Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЕСТЕСТВЕННЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

ЛЮБОМИР Л. ИВАНОВ

Понятие об итеративном комбинаторном пространстве введено Д. Скордевым [1], где рассмотрена теория рекурсии в этих пространствах. Ряд примеров комбинаторных пространств даны в [1—4]. В настоящей работе рассматриваются итеративные комбинаторные пространства, у которых множество $\mathcal{C}$ (следуя обозначениям [1]) счетно, операция Π осуществляет канторовскую нумерацию множества $\mathcal{C}^2$, операция Σ обладает более особым свойством, существуют элементы S и P, отвечающие функциям $x+1$ и $x \dot{-} 1$, и, кроме того, элементы T и F совпадают соответственно с первым и вторым элементами множества $\mathcal{C}$. В таких комбинаторных пространствах оказывается возможным ввести понятие о примитивной рекурсивности элементов множества $\mathcal{F}$. Доказаны некоторые основные предложения теории рекурсии, включая теорему Роджерса.

1. Естественные комбинаторные пространства.

Определение. *Упорядоченную 9-ку* $\mathfrak{F}=\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}, \Pi, L, R, \Sigma, T, F \leqq \rangle$ *будем называть естественным комбинаторным пространством, если* $\mathfrak{F}$ *является итеративным комбинаторным пространством* [1, стр. 23, 29], $C=\{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$, $T \neq F$, $T=c_0$, $F=c_1$ *и существует элемент* S *множества* $\mathcal{F}$, *так что для любых* i, j *и* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$

$$\Pi(c_i, c_j)=c_{\pi(i,j)}, \text{ где } \pi(i, j)=(i+j)(i+j+1)/2+i, \tag{1}$$

$$\Sigma(c_0, \varphi, \psi)=\varphi, \ \Sigma(c_{i+1}, \varphi, \psi)=\psi, \tag{2}$$

$$Sc_i=c_{i+1}. \tag{3}$$

Из теории рекурсивных функций [8, стр. 57, 61, 65] известно, что π является двухместной примитивно рекурсивной функцией и существуют одноместные примитивно рекурсивные функции λ и ϱ, такие, что $\forall k \forall i \forall j (\pi(\lambda(k), \varrho(k))=k \ \& \ \lambda(\pi(i, j))=i \ \& \ \varrho(\pi(i, j))=j)$ и $\forall k(\lambda(k) \leqq k \ \& \ \varrho(k) \leqq k)$.

Пусть $M=\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$, $c^+=p_0$, $c^-=p_1$, $J: M^2 \to M$ и $\forall i \forall j J(p_i\, p_j)=p_{\pi(i,j)}$, предполагая $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$.

Пример 1 и Пример 2 естественных комбинаторных пространств получаем соответственно из примеров 2 и 3 комбинаторных пространств [1, стр. 24, 25], взяв

$$L=\{\langle p_i, p_{\lambda(i)}\rangle : i=0, 1, \ldots\}, \ R=\{\langle p_i, p_{\varrho(i)}\rangle : i=0, 1, \ldots\}, \ S=\{\langle p_i, p_{i+1}\rangle : i=0, 1, \ldots\}$$

и $K^+=\{p_0\}$, $K^-=\{p_1, p_2, \ldots\}$.

Пример 3 естественного комбинаторного пространства получаем из примера комбинаторного пространства со сложностью переработки данных [4, стр. 8], взяв

$$L=\{\langle p_i, 0, p_{\lambda(i)}\rangle : i=0, 1, \ldots\}, \quad R=\{\langle p_i, 0, p_{\varrho(i)}\rangle : i=0, 1, \ldots\},$$
$$S=\{\langle p_i, 0, p_{i+1}\rangle : i=0, 1, \ldots\}$$

и $H^+=\{\langle p_0, 0\rangle\}$, $H^-=\{\langle p_{i+1}, 0\rangle : i=0, 1, \ldots\}$

Из выбора J и S и из определений Π и Σ в указанных примерах следует, что (1), (2) и (3) исполнены, следовательно, полученные комбинаторные пространства являются естественными.

Будем обозначать $\Pi(\varphi, \psi)$ сокращенно через (φ, ψ) и $\Sigma(\chi, \varphi, \psi)$ через $(\chi \supset \varphi, \psi)$ [1].

Докажем следующие следствия из определения понятия естественного комбинаторного пространства.

Следствие 1. *$\forall k(Lc_k = c_{\lambda(k)} \,\&\, Rc_k = c_{\varrho(k)}$ и $(L, R) = I$, где I является единичным элементом частично упорядоченной полугруппы $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. $\forall k\pi(\lambda(k), \varrho(k)) = k$, следовательно $(c_{\lambda(k)}, c_{\varrho(k)}) = c_k$. Тогда

$$Lc_k = L(c_{\lambda(k)}, c_{\varrho(k)} = c_{\lambda(k)}, \quad Rc_k = R(c_{\lambda(k)}, c_{\varrho(k)}) = c_{\varrho(k)},$$

$$(L, R)c_k = (Lc_k, Rc_k) = (c_{\lambda(k)}, c_{\varrho(k)} = c_k = Ic_k.$$

Последнее верно для любого k, следовательно $(L, R) = I$.

Следствие 2. *Обозначим через P элемент $(I \supset I, RS(c_0, I))$. Тогда* $\forall i\, Pc_i = c_{i \dot{-} 1}$ (идея принадлежит Д. Скордеву).

Доказательство.

$$Pc_0 = (c_0 \supset c_0, RS(c_0, c_0)) = c_0.$$

$$Pc_{i+1} = (c_{i+1} \supset c_{i+1}, RS(c_0, c_{i+1})) = RSc_{(i+1)(i+2)\,2} = Rc_{(i+1)(i+2)/2+1} = Rc_{\pi(1,i)} = c_i.$$

Следовательно $\forall i Pc_i = c_{i \dot{-} 1}$.

Следствие 3. *Если $i \neq j$, то $c_i \neg\leqq c_j$.*

Доказательство. Пусть $i < j$. Допустим, что $c_i \leqq c_j$. Тогда $P^i c_i \leqq P^i c_j$, $c_0 \leqq c_{j-i}$, где $j - i \geqq 1$. Обозначим через N элемент $(I \supset c_1, c_0)$. Тогда $Nc_0 \leqq Nc_{j-i}$, следовательно $c_1 \leqq c_0$, откуда получаем $Nc_1 \leqq Nc_0$, следовательно $c_0 \leqq c_1$, следовательно $c_0 = c_1$. Таким образом мы пришли к противоречию.

Случай $i > j$ рассматривается аналогично.

Следствие 4. *Если $\forall i \forall j \varphi(c_i, c_j) = \psi(c_i, c_j)$, то $\varphi = \psi$.*

Доказательство. Для любого k $\varphi c_k = \varphi Ic_k = \varphi(L, R)c_k = \varphi(Lc_k, Rc_k) = \psi(Lc_k, Rc_k) = \psi c_k$, следовательно $\varphi = \psi$.

Элемент ζ множества $\mathfrak{F}$ называют *совершенным*, если $\forall i \zeta c_i \in C$ [2]. Элементы L и R суть совершенные элементы.

Элемент θ множества $\mathfrak{F}$ называют *почти совершенным*, если $\forall i c_i\theta = c_i$ и $(I, I)\theta = (\theta, \theta)$ [2].

Кроме композиции, Π и Σ, в комбинаторных пространствах рассматривается также операция итерации, понятие о которой можно ввести следующим образом.

Пусть $\alpha, \zeta \in \mathfrak{F}$. Обозначим через $\Delta_{\alpha,\zeta}$ отображение $\Gamma : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$, такое, что для любого $\varphi \in \mathfrak{F}\, \Gamma(\varphi) = \alpha\varphi\zeta$. Обозначим через Φ' множество $\{\Delta_{\alpha,\zeta} : \alpha \in \mathfrak{F} \,\&\, \zeta$ — совершенный элемент$\}$.

Пусть $H \subseteq \mathfrak{F}$ и $\varphi \in \mathfrak{F}$. Элемент φ называют *мажорантой множества H, точной относительно Φ'*, если для любого $\Delta \in \Phi'$ $\Delta(\varphi) = \sup\{\Delta(\theta) : \theta \in H\}$ [2]. Мажоранту множества H, точную относительно Φ', будем обозначать через $\Phi' - \sup H$.

Пусть $\Gamma : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$. Множество $\mathfrak{G}$ называют *Γ-рекуррентным*, если $\mathfrak{G}$ замкнуто относительно применения отображения Γ и содержит каждый элемент множества $\mathfrak{F}$, являющийся точной относительно Φ' мажорантой нокоторого подмножества множества $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}$ замкнуто относительно $\Phi' - \sup$) [2].

Заметим, что если ζ — совершенный элемент и $\alpha, \tau \in \mathfrak{F}$, то множество $\{\theta : \theta \in \mathfrak{F} \& \alpha\theta\zeta \leq \tau\}$ замкнуто относительно Φ'—sup [2].

