forall i, j \in \Gamma$ mit $i > j$. Es sei nun $j = i + k$, $i \in \Gamma$, $k \in \{0, 1, \dots\}$. Dann erhalten wir

$$a^{l+1}_{i,i+k} = \sum_{m=i}^{i+k} a_{i,m} a^l_{m,i+k} = \sum_{m=i}^{i+k} a_{i,i+(m-i)} a^l_{i,i+k-(m-i)}$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \mu_m \sum_{\substack{i_1,\dots,i_l \geq 0 \\ i_1+\dots+i_l = k-m}} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_l} = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{l+1} \geq 0 \\ i_1+\dots+i_{l+1} = k}} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_{l+1}}.$$

Damit ist (3.9) gezeigt.

3. Die dem Operator $\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n t^n / n!$ entsprechende Matrix bezeichnen wir mit $(a_{i,j}(t))_{i,j \in \Gamma}$, $t \geq 0$. Aus (3.9) entnehmen wir

$$a_{i,j}(t) = 0; \qquad \forall t \geq 0,\ i,\ j \in \Gamma \text{ mit } i > j \tag{3.10}$$

Desweiteren erhalten wir für beliebiges $t \geq 0$ und alle $i \in \Gamma$

$$a_{i,i}(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\mu_0 t)^n = e^{-\nu_0 t} \tag{3.11}$$

und für $j = i + k$, $i \in \Gamma$, $k \in \mathbf{N}$

$$a_{i,i+k}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \geq 0 \\ i_1+\dots+i_n = k}} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_n}. \tag{3.12}$$

Da in (3.12) die Konstante μ_0 höchstens $n-1$ und mindestens $\max(0, n-k)$-mal vorkommt, erhalten wir die Gleichungskette

$$a_{i,i+k}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{l=\max(0,n-k)}^{n-1} \binom{n}{l} \mu_0^l \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n-1} \geq 1 \\ i_1+\dots+i_{n-1} = k}} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_{n-1}} \tag{3.13}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=\max(0,n-k)}^{n-1} \frac{t^{n-l}}{(n-l)!} \cdot \frac{(\mu_0 t)^l}{l!} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n-1} \geq 1 \\ i_1+\dots+i_{n-1} = k}} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_{n-1}}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\mu_0 t)^l}{l!} \sum_{n=l+1}^{k+l} \frac{t^{n-l}}{(n-l)!} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n-1} \geq 1 \\ i_1+\dots+i_{n-1} = k}} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_{n-1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mu_0 t)^l}{l!} \sum_{n=1}^{k} \frac{t^n}{n!} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \geq 1 \\ i_1+\dots+i_n = k}} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_n}$$

Das Umgruppieren der Summen war erlaubt, da die Reihen $a_{i,i+k}(t)$ absolut konvergent sind. Aus (3.10), (3.11) und (3.13) können wir unmittelbar auf (3.5) und (3.6) schließen.

4. Wir nehmen nun an, das $\bar{\alpha}^0$, zu $\tilde{\mathbf{R}}^{\Gamma}$ gehört. Wir müssen noch zeigen, daß daraus $\alpha(t) \in \tilde{\mathbf{R}}^{\Gamma}$; $\forall t \geq 0$ folgt, d. h. wir müssen die folgenden Beziehungen beweisen:

(a) $\qquad \alpha_k(t) < \alpha_{k+1}(t) \qquad \forall t \geq 0,\ k \in \Gamma,$

(b) $\qquad \lim_{k\to\infty} \alpha_k(t) = \infty \qquad \forall t \geq 0,$

(c) $\qquad \lim_{k\to\infty} \alpha_{-k}(t) = -\infty \qquad \forall t \geq 0.$

Offensichtlich gelten die Ungleichungen $a^t(0) > 0$, $a^t(k) \geq 0$; $\forall t \geq 0$, $k \in \mathbf{N}$. Aus der Voraussetzung $\alpha_k^0 < \alpha_{k+1}^0$; $\forall k \in \Gamma$ erhalten wir folglich für alle $t \geq 0$ und alle $k \in \Gamma$

$$\alpha_k(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a^t(i)\alpha_{k-i}^0 > \sum_{i=0}^{\infty} a^t(i)\alpha_{k+1-i}^0 = \alpha_{k+1}(t),$$

d. h. (a) ist richtig.

Es gilt offensichtlich $\lim_{k\to\infty} a^t(0)\alpha_{-k}^0 = -\infty$; $\forall t \geq 0$. Weiter existiert ein k_0, so daß die Ungleichung $a^t(0)\alpha_{-k}^0 \geq \alpha_{-k}(t)$; $\forall t \geq 0$, $k \geq k_0$ gilt. Daraus folgt unmittelbar (c).

Wir haben desweiteren $\lim_{k\to\infty} a^t(0)\alpha_k^0 = 0$; $\forall t \geq 0$. Um (b) zu beweisen, ist es demzufolge ausreichend zu zeigen, daß gilt

$$\inf_{k\geq 0} \sum_{i=1}^{\infty} a^t(i+k)\alpha^0_{-i} > -\infty\,; \qquad \forall t \geq 0. \tag{3.14}$$

Wir erhalten zunächst folgende Abschätzung

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^t(i+k)\,|\alpha^0_{-i}| = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)a^t(i+k)\frac{|\alpha^0_{-i}|}{i+1}$$

$$\leq \|\overline{\alpha}^0\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} i a^t(i+k) + \sum_{i=0}^{\infty} a^t(i+k)\right) \leq \|\overline{\alpha}^0\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} i a^t(i) + \sum_{i=0}^{\infty} a^t(i)\right).$$

Folglich ist (3.14) und damit (b) bewiesen, wenn wir gezeigt haben, daß gilt $\sum_{i=1}^{\infty} ia^t(i) < \infty\,;\ \ \forall t \geq 0$. Zu diesem Zweck beweisen wir die Gleichheit

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a^t(i) = t\left(\sum_{i=1}^{\infty} i\nu_i\right)\exp\left(t\left(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i - \nu_0\right)\right); \qquad \forall t \geq 0, \tag{3.15}$$

die wir auch in späteren Betrachtungen benötigen werden. Wir haben zunächst

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a^t(i) = e^{-\nu_0 t} \sum_{i=1}^{\infty} i \sum_{k=1}^{i} \frac{t^k}{k!} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\geq 1\\ i_1+\dots+i_k=i}} \nu_{i_1}\cdots\nu_{i_k} \tag{3.16}$$

$$= e^{-\nu_0 t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\sum_{i=k}^{\infty} i \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\geq 1\\ i_1+\dots+i_k=1}} \nu_{i_1}\cdots\nu_{i_k}.$$

