Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОДНОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА С ГРУППОВЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ В РЕЖИМЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ

МИТКО Ц. ДИМИТРОВ

Рассматривается однолинейная система $M|G|1$ с групповым обслуживанием и дисциплиной разделения процессора. В систему поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью $\lambda>0$. Приведенное время обслуживания распределено по произвольному закону. Прибор обслуживает требования группами, причем в каждую группу входят требования, поступившие за время обслуживания предыдущей группы. Система обслуживания описывается марковским восстановительным процессом с дополнительными траекториями (MRPAP процесс). Находится стационарное распределение числа обслуживающихся требований, распределение длины очереди, преобразование Лапласа — Стильтеса времени пребывания с приводимым временем x в системе и его математическое ожидание.

1. Постановка задачи. Пусть дана однолинейная система массового обслуждания с бесконечным числом мест для ожидания. В систему поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью $\lambda>0$. Приведенное время обслуживания каждого требования распределено по произвольному закону $B(x)$ с математическим ожиданием β_1. Если в момент поступления требования в систему прибор окажется свободным, то требование поступает сразу на обслуживание. После окончания обслуживания первого требования прибор поступает к обслуживанию группы требований, поступивших за время обслуживания предыдущей группы. Каждая группа обслуживается следующим образом: если в данный момент в группе находятся n требований, то остаток приведенного времени до конца обслуживания каждого из них убывает со скоростью $1/n$ (отсюда и наименование дисциплины очереди).

2. Описание системы обслуживания с помощью MRPAP процесса. Чрез $A(t)$ обозначим функцию распределения времени между двумя последовательными моментамн поступления требований пуассоновского потока, т. е. $A(t)=1e^{-\lambda t}$, $\nu_1(t)$ — число обслуживаемых требований в момент t, $\nu_2(t)$ — длина очереди в момент t. Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ — моменты окончания или начала обслуживания групп требований. Будем предполагать, что в момент t_0 начинается период занятости системы и $t_0=0$. Если в момент τ_n период занятости окончился, то момент τ_{n+1} совпадает с моментом поступления следующего требования (т. е. с началом следующего периода занятости). Моменты $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ являются марковскими моментами регенерации процессов $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$. Через α_n обозначим марковскую цепь $\alpha_n=\nu_1(\tau_n+0)=\nu_2(\tau_n)$. Эволюция процессов $\nu_1(t)$ и $\nu_2(t)$ после каждого момента τ_n зависит только от значения α_n. Если $\alpha_n=i>0$, из принятой дисциплины обслуживания следует, что время $\tau_{n+1}-\tau_n$ распределено по закону $B_i(x)$ и $B_i(x)$ является i-кратной сверткой функций распределения $B(x)$. При $\alpha_n=0$, $\tau_{n+1}-\tau_n$ распределено по закону $A(x)$.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 4, 1978, с. 289–295.

Вероятности перехода P_{ij} вложенной цепи α_n можно определить следующим образом:

$$(1)\qquad P_{ij}=\int_0^\infty \frac{(\lambda u)^j e^{-\lambda u}}{j!}\,dB_i(u);\quad i\geqq 1,\ j=0,1,2,\ldots,\ P_{01}=1,\ P_{0j}=0,\ \forall j\neq 1.$$

Непосредственная проверка показывает, что если $\lambda\beta_1<1$, то

$$\sum_{j=0}^{\infty} jP_{ij}=i\lambda\beta_1<1 \quad \text{при} \quad i\geq 1,\ \text{а}\ \sum_{j=1}^{\infty} jP_{0j}=1<\infty \ \text{и}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\,(\sum_j jP_{ij}-i)=\limsup_{n\to\infty}\,(i\lambda\beta_1-i)<0.$$

В таком случае в силу леммы Шахбазова — Пакса [1; 3] марковская цепь α_n ергодична при $\lambda\beta_1<1$. Стационарные вероятности $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\ldots)$ цепи α_n являются решением системы уравнений

$$(2)\qquad \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i P_{ij}=\pi_j,\ j=0,1,2,\ldots,\ \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i=1.$$