Пусть $\varphi, \chi \in \mathfrak{F}$. Обозначим через $\Gamma_{\varphi,\chi}$ отображение $\mathfrak{F}$ в себя, такое, что для любого $\theta \in \mathfrak{F} \Gamma_{\varphi,\chi}(\theta) = (\theta) = (\chi \supset I, \theta\varphi)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ является естественным комбинаторным пространством. Тогда из определения понятия итеративного комбинаторного пространства [1] следует, что для любых $\varphi, \chi \in \mathfrak{F}$ отображение $\Gamma\varphi, \chi$ имеет неподвижную точку, принадлежащую каждому $\Gamma\varphi$, χ-рекуррентному подмножеству множества $\mathfrak{F}$. Эту точку обозначаем через $[\varphi, \chi]$ и называем *итерацией элемента* φ, *управляемой элементом* χ.

Элемент θ множества $\mathfrak{F}$ будем называть *дистрибутивным*, если $(I, I)\theta = (\theta, \theta)$ (определение дано Д. Скордевым в его лекциях).

В [2] доказано, что если $(I, I)\theta = (\theta, \theta)$, то для любых $\chi, \varphi, \psi \in \mathfrak{F}$ $(\chi \supset \varphi, \psi)\theta = (\chi\theta \supset \varphi\theta, \psi\theta)$ и $(\varphi, \psi)\theta = (\varphi\theta, \psi\theta)$.

Докажем следующие свойства дистрибутивных элементов.

Утверждение 1. *Если* χ — *дистрибутивный элемент и* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathfrak{F}$, *то* $(\chi \supset (\alpha, \beta), (\gamma, \delta)) = ((\chi \supset \alpha, \gamma), (\chi \supset \beta, \delta))$.

Доказательство.

$$(I \supset (\alpha, \beta), (\gamma, \delta))c_0 = (c_0 \supset (\alpha, \beta)c_0, (\gamma, \delta)c_0) = (\alpha c_0, \beta c_0)$$

$$= ((c_0 \supset \alpha c_0, \gamma c_0), (c_0 \supset \beta c_0, \delta c_0)) = ((I \supset \alpha, \gamma), (I \subset \beta, \delta))c_0,$$

$$(I \supset (\alpha, \beta), (\gamma, \delta))c_{i+1} = (c_{i+1} \supset (\alpha, \beta)c_{i+1}, (\gamma, \delta)c_{i+1}) = (\gamma c_{i+1}, \delta c_{i+1})$$

$$= ((c_{i+1} \supset \alpha c_{i+1}, \gamma c_{i+1}), (c_{i+1} \supset \beta c_{i+1}, \delta c_{i+1})) = ((I \supset \alpha, \gamma), (I \supset \beta, \delta))c_{i+1}.$$

Следовательно, для любого i $(I \supset (\alpha, \beta), (\gamma, \delta))c_i = ((I \supset \alpha, \gamma), (I \supset \beta, \delta))c_i$, следовательно $(I \supset (\alpha, \beta), (\gamma, \delta)) = ((I \supset \alpha, \gamma), (I \supset \beta, \delta))$ для любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathfrak{F}$.

Для любого i $(\chi \supset (\alpha, \beta), (\gamma, \delta))\, c_i = (I \supset (\alpha c_i, \beta c_i), (\gamma c_i, \delta c_i))\, \chi c_i = ((I \supset \alpha c_i, \gamma c_i), (I \supset \beta c_i, \delta c_i))\, \chi c_i = ((I \supset \alpha c_i, \gamma c_i)\, \chi c_i, (I \supset \beta c_i\, \delta c_i)\, \chi c_i) = ((\chi c_i \supset \alpha c_i, \gamma c_i), (\chi c_i \supset \beta c_i, \delta c_i)) = ((\chi \supset \alpha, \gamma), (\chi \supset \beta, \delta))c_i$.

Следовательно $(\chi \supset (\alpha, \beta), (\gamma, \delta)) = ((\chi \supset \alpha, \gamma), (\chi \supset \beta, \delta))$.

Утверждение 2. *Если элементы* χ, φ и ψ *дистрибутивны, то и* $(\chi \supset \varphi, \psi)$ *дистрибутивен.*

Доказательство.

$$(I, I)(\chi \supset \varphi, \psi) = (\chi \supset (I, I)\varphi, (I, I)\psi) = (\chi \supset (\varphi, \varphi), (\psi, \psi)) = ((\chi \supset \varphi, \psi), (\chi \supset \varphi, \psi)).$$

Следующие два предложения докажем при несколько более общих предположениях о комбинаторном пространстве $\mathfrak{F}$.

Предложение 1.1. *Пусть в итеративном комбинаторном пространстве* $\mathfrak{F}$ *элементы* L *и* R *дистрибутивны и* $\forall\varphi\forall\psi$ $(L \supset (I, I), (\varphi, \psi)) = ((L \supset I, \varphi), (L \supset I, \psi))$. *Тогда итерация сохраняет свойство дистрибутивности.*

Доказательство. В [2] доказано тождество $[\varphi, \chi] = R[(\chi, I)\varphi R, L](\chi, I)$. Очевидно свойство дистрибутивности сохраняется при композиции, а в [2] показано, что оно сохраняется и при операции II. Поэтому достаточно доказать, что если элемент φ дистрибутивен, то и $[\varphi, L]$ дистрибутивен.

1. Пусть $E = \{\theta : \theta \in \mathfrak{F} \& (I, I)\theta I \leq (\tau, \tau)\}$, где $\tau = [\varphi, L]$. Множество E замкнуто относительно Φ'—sup. Пусть $\theta \in E$. Тогда

$$(I, I)(L \supset I, \theta\varphi) = (L \supset (I, I), (I, I)\theta\varphi) \leqq (L \supset (I, I), (\tau, \tau)\varphi)$$

$$= (L \supset (I, I), (\tau\varphi, \tau\varphi)) = ((L \supset I, \tau\varphi), (L \supset I, \tau\varphi)) = (\Gamma_{\varphi,L}(\tau), \Gamma_{\varphi,L}(\tau)) = (\tau, \tau).$$

Следовательно $\Gamma_{\varphi,L}(\theta) \in E$. Тогда множество $E\Gamma_{\varphi,L}$ — рекуррентно, следовательно $[\varphi, L] \in E$, откуда получаем, что $(I, I)[\varphi, L] \leqq ([\varphi, L], [\varphi, L])$.

2. Пусть $E' = \{\theta : \theta \in \mathfrak{F} \,\&\, ([\varphi, L], \theta) \leqq (I, I)\tau\}$, где $\tau = [\varphi, L]$.

Имея в виду, что $([\varphi, L], \theta) \leqq (I, I)\tau$ тогда и только тогда, когда $\forall i\, ([\varphi, L], \theta)\, c_i \leqq (I, I)\tau c_i$, получаем, что $E' = \bigcap_{i=0}^{\infty} E_i$, где

$$E_i = \{\theta : \theta \in \mathfrak{F} \,\&\, ([\varphi, L], \theta)\, c_i \leqq (I, I)\tau c_i\} = \{\theta : \theta \in \mathfrak{F} \,\&\, ([\varphi, L]c_i, \theta c_i) \leqq (I, I)\tau c_i\}$$

$$= \{\theta : \theta \in \mathfrak{F} \,\&\, ([\varphi, L]\, c_i, I)\, \theta c_i \leqq (I, I)\, \tau c_i\}.$$

Следовательно множества E_i, $i = 0, 1, \ldots$ замкнуты относительно Φ' — sup, откуда следует, что и множество E' замкнуто относительно Φ' — sup. Пусть $\theta \in E'$. Тогда

$$([\varphi, L], (L \supset I, \theta\varphi)) = ((L \supset I, [\varphi, L]\varphi), (L \supset I, \theta\varphi)) = (L \supset (I, I), ([\varphi, L]\varphi, \theta\varphi))$$

$$= (L \supset (I, I), ([\varphi, L], \theta)\varphi) \leqq (L \supset (I, I), (I, I)\tau\varphi) = (I, I)(L \supset I, \tau\varphi) = (I, I)\Gamma_{\varphi,L}(\tau) = (I, I)\tau.$$

Следовательно $\Gamma_{\varphi,L}(\theta) \in E'$. Тогда множество E' $\Gamma_{\varphi,L}$-рекуррентно, следовательно $[\varphi, L] \in E'$, откуда получаем, что $([\varphi, L], [\varphi, L]) \leqq (I, I)[\varphi, L]$.

Из неравенств, полученных в 1 и 2, следует требуемое равенство.

Предложение 1. 2. *Пусть в итеративном комбинаторном пространстве $\mathfrak{F}$ для любого элемента x множества $\mathcal{C}$ $xL = x \,\&\, xR = x$. Тогда, если хотя бы один из элементов φ и ψ дистрибутивен и $(\varphi, \psi) = x$, где $x \in \mathcal{C}$, то $\varphi = Lx$ и $\psi = Rx$.*

Доказательство. Пусть дистрибутивен элемент ψ. Для любого $y \in \mathcal{C}(\varphi y, \psi y) = xy = x$. Но $Lx = L(\varphi y, \psi y) = L(\varphi y, I)\psi y = \varphi y \psi y$. Следовательно $x = (\varphi y, \psi y) = (\varphi y, I)\psi y = (\varphi y \psi y, \psi y) = (Lx, \psi y)$. Тогда $Rx = R(Lx, \psi y) = R(I, \psi y)Lx = \psi y Lx = \psi y x = \psi y$, $Lx = L(\varphi y, \psi y) = L(\varphi y, Rx) = L(\varphi y, I)Rx = \varphi y Rx = \varphi y x = \varphi y$.