Wir zeigen nun induktiv, daß für alle l aus $\mathbf{N}$ die Beziehung

$$\sum_{i=l}^{\infty} i \sum_{\substack{i_1,\dots,i_l\geq 1\\ i_1+\dots+i_l=i}} \nu_{i_1}\cdots\nu_{i_l} = l\left(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i\right)^{l-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} j\nu_j\right) \tag{3.17}$$

gilt. Offensichtlich ist (3.17) für $l=1$ richtig. Wir nehmen nun an, (3.17) wäre für $l=k\geq 1$ richtig. Unter Benutzung der leicht überprüfbaren Identität

$$\sum_{i=l}^{\infty} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_l\geq 1\\ i_1+\dots+i_l=i}} \nu_{i_1}\cdots\nu_{i_l} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i\right)^l; \qquad \forall l \in \mathbf{N} \tag{3.18}$$

und der Induktionsvoraussetzung erhalten wir für $l=k+1$

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} i \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{k+1}\geq 1\\ i_1+\dots+i_{k+1}=i}} \nu_{i_1}\cdots\nu_{i_{k+1}} = \sum_{i=k+1}^{\infty} i \sum_{j=1}^{i-k}\nu_j \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\geq 1\\ i_1+\dots+i_k=i-j}} \nu_{i_1}\cdots\nu_{i_k}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\nu_j \sum_{i=j+k}^{\infty} i \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\geq 1\\ i_1+\dots+i_k=i-j}} \nu_{i_1}\cdots\nu_{i_k} = \sum_{j=k}^{\infty}\nu_j\sum_{i=k}^{\infty}(j+k)\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\geq 1\\ i_1+\dots+i_k=i}} \nu_{i_1}\cdots\nu_{i_k}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j\nu_j \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\geq 1\\ i_1+\dots+i_k=i}} \nu_{i_1}\cdots\nu_{i_k} + \sum_{j=1}^{\infty}\nu_j\sum_{i=k}^{\infty} k \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\geq 1\\ i_1+\dots+i_k=i}} \nu_{i_1}\cdots\nu_{i_k}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} j\nu_j\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i\right)^k + k\left(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i\right)^k\left(\sum_{j=1}^{\infty} j\nu_j\right) = (k+1)\left(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i\right)^k\left(\sum_{j=1}^{\infty} j\nu_j\right).$$

Damit ist (3.17) bewiesen. Aus (3.17) und (3.16) erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{\infty} ia^t(i)=e^{-\nu_0 t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(\sum_{j=1}^{\infty} j\nu_j\right)k\left(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i\right)^{k-1}=t\left(\sum_{j=1}^{\infty} j\nu_j\right)\exp\left(t\left(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i-\nu_0\right)\right).$$

(3.16) ist also richtig. Der Beweis von Theorem 3.2 ist somit abgeschlossen.

Wir wollen später mit Hilfe von Theorem 3.2 eine Verschiebungshalbgruppe aufbauen. Dazu stellen wir an die Folge $(\nu_i)_{i=0}^{\infty}$ nichtnegativer reeller Zahlen stets die Forderungen

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\nu_i<\infty,\quad \nu_0=\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i. \tag{3.19}$$

Wir können den folgenden Satz formulieren:

3.3. *Sei* $(\nu_i)_{i=0}^{\infty}$ *eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit* (3.19). *Dann ist für jedes* $t\geqq 0$ *durch* (3.6) *ein Verteilungsgesetz* a^t *auf den nichtnegativen ganzen Zahlen gegeben mit*

$$\sum_{i=1}^{\infty} ia^t(i)=t\sum_{i=1}^{\infty} i\nu_i\qquad \forall t\geqq 0 \tag{3.20}$$

und

$$a^{t_1}*a^{t_2}=a^{t_1+t_2}\qquad t_1,\ t_2\geqq 0. \tag{3.21}$$

Beweis 1. Offensichtlich ist für jedes $t\geqq 0$ und jedes $i\in\{0,1,\dots\}$ der Ausdruck $a^t(i)$ nichtnegativ. Um zu zeigen, daß a^t für jedes $t\geqq 0$ ein Verteilungsgesetz auf den nichtnegativen ganzen Zahlen ist, reicht es also aus, die Beziehung $\sum_{i=0}^{\infty} a^t(i)=1$; $\forall t\geqq 0$ zu beweisen. Aufgrund unserer Voraussetzung (3.19) erhalten wir unter Benutzung der Identität (3.18) für alle $t\geqq 0$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^t(i)=e^{-\nu_0 t}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{i}\frac{t^l}{l!}\sum_{\substack{i_1,\dots,i_l\geqq 1\\ i_1+\dots+i_l=i}}\nu_{i_1}\dots\nu_{i_l}\right)$$

$$=e^{-\nu_0 t}\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{t^l}{l!}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\substack{i_1,\dots,i_l\geqq 1\\ i_1+\dots+i_l=i}}\nu_{i_1}\dots\nu_{i_l}\right)$$

$$=e^{-\nu_0 t}\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{(t\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i)^l}{l!}\right)\right)=\exp\left(t\left(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i-\nu_0\right)\right)=1.$$

Die Beziehung (3.20) erhalten wir unmittelbar aus (3.15) unter Verwendung unserer Voraussetzung (3.19).

2. Wir kommen nun zum Beweis von (3.21). Wir betrachten zu diesem Zweck die erzeugende Funktion $f_{(a^t)}$ des Verteilungsgesetzes a^t. Unter Verwendung von (3.18) erhalten wir für beliebiges $t\geqq 0$ und $z\in\mathbf{R}$

$$f_{a^t}(z)=e^{-\nu_0 t}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{i}\frac{t^k}{k!}\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\geqq 1\\ i_1+\dots+i_k=i}}\nu_{i_1}\dots\nu_{i_k}\right)z^i\right)$$

$$=e^{-\nu_0 t}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\sum_{i=k}^{\infty}\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\geqq 1\\ i_1+\dots+i_k=i}}(\nu_{i_1}z^{i_1})\dots(\nu_{i_k}z^{i_k})\right)$$

$$= e^{-\nu_0 t}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i z^i\right)^k\right)=\exp\left(t\left(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i z^i-\nu_0\right)\right).$$

Wir erhalten somit für alle $t_1,\ t_2 \geq 0$ und alle $z \in \mathbf{R}$

$$f_{(a^{t_1})}(z)\cdot f_{(a^{t_2})}(z)=\exp\left((t_1+t_2)\left(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i z^i-\nu_0\right)\right)=f_{(a^{t_1+t_2})}(z).$$

Dies heißt aber, daß (3.21) richtig ist. Somit ist 3.3 bewiesen.

Wir bezeichnen mit p^{*m} die m-te Faltungsprotenz eines Verteilungsgesetzes $p(p^{*1}=p)$. Aus (3.21) folgt unmittelbar die Beziehung

$$a^m=(a^1)^{*m}; \qquad \forall m \in \mathbf{N} \tag{3.22}$$

Die gemäß (3.6) definierte Folge von Verteilungsgesetzen $(a^m)_{m\in N}$ stellt also eine Folge von Faltungspotenzen von a^1 dar. Wegen Satz 3 in [4] ist deshalb $(a^m)_{m\in N}$ genau dann asymptotisch gleichverteilt, wenn a^1 nichtgitterförmig ist. Offensichtlich ist $a^1(0)>0$. Somit ist a^1 genau dann nichtgitterförmig, wenn keine echte Untergruppe G von Γ existiert mit $a^1(G)=1$. Auf diese Weise erhalten wir

3.4. *Sei* $(\nu_i)_{i=0}^{\infty}$ *eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit* (3.19) *und* $\nu_0>0$. *Dann ist die durch* (3.6) *definierte Folge von Verteilungsgesetzen* $(a^m)_{m\in N}$ *genau dann asymptotisch gleichverteilt, wenn keine echte Untergruppe* G *von* Γ *existiert mit* $\{i\in N:\nu_i>0\}\subseteq G$.