Через $P(z)$ обозначим производящию функцию распределения $\{\pi_i\}$: $P(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j z^j$. Умножив обе стороны каждого из уравнений (2) на z^j и просуммировав по j от нуля до бесконечности, получим

$$(3)\qquad P(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i\sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}z^j+\pi_0 z=P(\beta(\lambda-\lambda z))-(1-z)\pi_0,$$

где $\beta(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dB(x)$. Пусть $1-z=u$, тогда можем записать

$$(4)\qquad P(1-u)=P(\beta(\lambda u)-u\pi_0=P(1-(1-\beta(\lambda u)))-u\pi_0\,.$$

Определим рекуррентные соотношения

$$\Psi_0(u)=u,\ \Psi_1(u)=\Psi(u)=1-\beta(\lambda u),\ \ldots,\ \Psi_{n+1}(u)=\Psi_n(\Psi(u)).$$

Проводя n указанных итераций и сложив полученные равенства, получим

$$(5)\qquad P(1-u)=P(1-\Psi_{n+1}(u))-\pi_0\sum_{k=0}^{n}\psi_k(u).$$

Нетрудно видеть, что при $|u|<1$ все $|\Psi_n(u)|<1$. Из (5) следует, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_k(u)$ сходится и $\lim_{n\to\infty}\Psi_n(u)=0$. В таком случае при $n\to\infty$ (5) принимает вид $(P(1)=1)$,

$$(6)\qquad P(1-u)=1-\pi_0\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_k(u).$$

При $u=1$ равенство (6) выглядит следующим образом: $P(0)=1+\pi_0\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_k(1)$, где $\pi_0=(1+\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_k(1))^{-1}$. Если $B(x)=1-e^{-\lambda x}$, то

$$\pi_0=(1+\sum_{k=0}^{\infty}\varrho^k/(1+\varrho+\cdots+\varrho^k))^{-1},\ \varrho=\lambda/\mu.$$

Этим самым доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $\lambda\beta_1<1$, то марковская цепь α_n эргодична и производящая функция предельного распределения цепи α_n имеет вид*

$$P(z)=1-\pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(1-z), \ \pi_0=(1+\sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(1))^{-1}.$$

Из (3) следует непосредственно, что

$$P'(1)=\frac{\pi_0}{1-\lambda\beta_1}, \quad P''(1)=\frac{\lambda^2\beta_2\pi_0}{(1+\lambda\beta_1)(1-\lambda\beta_1)^2}, P'''(1)=\frac{\pi_0[3\lambda^5\beta_1\beta_2^2+\lambda^3\beta_3(1-\lambda^2\beta_1^2)]}{(1-\lambda\beta_1)^2\,(1+\lambda\beta_1)(1-\lambda^3\beta_1^3)},$$

где $\beta_i=\int\limits_0^{\infty} x^i dB(x)$, $b_1(x)=\int\limits_0^{x} u^2 dB(u)+x^2\bar{B}(x)$.

Теперь определим полумарковский процесс $\xi(t)$ равенством $\xi(t)=\alpha_{n(t)}$, где $n(t)=\max\{n, \tau_n\leqq t\}$. Время пребывания $\xi(t)$ в состоянии i $(i\geqq 1)$ распределено по закону $B_i(x)$, а при $i=0$ — по закону $A(x)=1-e^{-\lambda x}$. Математическое ожидание времени пребывания процесса $\xi(t)$ в i-том состоянии $(i\geqq 1)$ равно $i\beta_1$ и при $i=0$ равно λ^{-1}.

Марковский восстановительный процесс с дополнительными траекториями (MRPAP процесс) характеризуется наличием точек регенерации τ_n и связанным с ними полумарковским процессом. Формальное определение MRPAP процесса можно найти в [2]. Процессы $X_1(t)=(\nu_1(t), U(t), \alpha_{n(t)})$ и $X_2(t)=(\nu_2(t), U(t), \alpha_{n(t)})$, где $U(t)=t-\tau_{n(t)}$ являются MRPAP процессами.