Мы получили, что $Lx = \varphi y$ и $Rx = \psi y$ для любого $y \in \mathcal{C}$, следовательно $\varphi = Lx$ и $\psi = Rx$.

Случай, когда дистрибутивен элемент φ, рассматривается аналогичным образом. Этим предложение доказано.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ является естественным комбинаторным пространством, элементы L и R — совершенные, следовательно, они почти совершенные [2] и тогда предположения предыдущих двух предложений выполнены.

Рассмотрим пример 3 естественного комбинаторного пространства, где $S = \{0, 1\}$ (имеем в виду множество S из [4], при помощи которого отчитывается сложность переработки, а не элемент S из определения понятия естественного комбинаторного пространства), причем знаком $+$ обозначено сложение по модулю 2. Пусть $\theta = \{\langle p_i, 1, p_0\rangle : i = 0, 1, \ldots\}$. Тогда $(\theta, \theta) = c_0$, но $\theta \neq c_0$. Следовательно, предложение 1.2 не имеет место для любых элементов φ и ψ множества $\mathfrak{F}$.

Индукцией по n, $n > 2$ вводим обозначение $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ для $(\varphi_1, (\varphi_2, \ldots \varphi_n))$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathfrak{F}$. Легко можно проверить индукцией, что если элемент θ дистрибутивен, то $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\theta = (\varphi_1\theta, \ldots, \varphi_n\theta)$.

Покажем, что для $n \geqq 2$ выполнено $(L, LR^1, \ldots, LR^{n-2}, R^{n-1}) = I$. В самом деле, $(L, R) = I$. Допустим, что $(L, LR, \ldots, LR^{n-2}, R^{n-1}) = I$. Тогда $(L, LR, \ldots, LR^{n-1}, R^n) = (L, LR, \ldots, (LR^{n-1}, R^n)) = (L, LR, \ldots, (L, R)R^{n-1}) = (L, LR, \ldots, LR^{n-2}, R^{n-1}) = I$.

Определение. *Элемент φ множества $\mathcal{F}$ будем называть обыкновенным, если $\forall i\varphi c_i \in C\cup\{0\}$, где $0=[I, F]$.*

Заметим, что для любого $\psi\in\mathcal{F}$ $\psi 0=0\psi=0$ и $0\leq\psi$ [2].

Следствия из определения.

Следствие 1. *Очевидно все совершенные элементы — обыкновенные.*

Следствие 2. *Все обыкновенные элементы дистрибутивны.*

Доказательство. Для любого i $(\psi, 0)\,c_i=(\psi c_i, 0)=(\psi c_i, I)0=0=0c_i$, следовательно $(\psi, 0)=0$. Аналогично получаем $(0, \psi)=0$.

Пусть элемент φ — обыкновенный. Так как $(I, I)0=0=(0, 0)$, для любого i элемент φc_i дистрибутивен. Тогда и φ дистрибутивен [2].

Следствие 3. *Если элементы φ и ψ — обыкновенные, то $\varphi\psi$ и (φ, ψ) — тоже обыкновенные.*

Доказательство. Пусть i — натуральное число.

1. $\psi c_i\in C$. Тогда $\psi c_i=c_j$, $\varphi\psi c_i=\varphi c_j\in C\cup\{0\}$ для некоторого j.

2. $\psi c_i=0$. Тогда $\varphi\psi c_i=0$. Следовательно элемент $\varphi\psi$ — обыкновенный.

Пусть i — натуральное число.

1. $\varphi c_i\in C$ и $\psi c_i\in C$. Тогда $(\varphi, \psi)c_i=(\varphi c_i, \psi c_i)\in C$.

2. $\varphi c_i=0$ или $\psi c_i=0$. Тогда $(\varphi, \psi)\,c_i=(\varphi c_i, \psi c_i)=0$. Следовательно, элемент (φ, ψ) — обыкновенный.

Следствие 4. *Если элементы φ и ψ — обыкновенные, то элемент $[\varphi, \psi]$ — тоже обыкновенный.*

Доказательство. Пусть i — натуральное число и $\theta=[\varphi, \psi]$. Для любого j элементы φ^j и $\psi\varphi^j$ — обыкновенные.

1. $\exists j\psi\varphi^j c_i=c_0$. Пусть j_0 — наименьшее из этих j.

а) $\exists k\psi\varphi^k c_i=0$. Пусть k_0 — наименьшее из этих k. Тогда $k_0<j_0$ и $\underset{j<k_0}{\forall} j\psi\varphi^j c_i\in C\diagdown\{c_0\}$.

$$\theta c_i=(\psi\supset I, \theta\varphi)c_i=(\psi c_i\supset c_i, \theta\varphi c_i)=\theta\varphi c_i=(\psi\varphi c_i\supset\varphi c_i, \theta\varphi^2 c_i)$$

$$=\theta\varphi^2 c_i=\cdots=\theta\varphi^{k_0}c_i=(\psi\varphi^k\, c_i\supset\varphi^{k_0}c_i, \theta\varphi^{k_0+1}\, c_i)=(I\supset\varphi^{k_0}c_i, \theta\varphi^{k_0+1}\, c_i)\,0=0;$$

б) $\underset{k<j_0}{\forall} k\psi\varphi^k c_i\neq 0$. Тогда $\underset{k<j_0}{\forall} k\psi\varphi^k c_i\in C\diagdown\{c_0\}$.

$$\theta c_i=(\psi c_i\supset c_i, \theta\varphi c_i)=\theta\varphi c_i=\cdots=\theta\varphi^{j_0}\, c_i=(\psi\varphi^{j_0}c_i\supset\varphi^{j_0}c_i, \theta\varphi^{j_0+1}\, c_i)=\varphi^{j_0}c_i\in C.$$

2. $\forall j\psi\varphi^j c_i\neq c_0$.

а) $\exists k\psi\varphi^k c_i=0$. Тогда, как в 1. а), получаем $\theta c_i=0$;

б) $\forall k\psi\varphi^k c_i\neq 0$. Тогда $\forall j\psi\varphi^j c_i\in C\diagdown\{c_0\}$.

Пусть $E=\{\tau:\tau\in\mathcal{F}\ \&\ \forall_j\tau\varphi^j c_i\leq 0\}$. Как при доказательстве предложения 1.1, заключаем, что множество E замкнуто относительно Φ'—sup.

Пусть $\tau\in E$. Тогда для любого j

$$(\psi\supset I, \tau\varphi)\varphi^j c_i=(\psi\varphi^j c_i\supset\varphi^j c_i, \tau\varphi^{j+1}c_i)=\tau\varphi^{j+1}c_i\leq 0.$$

Следовательно, множество E $\Gamma_{\varphi,\psi}$-рекуррентно, следовательно $\theta\in E$. При $j=0$ получаем $\theta c_i\leq 0$, следовательно $\theta c_i=0$.

Следовательно, элемент θ — обыкновенный.

2. Примитивная рекурсивность и рекурсивность.

Предложение 2.1. *Пусть $\varphi, \psi\in\mathcal{F}$. Тогда существует единственный элемент $\theta\in\mathcal{F}$, такой, что для любых $i, j\,\theta(c_0, c_j)=\varphi c_j$ и $\theta(c_{i+1}, c_j)=\psi(c_i, c_j, \theta(c_i, c_j))$.*

Доказательство. Обозначим через Γ^* отображение $\mathcal{F}^2$ в $\mathcal{F}$ такое, что для любых $\varphi, \psi\in\mathcal{F}$ $\Gamma^*(\varphi, \psi)=R^3[\alpha, L]\,(L, T, R, \varphi R)$, где $\alpha=(PL, SLR, LR^2,$

ψR). Пусть $\theta = \Gamma^*(\varphi, \psi)$. Покажем, что θ и есть искомый элемент. Пусть j — натуральное число, $\chi_0 = \varphi c_j$, $\chi_{k+1} = \psi(c_k, c_j, \chi_k)$ для $k = 1, 2, \ldots$

$$\theta(c_0, c_j) = R^3[\alpha, L](c_0, c_0, c_j, \varphi c_j) = R^3(L \supset I, [\alpha, L]\alpha)(c_0, c_0, c_j, I)\varphi c_j$$

$$= R^3(c_0 \supset (c_0, c_0, c_j, I), [\alpha, L]\alpha(c_0, c_0, c_j, I))\varphi c_j = R^3(c_0, c_0, c_j, I)\varphi c_j = \varphi c_j.$$

Пусть $\beta = [\alpha, L](c_{i+1}, c_0, c_j, \chi_0)$. Тогда $\theta(c_{i+1}, c_j) = R^3\beta$. Допустим, что для некоторого k, $k < i+1$, выполнено $\beta = [\alpha, L](c_{i+1-k}, c_k, c_j, \chi_k)$. Тогда

$$\beta = (L \supset I, [\alpha, L]\alpha)(c_{i+1-k}, c_k, c_j, I)\chi_k = (c_{i+1-k} \supset (c_{i+1-k}, c_k, c_j, I),$$

$$[\alpha, L]\alpha(c_{i+1-k}, c_k, c_j, \chi_k)) = [\alpha, L](PL, SLR, LR^2, \psi R)(c_{i+1-k}, c_k, c_j, I)\chi_k.$$