Anmerkung. Offensichtlich ist die zusätzliche Bedingung $\nu_1>0$ somit hinreichend dafür, daß $(a^m)_{m\in N}$ asymptotisch gleichverteilt ist.

4. Eine spezielle ordnungsstabile Verschiebungshalbgruppe.

Wir kommen nun zum Hauptanliegen dieser Arbeit, der Untersuchung einer speziellen Verschiebungshalbgruppe.

Im weiteren sei stets $(\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit

$$0<\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i<\infty, \quad \lambda_i\geq\lambda_{i+1}; \quad \forall i\in\{0,\ 1,\ \ldots\}. \tag{4.1}$$

Für die durch $\nu_0=\lambda_0,\ \nu_i=\lambda_{i-1}-\lambda_i;\ \forall i\in\mathbf{N}$ definierte Folge nichtnegativer reeller Zahlen gilt dann (3.19) und $\nu_0>0$; denn wir haben

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\nu_i=\sum_{i=1}^{\infty} i(\lambda_{i-1}-\lambda_i)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i<\infty, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\nu_i=\lambda_0-\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\nu_0.$$

Wegen 3.3 ist deshalb durch (3.6) eine Schar von Verteilungsgesetzen $(a^t)_{t\geq0}$ auf den nichtnegativen ganzen Zahlen gegeben.

Wir setzen

$$D=\left\{\Phi\in\mathbf{M}_0:\ \sup_{k\in\Gamma}\frac{|x_k(\Phi)|}{|k|+1}<\infty\right\}. \tag{4.2}$$

Es gilt der folgende Satz:

4.1. Theorem. *Es existiert genau eine ordnungsstabile Verschiebungshalbgruppe* $\mathfrak{W}=([v_t, D])_{t\geq0}$ *mit den Eigenschaften*

$$\frac{d}{dt}v_t(\Phi)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i\, y_{-i}(H^0_{v_t}(\Phi)); \qquad \forall\Phi\in D, \quad t\geq0 \tag{4.3}$$

und

$$v_0(\Phi)=0\,;\quad \forall\Phi\in D. \tag{4.4}$$

$\mathfrak{W}$ *ist dabei gegeben durch*

$$v_t(\Phi)=-\sum_{i=0}^{\infty} a^t(i)x_{-i}(\Phi)\,;\quad \forall\Phi\in D,\quad t\geqq 0. \tag{4.5}$$

Beweis. 1. Wir weisen zunächst nach, daß die durch (4.5) definierte Schar $\mathfrak{W}=([v_t, D])_{t\geqq 0}$ eine ordnungsstabile Verschiebungshalbgruppe ist. Dazu müssen wir die folgenden Beziehungen beweisen:

(a) Für alle $t\geqq 0$ ist v_t eine meßbare Abbildung von $[D, \mathfrak{M}\cap D]$ in $[\mathbf{R}, \mathfrak{A}]$.

(b) Die Abbildung $[t, \Phi]\to v_t(\Phi)$ ist meßbar bezüglich $[[0, \infty]\times D, ([0, \infty)\cap\mathfrak{A})\times(\mathfrak{M}\cap D)]$ und $[\mathbf{R}, \mathfrak{A}]$.

(c) Für alle $t\geqq 0$ gilt $H^0_{v_t}(\Phi)\in D\,;\ \forall\Phi\in D$.

(d) Für alle $t\geqq 0$ und jedes $\Phi\in D$ ist die Ungleichung $0<x_1(\Phi)-v_t(\Theta\Phi)+v_t(\Phi)$ erfüllt.

(e) Es gilt $(v_{t_1}\oplus v_{t_2})(\Phi)=v_{t_1+t_2}(\Phi)\,;\ \forall\Phi\in D,\ t_1,\ t_2\geqq 0$.

Wir beweisen nun (a). Zunächst müssen wir zeigen, daß $v_t(\Phi)\in\mathbf{R}\,;\ \forall\Phi\in D$, $t\geqq 0$ gilt. Dies folgt aber unmittelbar aus Theorem 3.2, da der Ortslagenvektor jeder Punktfolge aus D zu $\tilde{\mathbf{R}}^{\Gamma}$ gehört. Somit gilt für alle $\Phi\in D$ und $t\geqq 0$, $0\leqq v_t(\Phi)<\infty$. Weiter ist für alle $k\in\Gamma$ die Abbildung $\Phi\to x_k(\Phi)\,;\ \forall\Phi\in D$ meßbar bezüglich $[D, \mathfrak{M}\cap D]$ und $[\mathbf{R}, \mathfrak{A}]$ (s. [5], Satz 2.7.5). Daraus folgt unmittelbar die Meßbarkeit von v_t für alle $t\geqq 0$. Damit ist (a) bewiesen.

Aus der Struktur der Verteilungsgesetze a^t, $t\geqq 0$ ist ersichtlich, daß für jedes feste Φ aus D die Abbildung $t\to v_t(\Phi)\,;\ \forall t\geqq 0$ stetig ist. Daraus und aus (a) folgt unmittelbar (b).

Wir zeigen nun, daß (c) richtig ist. Aufgrund der Beziehung

$$x_1(T_{x_k(\Phi)}\Phi)+x_k(\Phi)=x_{k+1}(\Phi)\,;\quad \forall\Phi\in\mathbf{M},\ k,\ l\in\Gamma \tag{4.6}$$

erhalten wir für alle $t\geqq 0$, $k\in\Gamma$ und $\Phi\in D$

$$x_k(\Phi)-v_t(\Theta^k\Phi)+v_t(\Phi)=\sum_{i=0}^{\infty} a^t(i)x_{k-i}(\Phi)-\sum_{i=0}^{\infty} a^t(i)x_{-i}(\Phi). \tag{4.7}$$

Nach Theorem 3.2 gilt aber $(\sum_{i=0}^{\infty} a^t(i)x_{k-i}(\Phi))_{k=-\infty}^{+\infty}\in\tilde{\mathbf{R}}^{\Gamma}$. Es ist aber offensichtlich, daß jeder Vektor aus $\tilde{\mathbf{R}}^{\Gamma}$ der Ortslagenvektor einer Punktfolge aus $\hat{D}=\bigcup_{a\in\mathbf{R}} T_a D$ ist.

Wegen

$$H^0_{v_t}(\Phi)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta_{x_k(\Phi)-v_t(\Theta^k\Phi)+v_t(\Phi)}\,;\quad \forall\Phi\in D,\quad t\geqq 0$$

und aufgrund von (4.7) gilt somit (c).

Aus (4.7) erhalten wit weiter für alle $t\geqq 0$ und $\Phi\in D$

$$x_1(\Phi)-v_t(\Theta\Phi)+v_t(\Phi)=\sum_{i=0}^{\infty} a^t(i)x_{-i+1}(\Phi)-\sum_{i=0}^{\infty} a^t(i)x_{-i}(\Phi)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a^t(i) y_{-i+1}(\Phi) \geq a^t(0) y_1(\Phi) > 0.$$

Damit ist (d) bewiesen.