3. Стационарное распределение процессов $\nu_1(t)$ и $\nu_2(t)$. С помощью следствия 2[2] найдем стационарное распределение процессов $\nu_1(t)$ и $\nu_2(t)$. Прежде всего выясним, что выполнены все условия применимости упомянутого следствия. В данном случае $C=I=\{1, 2, \ldots\}$. В лемме 1 доказано, что при $\lambda\beta_1<1$ I является эргодичным классом состояния, и поэтому $K_C(+\infty)=1$. Так как длительность периода занятости системы не зависит от порядка обслуживания, то функция распределения $G_{00}(x)$ времени перехода процесса $\xi(t)$ из состояния 0 в состояние 0 является сверткой периода занятости системы $M|G|1$ (интенсивность входящего пауссоновского потока λ, а время обслуживания распределено по закону $B(x)$) и свободного периода с функцией распределения $A(x)=1-e^{-\lambda x}$, т. е. $G_{00}(x)$ содержит абсолютно непрерывную компоненту и $\int\limits_0^{\infty} x dG_{00}(x)=1/\lambda+\beta_1/(1-\lambda\beta_1)$. Этим самым мы показали, что выполнены все условия [2, 9.1]. В таком случае имеет место следующее утверждение:

Лемма 2. *Если $\lambda\beta_1<1$, то существует стационарное распределение процессов $\nu_1(t)$ и $\nu_2(t)$*

$$\lim_{t\to\infty} P\{\nu_1(t)=k\}=P_k^{(1)}$$

$$=\pi_0^{-1}(1-\lambda\beta_1)\sum_{i=k}^{\infty}\pi_i\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{u} C_i^k B^{i-k}\left(\frac{u-v}{k}\right)\bar{B}^k\left(\frac{u-v}{k}\right)dF_{i-k}(u);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(2)} z^k=1-\lambda\beta_1+\frac{1-\lambda\beta_1}{\pi_0}\,\frac{1-P(\beta(\lambda-\lambda z))-(1-z)(1-P(\beta(\lambda)))}{1-z},$$

где $\lim_{t\to\infty} P\{\nu_2(t)=k\}=P_k^{(2)}$ *и* $P(z)$ *находится из леммы* 1.

Доказательство. Поскольку выполнены условия применимости следствия [2, 9.1], то

$$\lim_{t=\infty} P\{\nu_1(t)=k\}=P_k^{(1)}=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i\eta_{ik}[\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i\eta_i]^{-1},$$

$$\text{где } \eta_i = \begin{cases} i\beta_1 & \text{при} \quad i \geqq 1 \\ \lambda^{-1} & \text{при} \quad i = 0 \end{cases}, \quad \eta_{ik} = \int_0^\infty \Psi_{ik}(u)du.$$

Имеем

$$\Psi_{ik}(u) = P\{\nu_1(u) = k, \ S_2 > u \mid S_1 = 0, \ \nu_1(0+) = i\}$$
$$= P\{ X_{(1)} + \cdots + X_{(i-k)} + \cdots + (i-k)\, X_{(i-k)} < u$$
$$< X_{(1)} + X_{(2)} + \cdots + X_{(i-k)} + (i-k)\, X_{(i-k+1)} \}$$
$$= \int_0^u P\{ v + (i-k) X_{(i-k)} < u < v + (i-k) X_{(i-k+1)} \}\, dF_{i-k}(v)$$
$$= \int_0^u P\{X_{(i-k)} < \frac{u-v}{i-k} < X_{(i-k+1)}\}\, dF_{i-k}(v),$$

при $i \geqq k$, или

$$\Psi_{ik}(u) = \begin{cases} \int_0^u C_i^k B^{i-k}\left(\frac{u-v}{i-k}\right) \bar{B}^k\left(\frac{u-v}{i-k}\right) dF_{i-k}^{(v)} & \text{при } i \geqq k, \\ 0 & \text{при } i < k, \end{cases}$$

$$\text{и} \quad F_0(v) = \begin{cases} 1 & \text{при } v \geqq 0, \\ 0 & \text{при } v < 0. \end{cases}$$

Откуда и следует выражение для $P_k^{(1)}$. Кроме того,

$$\sum_{i=0}^\infty \pi_i \eta_i = \sum_{i=1}^\infty i\pi_i \beta_1 + \pi_0 \lambda^{-1} = \pi_0 [\lambda(1 - \lambda\beta_1)]^{-1}.$$