Но $L(c_{i+1-k}, c_k, c_i, I) = c_{i+1-k}$, $LR(c_{i+1-k}, c_k, c_j, I) = c_k$, $LR^2(c_{i+1-k}, c_k, c_j, I) = c_j$, $R(c_{i+1-k}, c_k, c_j, I) = (c_k, c_j, I)$. Тогда

$$\beta = [\alpha, L](Pc_{i+1-k}, Sc_k, c_j, \psi(c_k, c_j, I))\chi_k$$

$$= [\alpha, L](c_{i+1-(k+1)}, c_{k+1}, c_j, \psi(c_k, c_j, \chi_k)) = [\alpha, L](c_{i+1-(k+1)}, c_{k+1}, c_j, \chi_{k+1}).$$

Для $k = i+1$ получаем $\beta = [\alpha, L](c_0, c_{i+1}, c_j, \chi_{i+1}) = (c_0 \supset (c_0, c_{i+1}, c_j, I))$ $[\alpha, L]$ $\alpha(c_0, c_{i+1}, c_j, I))$ $\chi_{i+1} = (c_0, c_{i+1}, c_j, I)\chi_{i+1} = (c_0, c_{i+1}, c_j, \chi_{i+1})$. $\theta(c_{i+1}, c_j) = R^3\beta = R^3(c_0, c_{i+1}, c_j, \chi_{i+1}) = \chi_{i+1}$, следовательно, для любого i выполнено $\theta(c_i, c_j) = \chi_i$.

Тогда $\theta(c_{i+1}, c_j) = \chi_{i+1} = \psi(c_i, c_j, \chi_i) = \psi(c_i, c_j, \theta(c_i, c_j))$ и, следовательно, θ удовлетворяет требуемым равенствам. Покажем, что θ — единственный.

Допустим, что для $\theta_1 \in \mathcal{F}$ $\forall i \forall j (\theta_1(c_0, c_j) = \varphi c_j \,\&\, \theta_1(c_{i+1}, c_j) = \psi(c_i, c_j, \theta_1(c_i, c_j)))$ Тогда $\theta_1(c_0, c_j) = \theta(c_0, c_j)$. Допустим, что $\theta_1(c_i, c_j) = \theta(c_i, c_j)$. В таком случае $\theta_1(c_{i+1}, c_j) = \psi(c_i, c_j, \theta_1(c_i, c_j)) = \psi(c_i, c_j, \theta(c_i, c_j)) = \theta(c_{i+1}, c_j)$, следовательно, для любых i, j выполнено $\theta_1(c_i, c_j) = \theta(c_i, c_j)$, откуда следует, что $\theta_1 = \theta$.

Этим предложение доказано. Отображение Γ^* будем называть *примитивной рекурсией.*

Свойства примитивной рекурсии.

Утверждение 1. *Если элементы φ и ψ — совершенные, то и элемент $\Gamma^*(\varphi, \psi)$ — тоже совершенный.*

Доказательство. Обозначим $\Gamma^*(\varphi, \psi)$ через θ.

Для любого j имеем $\theta(c_0, c_j) = \varphi c_j \in C$. Допустим, что $\theta(c_i, c_j) \in C$ для любого j. Тогда $\theta(c_{i+1}, c_j) = \psi(c_i, \theta_j, \theta(c_i, c_j)) \in C$.

Мы получили, что для любых i, j выполнено $\theta(c_i, c_j) \in C$. Для любого k имеем $\theta c_k = \theta(Lc_k, Rc_k) \in C$, следовательно элемент θ — совершенный.

Утверждение 2. *Если элементы φ и ψ — почти совершенные, то и $\Gamma^*(\varphi, \psi)$ — почти совершенный.*

Доказательство. Пусть $\theta = \Gamma^*(\varphi, \psi)$. Для любого j элемент $\theta(c_i, c_j) = \varphi c_j$ — почти совершенный. Допустим, что для любого j элемент $\theta(c_i, c_j)$ — почти совершенный. Тогда $\theta(c_{i+1}, c_j) = \psi(c_i, c_j, \theta(c_i, c_j))$ — почти совершенный, следовательно, для любых i, j элемент $\theta(c_i, c_j)$ — почти совершенный. Для любого k выполнено $\theta c_k = (Lc_k, Rc_k)$ — почти совершенный, откуда согласно [2] можно заключить, что элемент θ — почти совершенный.

Обозначим через Γ_1^* отображение $\mathcal{F}$ в себя, такое, что $\Gamma_1^*(\theta) = R[(PL, \theta R), L]$ для любого $\theta \in \mathcal{F}$.

Для любого ψ имеем $(PL, (SL, LR, \psi)R) = (PL, SLR, LR^2, \psi R)$. Следовательно, $\Gamma^*(\varphi, \psi) = R^2\Gamma_1^*((SL, LR, \psi))(L, T, R, \varphi R)$ для любых φ, ψ.

Предложение 2.2. *Для любого* $\theta \in \mathcal{F}$ *выполнено* $\Gamma_1^*(\theta)=\Gamma^*(I, \theta R^2)$.

Доказательство. Пусть $\chi=\Gamma_1^*(\theta)$. Тогда

$$\chi(c_0, I)=R(c_0 \supset (c_0, I), [(PL, \theta R), L] (PL, \theta R) (c_0, I))=I=\theta^0.$$

Допустим, что $\chi(c_i, I)=\theta^i$. Тогда

$$\chi(c_{i+1}, I)=R(c_{i+1} \supset (c_{i+1}, I), [(PL, \theta R), L], (PL, \theta R) (c_{i+1}, I))$$
$$=\chi(Pc_{i+1}, \theta)=\chi(c_i, I)\theta=\theta^i\theta=\theta^{i+1}.$$

Следовательно, для любых i, j имеем $\chi(c_0, c_j)=Ic_j$, $\chi(c_{i+1}, c_j)=\theta^{i+1}c_j$ $=\theta\theta^i c_j=\theta\chi(c_i, c_j)=\theta R^2(c_i, c_j, \chi(c_i, c_j))$.

Из предположения 2.1 следует, что $\chi=\Gamma^*(I, \theta R^2)$.

Определение. *Элемент* φ *множества* $\mathcal{F}$ *будем называть примитивно рекурсивным относительно подмножества* Ψ *множества* $\mathcal{F}$, *если* φ *получается из* T, S, L, R *и элементов множества* Ψ *путем конечного числа применений операций композиции,* Π *и* Γ^*.

Элемент φ будем называть *примитивно рекурсивным,* если он примитивно рекурсивен относительно $\varnothing$.

Из предложения 2.2 и из предыдущего замечания следует, что если в определении заменим Γ^* на Γ_1^*, то получим эквивалентное определение.

Следствия из определения.

Следствие 1. *Элемент* $D=(I \supset T, F)$ *примитивно рекурсивен.*

Доказательство. $D=(L \supset R, F)(I, T)$. Элемент I примитивно рекурсивен, так как $I=(L, R)$. Пусть $\theta=(L \supset R, F)$. Элемент θ — совершенный и для любых i, j

$$\theta(c_0, c_j)=(c_0 \supset c_j, c_1)=c_j,\ \theta(c_{i+1}, c_j)=(c_{i+1} \supset c_j, c_1)=c_1=c_1(c_i, c_j, \theta(c_i, c_j)).$$

Из предложения 2.1 следует, что $\theta=\Gamma^*(I, c_1)$, следовательно θ примитивно рекурсивен, следовательно и D примитивно рекурсивен.

Следствие 2. *Элемент* $N=(I \supset F, T)$ *примитивно рекурсивен.*

Доказательство. $N=(L \supset R, T)(I, F)$. Пусть $\theta=(L \supset R, T)$. Элемент θ— совершенный и для любых i, j

$$\theta(c_0, c_j)=c_j,\ \theta(c_{i+1}, c_j)=c_0=c_0\theta(c_i, c_j).$$

Следовательно, $\theta=\Gamma_1^*(c_0)$, откуда последовательно заключаем, что элементы θ и N примитивно рекурсивны.

Следствие 3. *Если элементы* χ, φ *и* ψ *примитивно рекурсивны относительно* Ψ, *то и* $(\chi \supset \varphi, \psi)$ *примитивно рекурсивен относительно* Ψ.

Доказательство. Пусть $\theta_1=\Gamma_1^*(\varphi)$, $\theta_2=\Gamma^*(\theta, \psi R^2)$, $\theta=\theta_2(L^2, RL, R)$. Элемент θ примитивно рекурсивен относительно Ψ. Для любого j

$$\theta((D, N), c_j)c_0=\theta_2(c_0, c_1, c_j)=\theta_1(c_1, c_j)=\varphi c_j=(I \supset \varphi c_j, \psi c_j)c_0,$$

$$\theta((D, N), c_j)c_{i+1}=\theta_2(c_1, c_0, c_j)=\psi\theta_1(c_0, c_j)=\psi c_j=(I \supset \varphi c_j, \psi c_j)c_{i+1}.$$

Следовательно, $\theta((D, N), c_j)=(I \supset \varphi c_j, \psi c_j)$ для любого j.