Wir zeigen nun die Gleichheit $v_{t_1}(\Phi) + v_{t_2}(H^0_{v_{t_1}}(\Phi)) = v_{t_1+t_2}(\Phi)$; $\forall \Phi \in D$, t_1, $t_2 \geq 0$. Unter Verwendung von (3.21) erhalten wir für alle $\Phi \in D$ und beliebige t_1, $t_2 \geq 0$ die Gleichungskette

$$v_{t_1}(\Phi) + v_{t_2}(H^0_{v_{t_1}}(\Phi))$$

$$= - \sum_{i=0}^{\infty} a^{t_1}(i) x_{-i}(\Phi) - \sum_{i=0}^{\infty} a^{t_2}(i) \Big(\sum_{j=0}^{\infty} a^{t_1}(j)(x_{-i-j}(\Phi) - x_{-j}(\Phi)) \Big)$$

$$= - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a^{t_2}(i) a^{t_1}(j) x_{-(i+j)}(\Phi) = - \sum_{k=0}^{\infty} a^{t_1+t_2}(k) x_{-k}(\Phi) = v_{t_1+t_2}(\Phi).$$

Folglich ist (e) richtig.

2. Wir kommen nun zum Beweis von (4.3). Sei Φ eine beliebige Punktfolge aus D. Der Ortslagenvektor von Φ liegt dann in $\tilde{\mathbf{R}}^{\Gamma}$. Folglich ist nach Theorem 3.2 für alle $t \geq 0$ durch

$$x_k(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a^t(i) x_{k-i}(\Phi) = x_k(\Phi) - v_t(\Theta^k \Phi); \qquad \forall k \in \Gamma$$

eine Lösung des DGL-Systems

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = -\nu_0 x_k(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i x_{k-i}(t) = - \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i (x_{k-i}(t) - x_{k-i-1}(t)); \quad \forall k \in \Gamma$$

mit dem Anfangswert $(x_k(\Phi))_{-\infty}^{+\infty}$ gegeben. Wir haben somit für alle $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt} v_t(\Phi) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i (x_{-i}(\Phi) - v_t(\Theta^{-i}\Phi) - (x_{-i-1}(\Phi) - v_t(\Theta^{-i-1}\Phi)) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i y_{-i}(H^0_{v_t}(\Phi)).$$

Damit ist gezeigt, daß die durch (4.5) definierte Verschiebungshalbgruppe $\mathfrak{W}$ die Eigenschaft (4.3) besitzt. (4.4) folgt unmittelbar aus (4.5).

3. Wir müssen nun noch zeigen, daß nur eine ordnungsstabile Verschiebungshalbgruppe $\mathfrak{W}$ mit (4.3) und (4.4) existiert. Wir nehmen dazu an, daß noch eine zweite ordnungsstabile Verschiebungshalbgruppe $\bar{\mathfrak{W}} = ([\bar{v}_t, D])_{t \geq 0}$ mit den Eigenschaften (4.3) und (4.4) gegeben sei. Wir setzen für ein festes $\Phi \in D$ $\bar{x}_k(t) = x_k(\Phi) - \bar{v}_t(\Theta^k \Phi)$; $\forall t \geq 0$, $k \in \Gamma$. Unter Verwendung von (4.6) erhalten wir für alle k aus Γ und alle $t \geq 0$ aus (4.3)

$$\frac{d}{dt} \bar{v}_t(\Theta^k \Phi) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i (x_{-i}(\Theta^k \Phi) - \bar{v}_t(\Theta^{k-i}\Phi) - (x_{-i-1}(\Theta^k \Phi) - \bar{v}_t(\Theta^{k-i-1}\Phi)))$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i (x_{k-i}(\Phi) - \bar{v}_t(\Theta^{k-i}\Phi) - (x_{k-i-1}(\Phi) - \bar{v}_t(\Theta^{k-i-1}\Phi)))$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(\bar{x}_{k-i}(t) - \bar{x}_{k-i-1}(t)).$$

Somit gilt auch

$$\frac{d}{dt}\bar{x}_k(t) = -\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(\bar{x}_{k-i}(t) - \bar{x}_{k-i-1}(t)); \quad \forall t \geqq 0, \quad k \in \Gamma,$$

$$\bar{x}_k(0) = x_k(\Phi); \quad \forall k \in \Gamma.$$

Aufgrund von Theorem 3.2 erhalten wir deshalb $\bar{v}_t(\Phi) = -\sum_{i=0}^{\infty} a^t(i)\, x_{-i}(\Phi)$; $\forall \Phi \in D$, $t \geqq 0$. Damit ist Theorem 4.1 bewiesen.

Anmerkung. Der Beweis von Theorem 4.1 macht deutlich, daß die durch (4.5) gegebene Verschiebungshalbgruppe genau die gleiche Bewegung beschreibt wie das in der Einleitung erwähnte DGL-System. Eine Bewegung von Teilchen, bei der die Geschwindigkeit jedes Teilchens in der beschriebenen Weise linear von den Abständen zwischen den Teilchen abhängt, kann also stets durch die vermöge (4.5) definierte ordnungsstabile Verschiebungshalbgruppe charakterisiert werden. Im weiteren bezeichne immer $\mathfrak{W} = ([v_t, D])_{t \geqq 0}$ diese Verschiebungshalbgruppe.

Wir zeigen nun, daß die Menge D, definiert durch (4.2), hinreichend groß gewählt wurde, d. h. daß eine genügend große Klasse von Punktprozessen $\mathfrak{W}$— verschiebbar ist.

4.2. *Jedes stationäre Verteilungsgesetz P auf $[\mathbf{M}, \mathfrak{M}]$ mit endlicher Intensität ist $\mathfrak{W}$ — verschiebbar.*

Beweis. Offensichtlich müssen wir lediglich nachweisen, daß für P— fast alle Φ gilt

$$\sup_{k \in \Gamma} \frac{|x_k(\Phi)|}{|k|+1} < \infty. \tag{4.8}$$

Nach [5] S. 147 existiert aber für P — fast alle Φ die individuelle Intensität $s(\Phi)$,

$$s(\Phi) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi([0, n])}{n}$$

und ist aufgrund von $P(\{\mathbf{O}\}) = 0$ ($\mathbf{O}$ bezeichne die leere Realisierung in $\mathbf{M}$) P— fast überall positiv. Somit gilt für P — fast alle Φ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{-n}(\Phi)|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n(\Phi)|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\Phi([0, n])} < \infty.$$

Folglich ist (4.8) richtig und der Beweis von 4.2 beendet.

Wir können somit für jeden stationären Punktprozeß P endlicher Intensität und alle $t \geqq 0$ den gemäß $\mathfrak{V}_t = [v_t, D]$ verschobenen Punktprozeß $P_{\mathfrak{V}_t} = {}_D P \circ (H_{v_t})^{-1}$ bilden.

Einen stationären Punktprozeß P nennen wir ergodisch, wenn jedes $A \in \mathfrak{M}$ mit $A = T_x A$; $\forall x \in \mathbf{R}$ bezüglich P die Wahrscheinlichkeit Null oder Eins hat.

Im weiteren bezeichne stets Q_c für $c > 0$ den durch $Q_c^0 = \delta_{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{kc}}$ eindeutig festgelegten stationären Punktprozeß endlicher Intensität.

Wir sagen, daß die Folge $(\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ die *Eigenschaft* (a) besitzt, wenn keine echte Untergruppe G von Γ existiert mit $\{i\in\mathbf{N}: \lambda_{i-1}>\lambda_i\}\subseteq G$. Wir beweisen nun den folgenden Hauptsatz:

4.3. Theorem. *Die Folge $(\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ hat genau dann die Eigenschaft (a), wenn für alle ergodischen Punktprozesse P endlicher Intensität die Konvergenz*

$$P_{\mathfrak{V}_t} \xrightarrow[t\to\infty]{\mathbf{P}} Q_{1/\lambda_P} \tag{4.9}$$

stattfindet.