Аналогичным образом находим $P_k^{(2)}$:

$$\lim_{t\to\infty} P\{ v_2(t) = k\} = P_k^{(2)} = \pi_0^{-1} \lambda (1 - \lambda\beta^1) \sum_{i=1}^\infty \pi_i \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^k}{k!} \bar{B}_i(u) du$$

при $k \geqq 1$ и $P_0^{(1)} = P_0^{(2)} = 1 - \lambda\beta_1$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^\infty P_k^{(2)} z^k = 1 - \lambda\beta_1 + \frac{(1-\lambda\beta_1)}{[\pi_0(1-z)]} [1 - P(\beta(\lambda - \lambda z)) - (1-z)(1 - P(\beta(\lambda)))].$$

4. Время пребывания требования с приведенным временем x в системе обслуживания. Г. И. Призва доказал, что для неприводимого положительно возвратного процесса $\xi(t)$ выполнено

$$\lim_{t\to\infty} P\{ v(t) > z, \ u(t) > x, \ \xi_{n(t)} = i, \ \xi_{n(t)+1} = k \mid \xi_{(0)} = r\} = \pi_j P_{jk} \sum_{x+z}^\infty (1 - S_{jk}(u) du / \Sigma \pi_i \eta_i,$$

где $S_{jk}(u) = Q_{jk}(u)/Q_{jk}(\infty)$, $u(t)$ — время, прошедшее с момента последнего скачка процесса $\xi(t)$ до момента t, $v(t)$ — время, оставшееся от момента t до момента следующего скачка процесса $\xi(t)$, $P = \| P_{ij} \|$ — матрица переходных вероятностей вложенной цепи Маркова; $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ — стационарное распределение вложенной цепи Маркова.

Для полумарковского процесса $\xi(t)$, введенного в конце пункта 2, имеем

$$Q_{jk}(u) = \int_0^u \frac{(\lambda y)^k e^{-\lambda y}}{k!} dB_j(y), \quad Q_{jk}(\infty) = P_{jk}.$$

Поэтому

(7) $\lim\limits_{t\to\infty} P\{ v(t)>z,\ u(t)>0, \xi_{n(t)}=j,\ \xi_{n(t)+1}=k \mid \xi_{(0)}=r\}=\pi_j P_{jk} \int\limits_z^\infty [1-S_{jk}(u)]du/\Sigma\pi_i\eta_i$,

где $S_{jk}^{(u)}=Q_{jk}(u)/Q_{jk}(\infty)$. Через $\tau^0(x)$ обозначим время пребывания требования с приведенным временем x в системе, а $\eta_{2,k}^0(x)$ — время обслуживания требования с приведенным временем x при условии, что в начальный момент его обслуживания наряду с ним обслуживаются ещё k других требований. Имеем

$$\beta_i=\int\limits_0^\infty x^i dB(x),\ i=1,2,3 \quad \text{и} \quad a_0(x)=x\bar{B}(x)+\int\limits_0^x u dB(u),$$

$$b_0(x)=x^2\bar{B}(x)+\int\limits_0^x u^2 dB(u),\ \ \varphi_0(s,x)=\bar{B}(x)e^{-sx}+\int\limits_0^\infty e^{-su}\,dB(u).$$

Теорема. *Если $\lambda\beta_1<1$ и существуют первые три момента приведенного времени обслуживания, то*

$$\text{а)}\ Me^{-s\tau^0(x)}=e^{-sx}\left\{\frac{\lambda(1-\lambda\beta_1)}{\pi_0 s}\left[P(\beta(\lambda(1-\varphi_0(s,\ x))))-P(\beta(\lambda(1-\varphi_0(s,x))+s))\right]\right.$$
$$\left.+1-\lambda\beta_1\right\};$$

$$\text{б)}\ M\tau^0(x)=\frac{\lambda\beta_2(1+2\lambda a_0(x))}{2(1-\lambda^2\beta_1^2)}+x,$$

$$M[\tau_0(x)]^2=x^2+\lambda\frac{\beta_2(1+2\lambda a_0(x))}{1-\lambda^2\beta_1^2}x+\frac{\lambda}{3(1-\lambda^2\beta_1^2)}\left\{3\lambda\beta_2 b_0(x)\right.$$
$$\left.+\frac{1+3\lambda a_0(x)+3\lambda^2 a_0^2(x)}{1-\lambda^3\beta_1^3}\times[\beta_3(1-\lambda^2\beta_1^2)+3\lambda^2\beta_1\beta_2^2]\right\}.$$