Для любого i выполнено $(\chi \supset \varphi, \psi)c_i=(I \supset \varphi c_i, \psi c_i)\chi c_i=\theta((D, N), c_i)\chi c_i$ $=\theta((D, N)\chi c_i, c_i)=\theta((D, N)\chi, I)c_i$.

Следовательно, $(\chi \supset \varphi, \psi)=\theta((D, N)\chi, I)$, откуда следует, что элемент $(\chi \supset \varphi, \psi)$ примитивно рекурсивен относительно Ψ.

Идея доказательства заимствована из [9].

Следствие 4. *Элементы множества C примитивно рекурсивны.*

Это следует из равенства $\forall_i C_i = S^i c_0$.

Предложение 2.3. *Пусть n-местная функция f примитивно рекурсивна. Тогда существует единственный элемент φ множества $\mathcal{F}$, такой, что $\forall i_1 \ldots \forall i_n \varphi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = c_{f(i_1, \ldots, i_n)}$. Этот элемент примитивно рекурсивен.*

Доказательство. Существование.

1. $f = \mathsf{O}$. Пусть $\psi = c_0$. Тогда $\forall i \ \varphi c_i = c_0 = c_{\mathsf{O}(i)}$.

2. $f = \mathsf{S}$. Пусть $\varphi = S$. Тогда $\forall i \ \varphi c_i = c_{i+1} = c_{\mathsf{S}(i)}$.

3. $f = \mathsf{I}^n_m$, $1 \leq m \leq n$.

а) $n = 1$. Пусть $\varphi = I$. Тогда $\forall i \, \varphi c_i = c_i = c_{\mathsf{I}^1_1(i)}$;

б) $n > 1$;

б1) $m < n$. Пусть $\varphi = LR^{m-1}$. Тогда

$$\forall i_1 \ldots \forall i_n \varphi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = c_{i_m} = c_{\mathsf{I}^n_m(i_1, \ldots, i_n)};$$

б2) $m = n$. Пусть $\varphi = R^{n-1}$. Тогда

$$\forall i_1 \ldots \forall i_n \varphi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = c_{i_n} = c_{\mathsf{I}^n_n(i_1, \ldots, i_n)}.$$

4. Пусть функция f m-местна, функции $g_1, \ldots, g_m$ n-местны и существуют элементы $\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_m \in \mathcal{F}$, такие, что $\forall i_1 \ldots \forall i_m \varphi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}) = c_{f(i_1, \ldots, i_m)}$ и $\forall i_1, \ldots, \forall i_n \psi_i(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = c_{g_i(i_1, \ldots, i_n)}$, $1 \leq i \leq n$, и пусть $h = f(g_1, \ldots, g_m)$.

Рассмотрим элемент $\chi = \varphi(\psi_1, \ldots, \psi_m)$. Для него $\forall i_1 \ldots \forall i_n \chi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = \varphi(\psi_1(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}), \ldots, \psi_m(c^{i}{}_1, \ldots, c_{i_n})) = \varphi(c_{g_1(i_1, \ldots, i_n)}, \ldots, c_{g_m(i_1, \ldots, i_n)}) = c_{f(g_1(i_1, \ldots, i_n), \ldots, g_m(i_1, \ldots, i_n))} = c_{h(i_1, \ldots, i_n)}$.

5. Пусть функция f одноместна, функция g триместна, существуют $\psi, \varphi \in \mathcal{F}$, такие, что $\forall i \varphi c_i = c_{f(i)}$, $\forall i \forall j \forall_k \psi(c_i, c_j, c_k) = c_{g(i, j, k)}$ и пусть h получается из f и g примитивной рекурсией.

Функция h двуместна, и для любых i, j выполнено $h(0, j) = f(j)$ и $h(i+1, j) = g(i, j, h(i, j))$.

Рассмотрим элемент $\chi = \Gamma^*(\varphi, \psi)$. Для него $\forall j \chi(c_0, c_j) = \varphi c_j = c_{f(j)} = c_{h(0, j)}$. Допустим, что $\forall j \chi(c_i, c_j) = c_{h(i, j)}$. Тогда $\forall j \chi(c_{i+1}, c_j) = \psi(c_i, c_j, \chi(c_i, c_j)) = \psi(c_i, c_j, c_{h(i,j)}) = c_{g(i, j, h(i, j))} = c_{h(i+1, j)}$. Следовательно, $\forall i \forall j \chi(c_i, c_j) = c_{h(i, j)}$.

Этим существование элемента φ с требуемыми свойствами доказано, так как все примитивно рекурсивные функции могут быть получены из O, S и функций I^n_m конечным числом суперпозиций и примитивных рекурсий. Из построения элемента φ видно, что он примитивно рекурсивен.

Единственность.

1. $n = 1$. Допустим, что $\varphi_1 \in \mathcal{F}$ и $\forall i \varphi_1 c_i = c_{f(i)}$. Тогда $\forall i \varphi_1 c_i = \varphi c_i$, следовательно $\varphi_1 = \varphi$.

2. $n \geq 2$. Допустим, что $\varphi_1 \in \mathcal{F}$ и $\forall i_1 \ldots \forall i_n \varphi_1(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = c_{f(i_1, \ldots, i_n)}$. Тогда $\forall i_1 \ldots \forall i_n \varphi_1(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = \varphi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$.

$$\forall i \varphi_1 c_i = \varphi_1(L, LR, \ldots, LR^{n-2}, R^{n-1}) c_i$$

$$= \varphi_1(Lc_i, \ldots, LR^{n-2}c_i, R^{n-1}c_i) = \varphi(Lc_i, \ldots, LR^{n-2}c_i, R^{n-1}c_i) = \varphi c_i.$$

Следовательно, $\varphi_1 = \varphi$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}$, $\Psi \subseteq \mathcal{F}$, $\Gamma: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$

Определение. *Элемент φ будем называть рекурсивным относительно Ψ, если φ получается из T, S, L, R и элементов множества Ψ конечным числом композиций, Π и итераций.*

Элемент φ будем называть рекурсивным, если он рекурсивен относительно $\varnothing$.

Заметим, что операция Σ выражается посредством композиции, Π и итерации при помощи элементов T, L и R [6]. Следовательно Σ сохраняет относительную рекурсивность.

Определение. *Отображение Γ будем называть рекурсивным относительно Ψ, если имеет место один из случаев:*

1. $\forall\theta\Gamma(\theta) = T$, *или* $\forall\theta\Gamma(\theta) = S$, *или* $\forall\theta\Gamma(\theta) = L$, *или* $\forall\theta\Gamma(\theta) = R$, *или* $\forall\theta\Gamma(\theta) = \theta$, *или существует* $\varphi \in \Psi$, *такое, что* $\forall\theta\Gamma(\theta) = \varphi$.

2. *Существуют такие отображения Γ_1 и Γ_2, рекурсивные относительно Ψ, что* $\forall\theta\Gamma(\theta) = \Gamma_1(\theta)\Gamma_2(\theta)$, *или* $\forall\theta\Gamma(\theta) = (\Gamma_1(\theta), \Gamma_2(\theta))$, *или* $\forall\theta\Gamma(\theta) = [\Gamma_1(\theta), \Gamma_2(\theta)]$.

Так как $F = ST$, элемент φ рекурсивен относительно Ψ тогда и только тогда, когда он рекурсивен относительно $\Psi \cup \{S\}$ в смысле определения, данного в [2]. Также и отображение Γ будет рекурсивным относительно Ψ тогда и только тогда, когда оно рекурсивно относительно $\Psi \cup \{S\}$ в смысле определения, данного в [2]. Имея еще в виду, что естественные комбинаторные пространства итеративны, заключаем, что будет иметь место Первая теорема о рекурсии [1, стр. 30].

Следовательно, если отображение Γ рекурсивно относительно Ψ, то уравнение $\varphi = \Gamma(\varphi)$ обладает минимальным и рекурсивным относительно Ψ решением.

Предложение 2.4. *Пусть одноместная функция f частично рекурсивна. Тогда существует рекурсивный элемент φ множества $\mathcal{F}$, такой, что* $\forall i \forall j (\varphi c_i = c_j \leftrightarrow f(i) = j)$.

Доказательство.

1. Аналогично пунктам 1 и 2 первой части доказательства предложения 2.3 получаем, что для функций $\bigcirc$, $\mathbb{S}$, $\mathbb{P}$, λ и ϱ элементы T, S, P, L, R являются искомыми.

2. Пусть функции f и g одноместны, элементы φ и ψ — обыкновенны; $\forall i \forall j (\varphi c_i = c_j \leftrightarrow f(i) = j)$ и $\forall i \forall j (\psi c_i = c_j \leftrightarrow g(i) = j)$.