Beweis. 1. Die Folge $(\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ habe die Eigenschaft (a). Sei weiter P ein beliebiger ergodischer Punktprozeß mit endlicher Intensität. Aufgrund von Theorem 2.2 sind alle $P_{\mathfrak{V}_t}$ stationär, und es gilt

$$\lambda_P = \lambda_{P_{\mathfrak{V}_t}}; \quad \forall t\geq 0, \tag{4.10}$$

$$(P_{\mathfrak{V}_t})^0 = ({}_D P^0)\circ (H^0_{v_t})^{-1}; \quad \forall t\geq 0. \tag{4.11}$$

Nach [5] (Satz 3.6.12 und 3.6.13) ist $W=({}_D P^0)\circ Y^{-1}$ ein ergodisches Verteilungsgesetz auf $[\mathbf{R}^\Gamma, \mathfrak{A}^\Gamma]$ mit

$$E_W a_1 = 1/\lambda_P < \infty. \tag{4.12}$$

Aus $P^0(D)=1$ folgt unmittelbar $W(\mathbf{R}_0^\Gamma \cap \tilde{\mathbf{R}}^\Gamma)=1$. Wir berechnen nun $(P_{\mathfrak{V}_t})^0 \circ Y_k^{-1}$; $\forall t\geq 0$, $k\in\Gamma$. Aufgrund von (4.11) und der Beziehung

$$y_k(H^0_{v_t}(\Phi)) = \sum_{i=0}^{\infty} a^t(i)\, y_{k-i}(\Phi); \quad \forall \Phi\in D, \quad t\geq 0, \quad k\in\Gamma$$

erhalten wir für alle $t\geq 0$, $k\in\Gamma$

$$(P_{\mathfrak{V}_t})^0 \circ Y_k^{-1}(\cdot) = P^0\Big(\Phi\in D: \sum_{i=0}^{\infty} a^t(i)\, y_{k-i}(\Phi)\in(\cdot)\Big) \tag{4.13}$$

$$= W\Big(a\in \mathbf{R}_0^\Gamma\cap\tilde{\mathbf{R}}^\Gamma: \sum_{i=0}^{\infty} a^t(i) a_{k-i}\in(\cdot)\Big).$$

Aufgrund der Forderungen an die Folge $(\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ ist nach 3.4 die Folge von Verteilungsgesetzen $(a^m)_{m\in\mathrm{N}}$ asymptotisch gleichverteilt. Wir zeigen nun, daß für alle k aus Γ die Konvergenz

$$\operatorname{Var}(a^t - \delta_k * a^t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \tag{4.14}$$

statt hat. Sei also $(t_n)_{n\in\mathrm{N}}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen mit $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Offensichtlich existieren eine wachsende Folge $(m_n)_{n\in\mathrm{N}}$ natürlicher Zahlen und eine Folge $(\tau_n)_{n\in\mathrm{N}}$ nichtnegativer reeller Zahlen mit $t_n = m_n+\tau_n$; $\forall n\in\mathbf{N}$. Nach 3.3 gilt $a^{t_n} = a^{m_n} * a^{\tau_n}$; $\forall n\in\mathbf{N}$. Wir erhalten somit für alle $k\in\Gamma$ und alle n aus $\mathbf{N}$ $\operatorname{Var}(a^{t_n}-\delta_k * a^{t_n})\leq \operatorname{Var}(a^{m_n}-\delta_k * a^{m_n})$. Da $(a^m)_{m\in\mathrm{N}}$ asymptotisch gleichverteilt ist, gilt folglich (4.14). Daraus und aufgrund dessen, daß W ein ergodisches Verteilungsgesetz mit der Eigenschaft (4.12) ist, erhalten wir aus 1.3, daß die Konvergenz

$$\int W(d\bar{a}) \left| \sum_{i=0}^{\infty} a^t(i) a_{k-i} - \frac{1}{\lambda_p} \right| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

für alle k aus Γ stattfindet. Aus (4.13) folgt somit

$$(P_{\mathfrak{V}_t})^0 \circ Y_k^{-1} \xRightarrow[t\to\infty]{} \delta_{1/\lambda_p}; \quad \forall k \in \Gamma.$$

Nach 1.2 findet folglich die Konvergenz

$$(P_{\mathfrak{V}_t})^0 \xRightarrow[t\to\infty]{\mathbf{P}} Q^0_{1/\lambda_p}$$

statt. Wir können aufgrund von (4.10) den Stetigkeitssatz anwenden ([5], Satz 4.6.5) und erhalten

$$P_{\mathfrak{V}_t} \xRightarrow[t\to\infty]{\mathbf{P}} Q_{1/\lambda_p},$$

was zu beweisen war.

2. Wir nehmen nun an, die Folge $(\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ habe nicht die Eigenschaft (a). Folglich existiert eine echte Untergruppe $G_k = \{kl : l \in \Gamma\}$ mit $k \in \{2, 3, \ldots\}$ mit der Eigenschaft $\{i \in \mathbf{N} : \lambda_{i-1} > \lambda_i\} \subseteq G_k$. Aus der Struktur der a^t, $t \geq 0$ ist ersichtlich, daß $a^t(m) = 0$; $\forall t \geq 0$, $m \in \mathbf{N}$, $m \notin G_k$ gilt. Für jedes $j \in \{1, \ldots k\}$ legen wir nun eine Punktfolge Φ_j aus $\mathbf{M}^0$ fest durch $y_{kl-i}(\Phi_j) = k+1-(i+j)$; $\forall l \in \Gamma$, $i = 0, \ldots, k-1$. Man sieht leicht, daß $P^0 = k^{-1}\sum_{j=1}^{k} \delta_{\Phi_j}$ die Palmsche Verteilung eines ergodischen Punktprozesses P endlicher Intensität ist und daß $P_{\mathfrak{V}_t} = P$; $\forall t \geq 0$ gilt. Der Punktprozeß P ist also $\mathfrak{W}$ — invariant. Es findet also nich die Konvergenz (4.9) statt. Damit ist der Beweis von Theorem 4.3 beendet.

Zu jedem stationären Punktprozeß P endlicher Intensität können wir das Verteilungsgesetz σ_P der individuellen Intensität $s(\Phi)$ bilden, d. h. für jedes Interv all $[a, b) \subset [0, \infty)$ ist $\sigma_P([a, b)) = P(\Phi : s(\Phi) \in [a, b))$. Wir ersetzen nun die in Theorem 4.3 gemachte Voraussetzung, daß P ergodisch ist, durch die schwächere Annahme, daß P stationär ist und beweisen den folgenden Satz:

4.4. Folgerung. *Besitzt die Folge $(\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ die Eigenschaft (a), so findet für jeden stationären Punktprozeß P mit endlicher Intensität die Konvergenz*

$$P_{\mathfrak{V}_t} \xRightarrow[t\to\infty]{\mathbf{P}} \int \sigma_P(dc) Q_c \tag{4.15}$$

statt.