Доказательство. Величина $\tau^0(x)$ зависит от числа обслуживаемых требований в момент поступления требования и числа требований, вместе с которыми начинается обслуживание рассматриваемого требования. Заметим, что $\eta_{2,k}^0(x)=x+\Sigma_{i=1}^k \min(\xi_i,\ x)$, где $\xi_i (i=1,2,\ldots k$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $B(x)$. Действительно, пусть приведенные времена требований занумерованы таким образом, что $x_1<x_2<\cdots<x_k$ и $x_i<x<x_{i+1}$. Из принятой дисциплины обслуживания следует, что

$$\eta_{2,k}^0(x)=(k+1)x_1+k(x_2-x_1)+(k-1)(x_3-x_2)+\cdots+(k+2-i)(x_i-x_{i-1})$$
$$+(k+1-i)(x-x_i)=x_1+x_2+\cdots+x_i+(k+1-i)x=x+x_1+x_2+\cdots+x_i$$
$$+(k-i)x=x+\sum_{i=1}^k \min(x_i,\ x).$$

Итак,

$$M\exp[-s\eta_{2,k}^0(x)]=e^{-sx}\prod_{i=1}^k M\exp[-s\min(\xi_i,\ x)]=e^{-sx}\varphi_0^k(s,x),$$

где

$$\varphi_0(s,x)=M\exp[-s\min(\xi_i,\ x)]=\bar{B}(x)e^{-sx}+\int\limits_0^x e^{-su}\,dB(u). \tag{8}$$

С помощью формулы полной вероятности вероятностное толкование преобразования Лапласа и (7) и (8) можно найти

$$Me^{-s\tau^0(x)}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi_j P_{jk}}{\sum\pi_i\eta_i}\int_0^{\infty}e^{-su}[1-S_{jk}(u)]\,du\,M\exp[s\eta_{2k}^0(x)]+(1-\lambda\beta_1)e^{-sx}$$

$$=e^{-sx}\left\{\frac{1}{\sum\pi_i\eta_i}\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j\int_0^{\infty}e^{-su}\sum_{k=0}^{\infty}P_{jk}\varphi_0^k(s,x)[1-S_{jk}(u)]\,du+1-\lambda\beta_1\right\}$$

$$=e^{-sx}\left\{\frac{1}{\sum\pi_i\eta_i}\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j\int_0^{\infty}e^{-su}\left[\sum_{k=0}^{\infty}P_{jk}\varphi_0^k(s,x)-\sum_{k=0}^{\infty}P_{jk}\varphi_0^k(s,x)\frac{Q_{jk}(u)}{P_{jk}}\right]du+1-\lambda\beta_1\right\}$$

$$=e^{-sx}\left\{\frac{1}{s\sum\pi_i\eta_i}[P(\beta(\lambda-\lambda\varphi_0(s,x)))-P(\beta(\lambda-\lambda\varphi_0(s,x)+s))]+1-\lambda\beta_1\right\}.$$

Известно, что

$$M\tau^0(x)=-\frac{\partial Me^{-s\tau^0(x)}}{\partial s}\bigg|_{s=0},\quad -\frac{\partial\varphi_0(s,x)}{\partial s}\bigg|_{s=0}=x\bar B(x)+\int_0^x u\,dB(u)=a_0(x),$$

$$\frac{\partial^2\varphi_0(s,x)}{\partial^2 s}\bigg|_{s=0}=x^2\bar B(x)+\int_0^x u^2\,dB(u)=b_0(x),\quad \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i\eta_i=\frac{\lambda(1-\lambda\beta_1)}{\pi_0}.$$