а) $h = f(g)$. Пусть $\chi = \varphi\psi$. Элемент χ — обыкновенный. Имея в виду, что элементы φ и ψ обыкновенные, получаем

$$\forall i \forall j (h(i) = j \leftrightarrow \exists k (g(i) = k \& f(k) = j) \leftrightarrow \exists k (\psi c_i = c_k \& \varphi c_k = c_j) \leftrightarrow \chi c_i = c_j);$$

б) $h = \sqcap(f, g)$, где $\forall i \forall j \sqcap(f, g)(i) \simeq \pi(f(i), g(i))$. Пусть $\chi = (\varphi, \psi)$. Элемент χ — обыкновенный. Имея в виду, что элементы φ и ψ обыкновенные, получаем

$$\forall i \forall j (h(i) = j \leftrightarrow \exists k \exists l\ (f(i) = k \& g(i) = l \& \pi(k, l) = j)$$
$$\leftrightarrow \exists k \exists l (\varphi c_i = c_k \& \psi c_i = c_l \& (c_k, c_l) = c_j \leftrightarrow \chi c_i = c_j);$$

в) $h = [f, g]$. Пусть $\chi = [\varphi, \psi]$. Элемент χ — обыкновенный. Имея в виду, что элементы φ и ψ обыкновенные, и используя доказательство следствия 4 из определения понятия обыкновенного элемента, получаем

$$\forall i \forall j (h(i)=j \longleftrightarrow \exists k (g(f^k(i))=0 \; \& \underset{m<k}{\forall} m g(f^m(i))>0 \; \& f^k(i)=j)$$

$$\longleftrightarrow \exists k (\psi\varphi^k c_i = c_0 \; \& \underset{m<k}{\forall} m \psi\varphi^m c_i \in C \setminus \{c_0\} \; \& \varphi^k c_i = c_j) \longleftrightarrow \chi c_i = c_j).$$

Этим предложение доказано, так как все частично рекурсивные функции одного аргумента могут быть получены из функций $\bigcirc$, S, P, λ, ϱ конечным числом операций композиции, $\sqcap$ и итерации. Принимая во внимание, что все рекурсивные элементы множества $\mathcal{F}$ могут быть получены из элементов T, S, L и R конечным числом композиций, Π и итераций, то из доказательства предложения 2.4 получим, что будет иметь место также обратное предложение:

Предложение 2.5. *Пусть элемент φ множества $\mathcal{F}$ рекурсивен. Тогда существует одноместная частично рекурсивная функция f, такая, что* $\forall i \forall j (\varphi c_i = c_j \longleftrightarrow f(i)=j)$.

Заметим при этом, что если элемент φ — совершенный, то функция f будет всюду определенной и, следовательно, общерекурсивной.

3. Универсальные и главные универсальные элементы.

Предложение 3.1. *Для любого i и любых $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$ выполнено*

$$[(\psi, \varphi(c_i, R)), L] = R[(L, \psi R, \varphi(L, R^2)), LR](c_i, I).$$

Доказательство.

1. Пусть $E = \{\theta : \theta \in \mathcal{F} \; \& \; \theta \leqq R\tau(c_i, I)\}$, где $\tau = [(L, \psi R, \varphi(L, R^2)), LR]$. Множество E замкнуто относительно Φ' — sup. Пусть $\theta \in E$. Тогда

$$(L \supset I, \theta(\psi, \varphi(c_i, R))) \leqq (L \supset I, R\tau(c_i, \psi, \varphi(c_i, R))) = (LR(c_i, I) \supset R(c_i, I),$$

$$R\tau(L, \psi R, \varphi(L, R^2))(c_i, I)) = R(LR \supset I, \tau(L, \psi R, \varphi(L, R^2)))(c_i, I) = R\tau(c_i, I).$$

Следовательно, множество E $\Gamma_{(\psi, \varphi(c_i, R)), L}$-рекуррентно. Тогда $[(\psi, \varphi(c_i, R)), L] \in E$, следовательно $[(\psi, \varphi(c_i, R)), L] \leqq R[(L, \psi R, \varphi(L, R^2))) LR](c_i, I)$.

2. Пусть $E_1 = \{\theta : \theta \in \mathcal{F} \; \& \; R\theta(c_i, I) \leqq \tau\}$, где $\tau = [(\psi, \varphi(c_i, R)), L]$.

Множество E_1 замкнуто относительно Φ'—sup. Пусть $\theta \in E_1$. Тогда

$$R(LR \supset I, \theta(L, \psi R, \varphi(L, R^2)))(c_i, I) = (L \supset I, R\theta(c_i, I)(\psi, \varphi(c_i, R)))$$

$$\leqq (L \supset I, \tau(\psi, \varphi(c_i, R))) = \tau.$$

Следовательно, множество E_1 $\Gamma_{(L, \psi R, \varphi(L, R^2)), LR}$-рекуррентно. Тогда $[(L, \psi R \; \varphi(L, R^2)), LR] \in E_1$, следовательно $R[(L, \psi R, \varphi(L, R^2)), LR](c_i, I) \leqq [(\psi, \varphi(c_i, R)), L]$.

Из неравенств, полученных в 1 и 2, следует требуемое равенство.

Докажем теорему о существовании элемента, универсального для элементов множества $\mathcal{F}$, примитивно рекурсивных относительно Ψ.

Предложение 3.2. *Пусть подмножество Ψ множества $\mathcal{F}$ конечно. Тогда существует элемент Ω, рекурсивный относительно Ψ, такой, что для любого элемента φ, примитивно рекурсивного относительно Ψ, $\exists i \varphi = \Omega(c_i, I)$ и для любого i, элемент $\Omega(c_i, I)$ примитивно рекурсивен относительно Ψ.*

Доказательство. Можно считать, что $\Psi = \{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$, где $\psi_0 = T$, $\psi_1 = S$, $\psi_2 = L$, $\psi_3 = R$, следовательно, $n \geqq 3$.

Функции $n \cdot x$ и $\pi([x/n], \mathrm{rem}(x, n))$ примитивно рекурсивны. Из предложения 2.3 следует, что существуют примитивно рекурсивные элементы χ_0 и χ_1, такие, что $\forall j \chi_0 c_j = c_{n \cdot j}$ и $\chi_1 c_j = (c_{[j/n]}, c_{\mathrm{rem}(j,n)})$.

Пусть для любого $\theta \in \mathcal{F}$

$$\Gamma(\theta) = (L \supset \psi_0 R, (PL \supset \psi_1 R, \ldots, (P^n L \supset \psi_n R,$$

$$(R\chi_1 L \supset \theta(LPL\chi_1 L, \theta(RPL\chi_1 L, R)), (PR\chi_1 L \supset (\theta(LPL\chi_1 L, R),$$

$$\theta(RPL\chi_1 L, R)), R^2[(L, PLR, \theta(L, R^2)), LR](PL\chi_1, L, R)\underbrace{))) \ldots}_{n}).$$

Отображение Γ рекурсивно относительно Ψ, следовательно, существует рекурсивный относительно Ψ элемент Ω, такой, что $\Omega = \Gamma(\Omega)$. Заметим, что $\forall i \forall j P^i L(c_j, I) = P^i c_j = c_{j \dot{-} i}$, $j \dot{-} i = 0$ для $j \leqq i$ и $j \dot{-} i > 0$ для $j > i$.

1. Пусть $0 \leqq i \leqq n$. Тогда $\Omega(c_i, I) = \Gamma(\Omega)(c_i, I) = \psi_i R(c_i, I) = \psi_i$.

2. Пусть $\varphi = \Omega(c_k, I)$, $\psi = \Omega(c_l, I)$.

Если $k = l = 0$, рассматриваем $c_{i_0} = c_0$. Тогда $\Omega(c_{i_0}, I) = c_0 = c_0 c_0 = \varphi\psi$.

Если $k + l > 0$, рассматриваем $c_{i_0} = \chi_0 S(c_k, c_l)$. Тогда

$$i_0 = (\pi(k, l) + 1)n + 0 > n, \ \chi_1 c_{i_0} = (c_{\pi(k, l)+1}, c_0),$$

$$\Omega(c_{i_0}, I) = \Gamma(\Omega)(c_{i_0}, I) = \Omega(LPL\chi_1 L, \Omega(RPL\chi_1 L, R))(c_{i_0}, I)$$

$$= \Omega(c_k, \Omega(c_l, I)) = \Omega(c_k, I)\Omega(c_l, I) = \varphi\psi.$$

Пусть $c_{i_1} = S\chi_0 S(c_k, c_l)$. Тогда $i_1 = (\pi(k, l) + 1)n + 1 > n$, $\chi_1 c_{i_1} = (c_{\pi(k, l)+1}, c_1)$,

$$\Omega(c_{i_1}, I) = \Gamma(\Omega)(c_{i_1}, I) = (\Omega(LPL\chi_1 L, R), \Omega(RPL\chi_1 L, R))(c_{i_1}, I)$$

$$= (\Omega(c_k, I), \Omega(c_l, I)) = (\varphi, \psi).$$

Пусть $c_{i_2} = S^2\chi_0 S c_k$. Тогда $i_2 = (k+1)n + 2 > n$, $\chi_1 c_{i_2} = (c_{k+1}, c_2)$,

$$\Omega(c_{i_2}, I) = \Gamma(\Omega)(c_{i_2}, I) = R^2[(L, PLR, \Omega(L, R^2)), LR](PL\chi_1 L, R)(c_{i_2}, I)$$

$$= R^2[(L, PLR, \Omega(L, R^2)), LR](c_k, I) = R[(PL, \Omega(c_k, R)), L] = R[(PL, \varphi R), L] = \Gamma_1^*(\varphi).$$

Следовательно, для любого элемента φ, примитивно рекурсивного относительно Ψ, $\exists i \varphi = \Omega(c_i, I)$.