Beweis. Es bezeichne D die Menge aller ergodischen Punktprozesse endlicher Intensität. Der stationäre Punktprozeß P läßt sich in der Form $P = \int_D R \nu_P(dR)$ darstellen, wobei ν_P ein Verteilungsgesetz auf einer geeigneten σ-Algebra $\mathfrak{D}$ auf D ist [3].

Nach Theorem 4.3 findet für jedes $R \in D$ die Konvergenz

$$P_{\mathfrak{V}_t} \xRightarrow[t\to\infty]{\mathbf{P}} Q_{1/\lambda_R}$$

statt. Damit haben wir die Konvergenz

$$P_{\mathfrak{V}_t} \xRightarrow[t\to\infty]{\mathbf{P}} \int_D Q_{1/\lambda_R} \nu_P(dR).$$

Die Abbildung $H(R)=1/\lambda_R$ von $[D,\mathfrak{D}]$ in $[\mathbf{R}_+,\mathfrak{A}]$ ist meßbar, und wir haben $\nu_P\circ H^{-1}=\sigma_P$. Es ist daher

$$\int_D Q_{1/\lambda_R}\nu_P(dR)=\int_{R_+} Q_c\sigma_P(dc).$$

Damit ist 4.4 bewiesen.

Wir wollen nun noch einige Aussagen über die Struktur der stationären $\mathfrak{W}$-invarianten Punktprozesse P endlicher Intensität machen. Eine Punktfolge Φ heißt regulär, wenn für alle $k\in\Gamma$ $y_k(\Phi)=y_{k+1}(\Phi)$ gilt. Es bezeichne $\mathbf{M}_r$ die Menge aller regulären Punktfolgen. Einen Punktprozeß nennen wir regulär, wenn $P(\mathbf{M}_r)=1$ gilt. Offensichtlich ist ein stationärer Punktprozeß genau dann regulär, wenn er die Darstellung $P=\int\sigma_P(dc)Q_c$ besitzt. Es gilt der folgende Satz:

4.5. Theorem. *Jeder stationäre reguläre Punktprozeß P ist $\mathfrak{W}$-invariant.*

Beweis. Offensichtlich gilt $\mathbf{M}^\circ\cap\mathbf{M}_r\subseteq D$, wobei D durch (4.2) gegeben ist. Für jedes $c>0$ haben wir somit $Q_c^0(D)=1$. Für jedes $c>0$ ist somit $Q_c\mathfrak{W}$—verschiebbar. Weiter gilt

$$y_k(H^0_{v_t}(\Phi))=\sum_{i=0}^{\infty}a_t(i)y_{k-i}(\Phi)=y_k(\Phi);\ \forall t\geqq 0,\ \Phi\in\mathbf{M}^\circ\cap\mathbf{M}_r.$$

Wir erhalten folglich für alle $t\geq 0$ und alle $\Phi\in\mathbf{M}^\circ\cap\mathbf{M}_r$ $H^0_{v_t}(\Phi)=\Phi$. Nach Theorem 2.2 können wir unmittelbar auf $((Q_c)_{\mathfrak{V}_t})^0=(Q_c)^0$; $\forall c>0,t\geq 0$ und somit auf $(Q_c)_{\mathfrak{V}_t}=Q_c\ \forall c>0,t\geqq 0$ schließen.

Aus der Beziehung $P_{\mathfrak{V}_t}=\int\sigma_P(dc)(Q_c)_{\mathfrak{V}_t}$; $\forall t\geqq 0$ erhalten wir folglich $P_{\mathfrak{V}_t}=P$; $\forall t\geq 0$, was zu beweisen war.

Anmerkung. Wir sehen also, daß unabhängig davon, ob die Folge $(\lambda_i)_{i=0}^\infty$ die Eigenschaft (a) besitzt oder nicht, jeder stationäre reguläre Punktprozeß (endlicher Intensität oder nicht) $\mathfrak{W}$-invariant ist.

Aus dem zweiten Beweisschritt von Theorem 4.3 wird ersichtlich, daß ein stationärer $\mathfrak{W}$-invarianter nichtregulärer Punktprozeß endlicher Intensität existiert, falls $(\lambda_i)_{i=0}^\infty$ die Eigenschaft (a) nicht besitzt. Besitzt $(\lambda_i)_{i=0}^\infty$ die Eigenschaft (a), so gilt wegen Folgerung 4.4 für jeden stationären $\mathfrak{W}$-invarianten Punktprozeß P endlicher Intensität $P=\int\sigma_P(dc)Q_c$, d. h. P ist regulär. Wir haben also:

4.6. *Die Folge $(\lambda_i)_{i=0}^\infty$ besitzt genau dann die Eigenschaft (a), wenn jeder stationäre $\mathfrak{W}$-invariante Punktprozeß endlicher Intensität regulär ist.*

Abschließend wollen wir noch auf eine andere Interpretationsmöglichkeit des statistischen Ergodensatzes eingehen. Der statistische Ergodensatz läßt sich nämlich als Konvergenzsatz für spezielle Verschiebungen von Punktprozessen auffassen: Sei P ein ergodischer Punktprozeß mit $\lambda_P<\infty$ und $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge von Verteilungsgesetzen auf Γ mit

$$\lim_{m\to\infty}\int P^0\circ Y^{-1}(dy)\left|\sum_{i=-\infty}^{+\infty}a_m(i)y_{k-i}-\frac{1}{\lambda_P}\right|=0;\ \forall k\in\Gamma. \tag{4.16}$$

Vermöge

$$v_m(\Phi)=-\sum_{i=-\infty}^{+\infty}a_m(i)x_{-i}(\Phi);\ \forall\Phi\in D \tag{4.17}$$

kann man für jedes $m \in \mathbf{N}$ eine ordnungsstabile Verschiebung $\mathfrak{V}_m = [v_m, D]$ definieren.

Ähnliche Betrachtungen wie im ersten Beweisschritt von Theorem 4.3 führen zu dem Ergebnis, daß aus (4.16) die schwache Konvergenz

$$P_{\mathfrak{V}_m} \underset{m\to\infty}{\overset{\mathbf{P}}{\Longrightarrow}} Q_{1/\lambda_P} \tag{4.18}$$

folgt, wobei $\mathfrak{V}_m$ durch (4.17) definiert ist.

Andererseits ist es nicht schwierig, unter Verwendung der stets geltenden Gleichheit $\lambda_{P_{\mathfrak{V}_m}} = \lambda_P$ zu beweisen, daß die Konvergenz (4.18) die Beziehung (4.16) nach sich zieht. Wir verzichten auf eine ausführliche Darstellung. Wir erhalten dann somit

4.7. Theorem. *Sei P ein ergodischer Punktprozeß endlicher Intensität und $(a_m)_{m\in\mathbf{N}}$ eine Folge von Verteilungsgesetzen auf Γ. Weiter sei $(\mathfrak{V}_m)_{m\in\mathbf{N}}$ die durch* (4.17) *definierte Folge von Verschiebungen. Dann sind die folgenden zwei Bedingungen gleichbedeutend:*

$$\lim_{m\to\infty} \int P^0(d\Phi) \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_m(i)\, y_{k-i}(\Phi) - \frac{1}{\lambda_P} \right| = 0; \quad \forall\, k \in \Gamma,$$

$$P_{\mathfrak{V}_m} \underset{m\to\infty}{\overset{\mathbf{P}}{\Longrightarrow}} Q_{1/\lambda_P}.$$

LITERATUR

1. K.-H. Fichtner. Abhängige Verschiebungen I. *Math Nachr.* (im Druck).
2. K.-H. Fichtner. Abhängige Verschiebungen II. *Math. Nachr.* (Im Druck).
3. K.-H. Fichtner, J. Kerstan. Ergodische Zerlegungen (In Vorbereitung).
4. J. Kerstan, K. Matthes, Gleichverteilungseigenschaften von Verteilungsgesetzen auf lokalkompakten abelschen Gruppen I. *Math. Nachr.*, 37, 1968, Heft 5/6, 267—312.
5. J. Kerstan, K. Matthes, J. Mecke. Unbegrenzt teilbare Punktprozesse. Berlin, 1974.
6. K. Maurin. Analiza I. Warszawa, 1971.
7. J. Neveu. Mathematical foundations of the calculus of probability. San Francisco, London, Amsterdam, 1965.