Через $\Phi(s,x)$ обозначим $\Phi(s,x)=P(\beta(\lambda-\lambda\varphi_0(s,x)))-P(\beta(\lambda-\lambda\varphi_0(sx)+s))$. Тогда

$$Me^{-s\tau^0(x)}=e^{-sx}\left[\frac{\lambda(1-\lambda\beta_1}{\pi_0 s}\Phi(s,x)+1-\lambda\beta_1\right],$$

$$-\frac{\partial Me^{-s\tau^0(x)}}{\partial s}\bigg|_{s=0}=x+\frac{\lambda(1-\lambda\beta_1)}{\tau_0}\lim_{s\to0}\left\{\left[-s\frac{\partial\Phi(s,x)}{\partial s}+\Phi(s,x),\right]/s^2\right\},$$

$$\frac{\partial^2 Me^{-s\tau^0(x)}}{\partial^2 s}\bigg|_{s=0}=x^2-2\frac{\lambda(1-\lambda\beta_1)}{\pi_0}\lim_{s\to0}\left\{\left[s\frac{\partial\Phi(sx)}{\partial s}-\Phi(s,x)\right]/s^2\right\}$$

$$+\frac{\lambda(1-\lambda\beta_2)}{\pi_0}\lim_{s\to0}\left\{\left[s^2\frac{\partial^2\Phi(s,x)}{\partial^2 s}-2\left(s\frac{\partial\Phi(s,x)}{\partial s}-\Phi(sx)\right)\right]/s^3\right\}.$$

Так как

$$\lim_{s\to0}\left[s\frac{\partial\Phi(sx)}{\partial s}-\Phi(sx)\right]=0,\quad \lim_{s\to0}\left[s^2\frac{\partial^2\Phi(sx)}{\partial^2 s}-2\left(s\frac{\partial\Phi(sx)}{\partial s}-\Phi(sx)\right]=0,\right.$$

то правилом Лопиталя получаем

$$M\tau^0(x)=x-\frac{\lambda(1-\lambda\beta_1)}{2\pi_0}\lim_{s\to0}\frac{\partial^2\Phi(sx)}{\partial^2 s},$$

$$M[\tau^0(x)]^2=x^2-\frac{\lambda(1-\lambda\beta_1)}{\pi_0}\lim_{s\to0}\frac{\partial^2\Phi(s,x)}{\partial^2 s}+\frac{\lambda(1-\lambda\beta_1)}{3\pi_0}\lim_{s\to0}\frac{\partial^3\Phi(s,x)}{\partial^3 s}.$$

Непосредственным дифференцированием можно показать, что

$$\frac{\partial^2\Phi(s,x)}{\partial^2 s}\bigg|_{s=0}=-\frac{\pi_0\beta_2}{(1+\lambda\beta_1)(1-\lambda\beta_1)^3}[1+2\lambda a_0(x)],$$

$$\frac{\partial^3\Phi(s\,x)}{\partial^3 s}\bigg|_{s=0}=P'''(1)\beta_1^3(1+3\lambda a_0(x)+3\lambda^2 a_0^2(x))$$

$$+P''(1)\{2\beta_1\beta_2[1+\lambda a_0(x)]^2+2\lambda\beta_1^2 b_0(x)+2\lambda a_0(x)\beta_1\beta_2[1+2\lambda a_0(x)]+\beta_1\beta_2[1+3\lambda a_0(x)$$
$$+3\lambda^2 a_0^2(x)]+\lambda\beta_1^2 b_0(x)\}+P'(1)\{\beta_3[1+3\lambda a_0(x)+3\lambda^2 a_0^2(x)]+3\lambda\beta_2 b_0(x)\}.$$

С помощью выражений для $P'(2)$, $P'''(1)$, $P'''(1)$,

$\partial^2\Phi(sx)/\partial^2 s$ и $\partial^3\Phi(sx/\partial^3 s$ после в принципе несложных алгебрических преобразований находятся $M\tau^0(x)$ и $M[\tau^0(x)^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Шахбазов. Доказательство эргодичности некоторых специальных процессов обслуживания. *Теория вероятностей и мат. статист.*, **5**, 1974, № 10, 167—173.
2. M. Schäl. Markov renewal process with auxiliary paths. *Ann. Math. statistics*, **41**, 1970, 1640—1623.
3. A. G. Paks. Some conditions for ergodicity and recurrence of Markov chains. *Oper. Res.*, **17**, 1969, 1058—1064.

Высший экономический институт
Кафедра математики София

Поступила 18. 7. 1977;
в переработанном виде 2. 10. 1978