Для $i \leqq n$ имеем $\Omega(c_i, I) = \psi_i \in \Psi$, следовательно элемент $\Omega(c_i, I)$ примитивно рекурсивен относительно Ψ.

Допустим, что для любого i, $i < m$, элемент $\Omega(c_i, I)$ примитивно рекурсивен относительно Ψ и $m > n$. Следовательно $m = (s+1)n + p$, $r < n$. Возможны три случая:

а) $r = 0$. Пусть $k = \lambda(s)$, $l = \varrho(s)$. Тогда $s = \pi(k, l) > 0$ и из 2. следует, что $\Omega(c_m, I) = \Omega(c_k, I)\Omega(c_l, I)$. Справедливы неравенства $k \leqq s$, $l \leqq s$, следовательно $k < m$, $l < m$, следовательно $\Omega(c_k, I)$ и $\Omega(c_l, I)$ примитивно рекурсивны относительно Ψ, откуда заключаем, что и $\Omega(c_m, I)$ является таковым;

б) $r = 1$. Пусть $k = \lambda(s)$, $l = \varrho(s)$. Тогда $s = \pi(k, l)$, $k < m$, $l < m$. Из 2. следует, что $\Omega(c_m, I) = (\Omega(c_k, I), \Omega(c_l, I))$. При этом $\Omega(c_k, I)$ и $\Omega(c_l, I)$ примитивно рекурсивны относительно Ψ, следовательно и $\Omega(c_m, I)$ является таковым;

в) $r > 1$. Очевидно $s < m$, следовательно $\Omega(c_s, I)$ примитивно рекурсивен относительно Ψ. Из 2. следует, что $\Omega(c_m, I) = \Gamma_1^*(\Omega(c_s, I))$, следовательно $\Omega(c_m, I)$ тоже примитивно рекурсивен относительно Ψ.

Предложение 3.3. *Для любых i, j и любых $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$*

$$[\varphi(c_i, I), \psi(c_i, I)] = R[(L, \varphi(L^2, R)), \psi(RL, R)]((c_i, c_j), I).$$

Доказательство.

1. Пусть $E=\{\theta:\theta\in\mathcal{F}\ \&\ \theta\leqq R\tau((c_i, c_j), I)\}$, где $\tau=[(L, \varphi(L^2, R)), \psi(RL, R)]$. Множество E замкнуто относительно Φ' — sup. Пусть $\theta\in E$. Тогда

$$(\psi(c_j, I)\supset I, \theta\varphi(c_i, I))\leqq(\psi(c_j, I)\supset I, R\tau((c_i, c_j), I)\varphi(c_i, I))$$

$$=R(\psi(RL, R)\supset I, \tau(L, \varphi(L^2, R)))((c_i, c_j), I)=R\tau((c_i, c_j), I).$$

Следовательно, множество E будет $\Gamma_{\varphi(c_i, I), \psi(c_j, I)}$-рекуррентным, следовательно $[\varphi(c_i, I), \psi(c_j, I)]\in E$. Следовательно, $[\varphi(c_i, I), \psi(c_j, I)]\leqq R[(L, \varphi(L^2, R))\ \psi(RL, R)]((c_i, c_j), I)$.

2. Пусть $E_1=\{\theta:\theta\in\mathcal{F}\ \&\ R\theta((c_i, c_j), I)\leqq\tau\}$, где $\tau=[\varphi(c_i, I), \psi(c_j, I)]$. Множество E_1 замкнуто относительно Φ'-sup. Пусть $\theta\in E_1$. Тогда

$$R(\psi(RL, R)\supset I, \theta(L, \varphi(L^2, R)))((c_i, c_j), I)$$

$$=(\psi(c_j, I)\supset I, R\theta((c_i, c_j), I)\varphi(c_i, I))\leqq(\psi(c_j, I)\supset I, \tau\varphi(c_i, I))=\tau.$$

Следовательно, множество E_1 $\Gamma_{(L,\varphi(L^2, R)),\psi(RL, R)}$-рекуррентно, следовательно $[(L, \varphi(L^2, R)), \psi(RL, R)]\in E_1$. Тогда

$$R[(L, \varphi(L^2, R)), \psi(RL, R)]((c_i, c_j), I)\leqq[\varphi(c_i, I), \psi(c_j, I)].$$

Из неравенств, полученных в 1 и 2, следует требуемое равенство.

Докажем теорему о существовании элемента, универсального для элементов множества $\mathcal{F}$, рекурсивных относительно Ψ [1, стр. 30].

Предложение 3.4. *Пусть подмножество Ψ множества $\mathcal{F}$ конечно. Тогда существует элемент Φ, рекурсивный относительно Ψ, такой, что для любого элемента φ, рекурсивного относительно Ψ, $\exists i\varphi=\Phi(c_i, I)$.*

Доказательство. Будем считать, что о Ψ, χ_0, и χ_1 сказано то же самое, что и в доказательстве предложения 3.2.

Пусть для любого $\theta\in\mathcal{F}$

$$\Gamma(\theta)=(L\supset\psi_0R, (PL\supset\psi_1R, \ldots, (P^nL\supset\psi_nR,$$

$$(R\chi_1L\supset\theta(LPL\chi_1L, \theta(RPL\chi_1L, R)), (PR\chi_1L\supset(\theta(LPL\chi_1L, R), \theta(RPL\chi_1L, R)),$$

$$R[(L, \theta(L^2, R)), \theta(RL, R)](PL\chi_1L, R)))\underbrace{)\ldots)}_{n}$$

Отображение Γ рекурсивно относительно Ψ, следовательно существует рекурсивный относительно Ψ элемент Φ, такой, что $\Phi=\Gamma(\Phi)$.

Так же, как в доказательстве предложения 3.2 $\Phi(c_i, I)=\psi_i$ для $i\leqq n$ и если $\varphi=\Phi(c_k, I)$, $\psi=\Phi(c_l, I)$, то существуют c_{i_0} и c_{i_1}, такие, что $\Phi(c_{i_0}, I)=\varphi\psi$ и $\Phi(c_{i_1}, I)=(\varphi, \psi)$.

Пусть $c_{i_2}=S^2\chi_0S(c_k, c_l)$. Тогда $i_2=(\pi(k, l)+1)n+2>n$, $\chi_1c_{i_2}=(c_{\pi(k,l)+1}, c_2)$,

$$\Phi(c_{i_2}, I)=\Gamma(\Phi)(c_{i_2}, I)=R[L,\Phi(L^2, R))\ \Phi(RL, R)](PL\chi_1L, R)(c_{i_2}, I)$$

$$=R[(L, \Phi(L^2, R)), \Phi(RL, R)]((c_k, c_l), I)=[\Phi(c_k, I), \Phi(c_l, I)]=[\varphi, \psi].$$

Следовательно для любого рекурсивного относительно Ψ элемента φ выполнено $\exists i\varphi=\Phi(c_i, I)$.

Так как элементы множества C рекурсивны, то для любого i элемент $\Phi(c_i, I)$ рекурсивен относительно Ψ.

Свойства элемента Φ из предложения 3.4.

Утверждение 1. *Пусть* $\sigma_1=(I\supset c_0, \chi_0 S)$, $\sigma_2=S\chi_0 S$, $\sigma=\sigma_1(L, \sigma_2 R)$, *где* χ_0 — *элемент из предложения 3.2. Тогда элементы* σ_1, σ_2 *и* σ *примитивно рекурсивны и из доказательства предложения 3.4 следует, что*

$$\forall i\forall j\Phi(c_i, I)\Phi(c_j, I)=\Phi(\sigma_1(c_i, c_j), I),\ \forall i\forall j(\Phi(c_i, I), \Phi(c_j, I))=\Phi(\sigma_2(c_i, c_j), I).$$

Следовательно,

$$\forall i\forall j\forall_k\Phi(c_i, I), (\Phi(c_j, I), \Phi(c_k, I))=\Phi(c_i, I)\Phi(\sigma_2(c_j, c_k), I)$$
$$=\Phi(\sigma_1(c_i, \sigma_2(c_j, c_k)), I)=\Phi(\sigma(c_i, c_j, c_k), I).$$

Утверждение 2. *Пусть* $\gamma=\Gamma^*(c_0, \sigma_1(c_1, R^2))(I, c_0)$. *Тогда элемент* γ *примитивно рекурсивен и* $\forall i\Phi(\gamma c_i, I)=c_i$.