Friedrich-Schiller-Universität
Sektion Mathematik
UHH, 17.0G DDR — 69 Jena

Eingegangen am 22. 8. 1977

Disskussionbeiträge

Hans Zessin: Motiviert durch Fragestellungen der klassischen Statistischen Mechanik ist in den letzten Jahren das Studium der Dynamik gewisser mehrdimensionaler, unendlicher und stetiger Partikelsysteme mit Hilfe wahrscheinlichkeitstheoretischer Methoden, die als wesentlichen Bestandteil Punktprozeßmethoden besitzen, interessant geworden. Zentrale Fragen für die Theorie der zeitlichen Entwicklung solcher Partikelsysteme, deren Dynamik durch die Newtonschen Gleichungen und für die Ort und Geschwindigkeit ihrer Partikel durch einen Punktprozeß beschrieben werden, sind A. die Existenz einer solchen Bewegung; B. die Kennzeichnung der Gleichgewichtszustände; C. die Konvergenz gegen das Gleichgewicht. In den Problembereichen A. und B. sind in der letzten Zeit erste Ergebnisse durch Lanford [1; 2] Sinai [3], Dobrushin, Fritz [4] und Gurevich, Suhov [5] erzielt worden. Jedoch erscheint es im Augenblick hoffnungslos, einen Ergodensatz für den Problembereich C. zu erzielen. Daher ist es sinnvoll und notwendig, zunächst Partikelsysteme zu untersuchen, deren Dynamik durch einfachere Bewegungsgesetze, insberondere lineare Differentialgleichungen, beschrieben wird. Ansätze hierzu, die auch die Skizze eines Ergodensatzes umfassen, sind von Spitzer [6] entwickelt worden. Die hier vorliegende sehr interessante Arbeit liefert nach Dobrushin's Satz über unabhängige Verschiebungen (1956) zum ersten Mal in strenger Form einen Ergodensatz für die zeitliche Entwicklung eines eindimensionalen, unendlichen, stetigen Partikelsystems mit Wechselwirkung, dessen Dynamik durch ein lineares Differentialgleichungssystem beschrieben wird. Zwei vielversprechende Richtungen, in die die Gedanken dieser Arbeit weiter verfolgt werden können, scheinen uns die folgenden zu sein: Einmal das Studium einfacher nichtlinearer deterministischer Systeme. Erinnert sei hier an Spitzer's Beispiel

$$\frac{dx_k}{dt}=\frac{1}{2}\cdot f\cdot[x_{k+1}(t)-x_k(t)]-\frac{1}{2}\cdot f\cdot[x_k(t)-x_{k-1}(t)]$$

$$x_k(0)=x_k,\quad t\geq 0,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,$$

wobei f eine geeignete reelle Funktion ist. Zum anderen sind stochastische Bewegungen wie unendlichdimensionale Wienerprozesse mit Wechselwirkung interessant, wie sie von Lang [7] untersucht wurden und für die bisher von den oben genannten Problembereichen erst A. und B. behandelt worden sind.

Bemerkung: Reinhard Lang verdanke ich hierzu einige Hinweise und Referenzen.

REFERENZEN

1. O. E. Lanford. Classical Mechanics of One-Dimensional Systems of Infinitely Many Particles. *Communs. Math. Phys.*, 9, 1969, 169—181 und 11, 1969, 257—292.
2. O. E. Lanford. Time evolution of large classical systems. *Springer Lecture Notes in Physics*, 38, 1975, 1—111.
3. Я. Г. Синай. Построение кластерной динамики для динамических систем статистической механики. *Вестник Моск. унив., Сер. I, Мат. мех.*, 29, 1974, № 1, 152—159.
4. R. L. Dobrushin, J. Fritz. Non equilibrium dynamics of infinite particle systems. (Preprint) 1977.
5. B. M. Gurevich, Ju. M. Suhov. Stationary solutions of the Bogulĭubov Hierarchy equations in Classical statistical mechanics 1. *Communs. Math. Phys.*, 49, 1976, 63—96.
6. F. Spitzer, Random processes defined through the interaction of an infinite particle system. *Springer Lécture Notes in Mathematics*, 89, 1969, 201—223.
7. R. Lang. Unendlich-dimensionale Wienerprozesse mit Wechselwirkung I, II. Erscheint in *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 39, 1977, 55—72; 39, 1977, 277—300.

Frank Spitzer (Ithaca, USA): I have long been interested in the topic of this paper. It concerns a class of time evolutions of simple one dimensional infinite particle systems. From the point of view of statistical mechanics the evolutions considered here are quite unnatural or unphysical because they are not governed by Hamiltonian dynamics. But just this fact gives them a special interest. While a Hamiltonian system by classical theorems for the case of a finite box, has the property that its spesific entropy must increase, we find here that exactly the opposite is true. The dynamics is defined (purposely I am sure) so that the system is highly self-organizing. In fact the main theorem (Theorem **4.3**) proves convergence of the system to one whose particles lie **equally spaced** on $\mathbb{R}$, with the given initial density. This process, among all stationary ones with the same intensity is of course the one whose **specific entropy is smallest**.

Concerning the elegant execution of the paper let me comment only on two major points. The natural choice of the Banach space of infinite point sequences in Theorem 3.2 leads efficiently to an elementary proof of the existence and uniqueness of the time evolution semigroup for any arbitrary initial stationary ergodic point process on $\mathbb{R}$. Then, since the evolution equations are linear, the time evolution is known explicitly. I would perhaps have emphasized that it is given by a probability semigroup, i. e. the position vector $x(t)=\{x_k(t), -\infty<k<\infty\}$ at time t is given by

$$x(t)=e^{-\lambda_0 t(I-P)}x(0), \tag{1}$$

where P is the infinite stochastic matrix $P(k, k-j)=\lambda_0^{-1}(\lambda_{j-1}-\lambda_j), j=1, 2, \ldots$ while $P(k, k+j)=0$ for $j\geqq 0$. This of course can be used, via classical local limit theorems for example, to prove convergence to the point process with equal spacings as $t\to\infty$. But the authors, quite rightly, chose to use the already available Theorem 3 in [4] to show that (1) has exactly the right equidistribution property, and thus to prove the ergodic theorem under the weakest possible conditions (the aperiodicity condition (a) on the sequence λ_i).

My initial interest in this type of problem is described in [3]. There the dynamics is given by

$$\frac{dx_k}{dt}=\frac{1}{2}f[x_{k+1}(t)-x_k(t)]-\frac{1}{2}f[x_k(t)-x_{k-1}(t)], \quad -\infty<k<\infty, \tag{2}$$

a non-linear system which becomes linear with the choice of $f(x)=x$. In this case one readily obtains the results of the present paper — although the model is different insofar as each "automobile" is influenced by the distance both to the one in front and the one behind. But it seemed clear that the main phenomenon — convergence to equal spacing—should be true even for certain non-linear f. In the above note I proved it — unfortunately without being able to show existence and uniqueness of the time evolution, under the assumption that f is strictly monotone increasing and that the spacings have finite second moments. Since then several authors ([*1*], [*2*],) have developed methods for the proof of the required existence and uniqueness. Thus this difficulty is no longer a reason to avoid non-linear evolution equations.

This brings us to an interesting open problem. Let us take the simplest case of the evolution treated here ($\lambda_0=1$, all other $\lambda_i=0$) so that

$$dx_k/dt=-x_k+x_{k-1}, \quad -\infty<k<\infty$$

and replace it by

$$dx_k/dt=-f[x_k-x_{k-1}], \quad -\infty<k<\infty, \tag{3}$$

where $f(x) \neq x$, but f is still a strictly monotonically increasing function, e. g. $f(x)=x^2$, or $f(x)=1-e^{-x}$. Then it appears likely that the conclusion of Theorem 4.3 should still hold, since the speed of the k-th particle to the left will increase with its distance from its nearest neighbourhood on the left. Unfortunately the method of proof in my above mentioned paper does not apply, even though (3) looks formally simpler than (2).

REFERENCES

1. O. Lanford. Time evolution of large classical systems. *Springer Lecture Notes in Physics*, 38, 1975, 1—111.
2. R. L. Dobrushin, J. Fritz. Non-equilibrium dynamics of infinite particle systems (to appear).
3. F. Spitzer. Random processes defined through the interaction of an infinite particle system. *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 89, 1969, 217—222.

Bemerkungen der Autoren zu den Diskussionsbeiträgen. In dem Diskussionsbeitrag von F. Spitzer wurde das Problem aufgeworfen, zeitliche Entwicklungen von Teilchensystemen zu untersuchen, deren Dynamik durch Differentialgleichungssysteme der Gestalt

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -f(x_i(t)-x_{i-1}(t)); \quad \forall\, i \in \Gamma \tag{1}$$

beschrieben werden. Auf diese Thematik wurde in allgemeinerer Form bereits in den Arbeiten [1, 2] eingegangen und eingehend die von H. Zessin angeschnittene Problemstellung A behandelt. Die zugrundeliegende Dynamik ist dabei so gewählt, daß, wenn wir bei der anschaulichen Vorstellung von sich bewegenden Fahrzeugkolonnen bleiben, die Geschwindigkeit des i-ten Fahrzeugs von den Abständen zu allen vorausfahrenden Fahrzeugen und von einem individuellen Faktor k_i (der Marke) beeinflußt wird, d. h.

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = g(k_i,\, x_{i+1}(t)-x_i(t),\, x_{i+2}(t)-x_i(t), \ldots); \quad \forall\, i \in \Gamma. \tag{2}$$

Von der reellen, nichtnegativen Funktion g wird vorausgesetzt, daß sie stetig in jeder Komponente ist, daß sie schwach monoton wächst und eine schwache Lipschitzbedingung erfüllt. Unter diesen Bedingungen wird in bezug auf die Problemstellung A die Existenz einer (2) entsprechenden zeitlichen Entwicklung gezeigt ([2, Theorem 1]). Weiter wird eine Halbgruppeneigenschaft der zeitlichen Entwicklung nachgewiesen ([2, Theorem 2]). Unter einigen zusätzlichen Voraussetzungen, die z. B. im Fall (1) trivialerweise erfüllt sind, wird ein Eindeutigkeitssatz bewiesen. ([2, Theorem 3]).

Die Problemstellung C, d. h. die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens einer (2) genügenden Zeitentwicklung bei $t \to \infty$, erweist sich, wie auch H. Zessin unterstreicht, als äußerst kompliziert. Die in [1; 2] verwendeten Methoden führen hierbei zu dem Problem, nichtlineare Ergodensätze zu beweisen.

Wir wollen noch einige Bemerkungen zum linearen Fall machen. F. Spitzer bemerkte in seinem Diskussionsbeitrag, daß die Ergebnisse dieser

Arbeit auch noch in dem Fall gültig sein müßten, wenn die Geschwindigkeit jedes Fahrzeugs vom Abstand zum Vorausfahrenden Fahrzeug und vom Abstand zum Hintermann linear (jedoch in der richtigen „Polung") abhängt, wie es zum Beispiel in der von F. Spitzer untersuchten Dynamik

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\frac{1}{2}\cdot f(x_{i+1}(t)-x_i(t))-\frac{1}{2}\cdot f(x_i(t)-x_{i-1}(t))\,;\ \forall\, i\in\Gamma \tag{3}$$

mit $f(x)=x$ der Fall ist. In der Tat, man kann ohne jegliche Momentenforderungen höherer Ordnung (wie bei F. Spitzer) zeigen, daß alle in der Arbeit erhaltenen Ergebnisse auch gelten, wenn die Dynamik durch

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(x_{i+k+1}(t)-x_{i+k}(t))-\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k(x_{i-k}(t)-x_{i-k-1}(t))\ \forall\, i\in\Gamma$$

gegeben ist, wobei

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k<\infty,\ \sum_{k=0}^{\infty}\mu_k<\infty,\ \lambda_k\geq\lambda_{k+1},\quad \mu_k\geq\mu_{k+1},\quad \forall\, k\in\{0,1,\dots\}$$

vorausgesetzt wird. Alle Beweise können ohne größeren Schwierigkeiten mit den in der Arbeit benutzten Methoden durchgeführt werden. Um asymptotische Gleichverteilung der Folge (a^{t_n}) zu sichern, genügt es, daß (λ_k) oder (μ_k) die Bedingung (a) erfüllt.

Wir betrachten einmal zum Beispiel die Lösung von (3) im Fall $f(x)=2cx$ mit $c>0$. Wir betrachten also das Differentialgleichungssystem

$$dx_i(t)/dt=cx_{i+1}(t)-2cx_i(t)+cx_{i-1}(t)\ \ \forall\, i\in\Gamma,$$
$$x_i(0)=x_i^0\,;\ \forall\, i\in\Gamma.$$

Als Lösung dieses DGL-Systems erhalten wir

$$x_i(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^t(k)\,.\,x_{i-k}^0\,;\ \forall\, i\in\Gamma,$$

wobei a^t durch

$$a^t(k)=e^{-2ct}(ct)^{|k|}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(ct)^l}{e\,!}\cdot\frac{(ct)^{l+|k|}}{(l+|k|)\,!}\,;\ \ \forall\, k\in\Gamma$$

gegeben ist. Für jedes $t\geq 0$ ist a^t wieder ein Verteilunsgesetz auf den ganzen Zahlen, wir haben $a^{t_1+t_2}=a^{t_1}*a^{t_2}$, $(a^t)_{t\geq 0}$ ist asymptotisch gleichverteilt usw. Alle Ergebnisse behalten in diesem Fall also ihre Gültigkeit.