Доказательство. Из доказательства предложения 3.4 следует, что $\Phi(c_0, I)=c_0$ и $\Phi(c_1, I)=S$. Имея в виду, что элемент γ совершенный, получаем

$$\gamma c_0=c_0,\ \gamma c_{i+1}=\sigma_1(c_1,R^2)(c_i, c_0, \gamma c_i)=\sigma_1(c_1, \gamma c_i).$$

Имеем $c_0=\Phi(c_0, I)=\Phi(\gamma c_0, I)$. Допустим, что $c_i=\Phi(\gamma c_i, I)$. Тогда

$$c_{i+1}=Sc_i=\Phi(c_1, I)\Phi(\gamma c_i, I)=\Phi(\sigma_1(c_1, \gamma c_i), I)=\Phi(\gamma c_{i+1}, I).$$

Утверждение 3. *Пусть* $\delta=\sigma(L, \gamma R, c_{i_0})$, *где* $c_{i_0}=\sigma_2(c_2, c_3)$ (*элемент* σ_2 — *совершенный*). *Тогда элемент* δ *примитивно рекурсивен и*

$$\forall i\forall j\Phi(c_i, c_j, I)=\Phi(\delta(c_i, c_j), I).$$

Доказательство. Из доказательства предложения 3.4 следует, что $L=\Phi(c_2, I)$ и $R=\Phi(c_3, I)$. Тогда $\Phi(c_{i_0}, I)=(L, R)=I$. Поэтому

$$\forall i\forall j\Phi(c_i, c_j, I)=\Phi(c_i, I)(c_j, I)=\Phi(c_i, I)(\Phi(\gamma c_j, I), \Phi(c_{i_0}, I))$$
$$=\Phi(\sigma(c_i, \gamma c_j, c_{i_0}), I)=\Phi(\delta(c_i, c_j), I).$$

Пусть $\Psi\subseteq\mathcal{F}$, $\omega\in\mathcal{F}$.

Определение. *Элемент* ω *будем называть главным универсальным элементом для рекурсивных относительно* Ψ *элементов множества* $\mathcal{F}$ (*короче, главным универсальным элементом для* Ψ), *если элемент* ω *рекурсивен относительно* Ψ *и для любого элемента* φ, *рекурсивного относительно* Ψ, *существует совершенный и рекурсивный элемент* ψ, *такой, что* $\forall i\varphi(c_i, I)=\omega(\psi c_i, I)$.

Покажем, что элемент Φ из предложения 3.4 является главным универсальным элементом для Ψ.

Φ рекурсивен относительно Ψ. Пусть элемент φ рекурсивен относительно Ψ. Тогда $\exists k\varphi=\Phi(c_k, I)$. Пусть $\psi=\delta(c_k, I)$. Элемент ψ примитивно рекурсивен, следовательно ψ — совершенный и рекурсивный. Далее

$$\forall i\varphi(c_i, I)=\Phi(c_k, I)(c_i, I)=\Phi(c_k, c_i, I)=\Phi(\delta(c_k, c_i), I)=\Phi(\psi c_i, I).$$

Докажем Вторую теорему о рекурсии в параметричной форме.

Предложение 3.5. *Пусть* ω — *главный универсальный элемент для* Ψ *и элемент* φ *рекурсивен относительно* Ψ. *Тогда существует совершенный и рекурсивный элемент* ε, *такой, что* $\forall i\varphi(c_i, \varepsilon c_i, I)=\omega(\varepsilon c_i, I)$.

Доказательство. Элемент $\omega(L^2, RL, R)$ рекурсивен относительно Ψ, следовательно существует совершенный и рекурсивный элемент ψ_1, такой, что $\forall k\omega(L^2, RL, R)(c_k, I) = \omega(\psi_1 c_k, I)$.

Элемент $\varphi_1 = \varphi(L, \psi_1(LR, LR), R^2)$ рекурсивен относительно Ψ, следовательно существует совершенный и рекурсивный элемент ψ_2, такой, что $\forall i\varphi_1(c_i, I) = \omega(\psi_2 c_i, I)$. Помножив на (c_l, I), получаем $\forall i\forall l\varphi_1(c_i, c_l, I) = \omega(\psi_2 c_i, c_l, I)$. Следовательно,

$$\forall i\forall l\varphi(c_i, \psi_1(c_l, c_l), I) = \omega(\psi_2 c_i, c_l, I) = \omega(L^2, RL, R)((\psi_2 c_i, c_l), I) = \omega(\psi_1(\psi_2 c_i, c_l), I).$$

Пусть $\varepsilon = \psi_1(\psi_2, \psi_2)$. Элемент ε — совершенный и рекурсивный. При этом

$$\forall i\varphi(c_i, \varepsilon c_i, I) = \varphi(c_i, \psi_1(\psi_2 c_i, \psi_2 c_i), I) = \omega(\psi_1(\psi_2 c_i, \psi_2 c_i), I) = \omega(\varepsilon c_i, I).$$

Этим предложение доказано.

Пусть ω является главным универсальным элементом для Ψ. Обозначим через U множество всех элементов множества $\mathfrak{F}$, рекурсивных относительно Ψ. Через ω^* обозначим нумерацию множества U в смысле определения, данного в [8, стр. 186], такую, что $\forall i\omega^* i = \omega(c_i, I)$. Покажем, что ω^* является полной нумерацией множества U в смысле данного в [8, стр. 198] определения. Заметим, что $0 \in U$, так как элемент 0 рекурсивен.

Пусть одноместная функция f частично рекурсивна. Из предложения 2.4 следует, что существует рекурсивный элемент φ множества $\mathfrak{F}$, такой, что $\forall i\forall j(f(i) = j \longleftrightarrow \varphi c_i = c_j)$. Элемент $\omega(\varphi L, R)$ рекурсивен относительно Ψ, следовательно, существует совершенный и рекурсивный элемент ψ, такой, что $\forall i\omega(\varphi L, R)(c_i, I) = \omega(\psi c_i, I)$. Из предложения 2.5 и последующего замечания вытекает, что существует общерекурсивная функция g, такая, что $\forall i\, c_{g(i)} = \psi c_i$.

Если $f(i)$ определено, то $\omega^* g(i) = \omega(c_{g(i)}, I) = \omega(\psi c_i, I) = \omega(\varphi L, R)(c_i, I) = \omega(\varphi c_i, I) = \omega(c_{f(i)}, I) = \omega^* f(i)$.

Если $f(i)$ не имеет смысла, то принимая во внимание, что элемент φ обыкновенный, получаем $\varphi c_i = 0$, следовательно $\omega^* g(i) = \omega(\varphi c_i, I) = \omega(0, I) = 0$.

Следовательно, нумерация ω^* является полной.

Предложение 3.6 (Теорема Роджерса). *Пусть ω и $\bar{\omega}$ являются главными универсальными элементами для Ψ. Тогда существует совершенный и рекурсивный элемент φ, такой, что*

1) $\forall i\omega(c_i, I) = \bar{\omega}(\varphi c_i, I)$,
2) $\forall i\forall j(i \neq j \rightarrow \varphi c_i \neq \varphi c_j)$,
3) $\forall j\exists i\varphi c_i = c_j$.

Доказательство. Обозначим через U множество всех рекурсивных относительно ψ элементов. Пусть ω^* и $\bar{\omega}^*$ являются полными нумерациями множества U, соответствующими главным универсальным элементам ω и $\bar{\omega}$.

Элемент ω рекурсивен относительно Ψ, следовательно существует рекурсивный и совершенный элемент χ, такой, что $\forall i\omega(c_i, I) = \bar{\omega}(\chi c_i, I)$. Из предложения 2.5 следует, что существует общерекурсивная функция h, такая, что $\forall i\chi c_i = c_{h(i)}$. Тогда $\forall i\, \omega^* i = \omega(c_i, I) = \bar{\omega}(\chi c_i, I) = \bar{\omega}(c_{h(i)}, I) = \bar{\omega}^* h(i)$, следовательно нумерация ω^* сводится к нумерации $\bar{\omega}^*$. Из [8, стр. 201, теорема 5] следует, что существует общерекурсивная функция f, такая, что $\forall i\omega^* i = \bar{\omega}^* f(i)$, $\forall i\forall j(i \neq j \rightarrow f(i) \neq f(i))$ и $\forall i \exists if(i) = j$. Из предложения 2.4 следует, что существует совершенный и рекурсивный элемент φ, такой, что $\forall i \varphi c_i = c_{f(i)}$. Тогда $\forall i \omega(c_i, I) = \omega^* i = \overline{\omega}^* f(i) = \overline{\omega}(c_{f(i)}, I) = \overline{\omega}(\varphi c_i, I)$. Если $i \neq j$, то $f(i) \neq f(j)$, следовательно $c_{f(i)} \neq c_{f(j)}$. Для любого j существует i, такое, что $f(i) = j$, следовательно $\varphi c_i = c_{f(i)} = c_j$. Этим предложение доказано.

Мне хотелось бы высказать свою благодарность Д. Скордеву за помощь, оказанную им при написании настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Skovdev. Recursion theory on iterative combinatory spaces. *Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.*, **24**, 1976, 23—31.
2. Д. Г. Скордев. Комбинаторные пространства и рекурсивность в них (в печати).
3. Д. Г. Скордев. Некоторые топологические примеры итеративных комбинаторных пространств. *Доклады БАН*, 28, 1975, 1575—1578.
4. Д. Г. Скордев. Некоторые комбинаторные пространства, связанные со сложностью переработки данных. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 7—10.
5. Д. Г. Скордев. О частичном упорядочении множества $\mathcal{C}$ в комбинаторных пространствах. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 151—154.
6. D. Skordev. Simplification of some definitions in the theory of combinatory spaces. *C. R. Acad. bulg. sci.*, **30**, 1977, 947—950.
7. Д. Г. Скордев. Понятие поисковой вычислимости с точки зрения теории комбинаторных пространств. *Сердика*, **2**, 1976, 343—349.
8. А. И. Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. Москва, 1965.
9. R. Bird. A note on definition by cases. *Z. math. Logik u. Grundlagen Math.*, **19**, 1973, 207—208.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 1. 8. 1977