Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О НЕРАВЕНСТВЕ НОРДХАУЗА—СТЮАРТА—МУНА—МОЗЕРА

НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ, ВЛАДИМИР С. НИКИФОРОВ

Доказываются ряд экстремальных свойств полных хроматических и регулярных графов возникающих в связи с рассмотрением некоторых классических неравенств из теории графов

1. Пусть G — неориентированный граф без петель и кратных ребер Множество всех его m-клик обозначим через $K_m(G)$, а множество всех клик — через $K(G)$. Число всех m-клик обозначим через $t_m(G)=t_m$, а через $k(G)$ обозначим максимальное m, для которого существует m-клика.

Нордхаузом и Стюартом [1] было доказано неравенство

$$3t_3 \ge t_2.(4t_2/t_1-t_1). \tag{1}$$

Немного позже Муном и Мозером [2] было доказано неравенство

$$8t_4 \ge t_3(9t_3/t_2-t_1). \tag{2}$$

В [2] они приводят без доказательства и следующее неравенство, обобщающее (1) и (2):

$$(m+1)(m-1)t_{m+1}/t_m \ge m^2t_m/t_{m-1}-t_1,\ 2\le m\le k(G). \tag{3}$$

В настоящей статье будет установлено равенство, обобщающее неравенство (3) и дающее возможность найти все экстремальные графы, для которых в (3) имеет место равенство. В конце приводим несколько приложений.

2. **Основное равенство.** Если $\Delta\in K(G)$, через $A(\Delta)$ бозначим множество всех вершин графа G, смежных всем вершинам из Δ.

Если Δ — m-клика и Δ_i, $1\le i\le m$, все $(m-1)$-клики, содержащиеся в Δ, тогда верно равенство

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{m} A(\Delta_i)\Big| = \sum_{i=1}^{m} |A(\Delta_i)|-(m-1)|A(\Delta)|,\ m\ge 2. \tag{4}$$

Действительно, $A(\Delta_i)\cap A(\Delta_j)=A(\Delta)$ при $i\neq j$ и, следовательно,

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{m} A(\Delta_i)\Big| = \sum_{i=1}^{m}(|A(\Delta_i)|-|A(\Delta)|)+|A(\Delta)| = \sum_{i=1}^{m}|A(\Delta)_i)|-(m-1)|A(\Delta)|.$$

Положим

$$\bigcup_{i=1}^{m} A(\Delta_i) = A'(\Delta). \tag{5}$$

Просуммировав почленно равенство (4), получаем

$$\textstyle\sum\{|A'(\Delta)| \mid \Delta\in K_m(G)\}=\sum\{\sum_{i=1}^{m}|A(\Delta_i)| \mid \Delta\in K_m(G)\}-(m-1)\sum\{|A(\Delta)| \mid \Delta\in K_m(G)\}. \tag{6}$$

Заметим, что

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 4, 1978, с. 344—350.

$$\Sigma\{\,|A(\Delta)|\mid \Delta\in K_m(G)\}=(m+1)\,t_{m+1}\,. \tag{7}$$

Действительно, $|A(\Delta)|$ — число $(m+1)$ -клик, содержащих Δ, и в левой части любая $(m+1)$ -клика графа G имеет принос 1 точно в $m+1$ слагаемых, так как таково число m-клик, содержащихся в ней.

А теперь докажем, что

$$\Sigma\{\sum_{i=1}^{m}|A(\Delta_i)|\mid \Delta\in K_m(G)\}=\Sigma\{\,|A(\Delta')|^2\mid \Delta'\in K_{m-1}(G)\},\ m\geqq 2. \tag{8}$$

Действительно, любое $|A(\Delta')|$ участвует в левой части столько раз, сколько существуют $\Delta\in K_m(G)$, для которых $\Delta'\subset\Delta$, т. е. $|A(\Delta')|$ раз.

Из равенства (6) с помощью (7) и (8) получаем

Предложение 1. *Верно равенство*

$$\Sigma\{\,|A'(\Delta)|\mid \Delta\in K_m(G)\}=\Sigma\{\,|A(\Delta')|^2\mid \Delta'\in K_{m-1}(G)\}-(m+1)(m-1)t_{m+1},\ m\geqq 2. \tag{9}$$

3. Экстремальные графы для неравенства (3). Из определения (5) множества $A'(\Delta)$ очевидно следует, что для любой клики Δ имеем

$$|A'(\Delta)|\leqq t_1\,. \tag{10}$$

Легко сообразить, что если G — полный хроматический граф, тогда для любой клики Δ в неравенстве (10) имеет место равенство. Верно и обратное:

Лемма 1. *Если для некоторого m, $2\leqq m\leqq k(G)$, для любой клики $\Delta\in K_m(G)$ в неравенстве* (10) *имеет место равенство, тогда G является полным хроматическим графом.*

Доказательство. Пусть $[v_1, v_2, \ldots, v_{k(G)}]$ — клика графа G. Заметим сразу, что всякая вершина графа G смежна всем, за исключением одной, вершинам этой клики. Действительно, если v смежна всем вершинам v_i, $1\leqq i\leqq k(G)$, тогда $[v, v_1, v_2, \ldots, v_{k(G)}]$ — $(k(G)+1)$-клика, что невозможно. Допустим теперь, что v не смежна, например, вершине v_1. Докажем, что в таком случае v смежна всем вершинам v_i, $2\leqq i\leqq k(G)$; достаточно доказать это только для v_2. Выбросив из данной клики $k(G)-m$ вершин, отличных от v_1 и v_2, получим клику $\Delta\in K_m(G)$, для которой $v_1\notin\Delta$ и $v_2\notin\Delta$. Согласно предположению леммы v смежна вершине v_2.

Положим $H_i=\{v\mid v\in K_1(G),\ [v, v_i]\notin K_2(G)\}$, $1\leqq i\leqq k(G)$.

Так как любая вершина графа не смежна хотя бы одной из вершин v_i, то $K_1(G)=\cup\{H_i\mid 1\leqq i\leqq k(G)\}$.

Докажем, что $H_i\cap H_j=\varnothing$ при $i\neq j$. Допустим, что это не так и пусть $v\in H_i\cap H_j$. Тогда v не смежна вершинам v_i и v_j, что противоречит доказанному выше.

Теперь заметим, что всякие две вершины $v'\in H_i$ и $v''\in H_i$ не смежны между собой. Действительно, так как v' и v'' не смежны вершине v_i, то они смежны, согласно доказанному в начале, всем вершинам v_j при $j\neq i$. Если допустим, что v' и v'' смежны, тогда $[v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v', v'', v_{i+1}, \ldots, v_{k(G)}]$ — $(k(G)+1)$-клика, что является противоречием.

Наконец, докажем, что если $v'\in H_i$ и $v''\in H_j$ и $i\neq j$, тогда v' и v'' смежны. Рассмотрим клику $[v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v'', v_{j+1}, \ldots, v_{k(G)}]$. Удалим из нее $k(G)-m$ вершин, отличных от v_i и v''. Получаем клику $\Delta\in K_m(G)$, для которой $v_i\in\Delta$ и $v''\in\Delta$. Так как v' не смежна вершине v_i, то, согласно предположению леммы, она смежна вершине v''.

Итак, установлено, что G является полным хроматическим графом с хроматическими классами H_i.

Доказательство леммы завершено.

Сейчас воспользуемся хорошо известным элементарным неравенством $n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$, которое переходит в равенство тогда и только тогда, когда все x_i равны.

Применим это неравенство к числам $|A(\Delta')|$, где $\Delta' \in K_{m-1}(G)$, количество которых равно t_{m-1} $(m \geq 2)$. Получаем

$$(11) \qquad t_{m-1} \cdot \Sigma\{|A(\Delta')|^2 \mid \Delta' \in K_{m-1}(G)\} \geq \Sigma\{|A(\Delta')| \mid \Delta' \in K_{m-1}(G)\}.$$

При $t_{m-1} \neq 0$ в (11) имеет место равенство тогда и только тогда, когда $|A(\Delta'_1)| = |A(\Delta'_2)|$ для любых двух Δ'_1 и Δ'_2 из $K_{m-1}(G)$.

Из (7) следует, что

$$(12) \qquad \Sigma\{|A(\Delta')| \mid \Delta' \in K_{m-1}(G)\} = mt_m.$$

Подставляя сумму, определенную в (12), в правую часть неравенства (11), получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Верно неравенство*

$$(13) \qquad t_{m-1} \cdot \Sigma\{|A(\Delta')|^2 \mid \Delta' \in K_{m-1}(G)\} \geq m^2 t_m^2, \quad m \geq 2.$$

В нем при $m \leq k(G)$ имеет место равенство тогда и только тогда, когда $|A(\Delta'_1)| = |A(\Delta'_2)|$ для любых $\Delta' \in K_{m-1}(G)$ и $\Delta'_2 \in K_{m-1}(G)$.

Из равенства (9) и неравенств (10) и (13) получаем неравенство

$$(14) \qquad t_1 t_{m-1} t_m \geq m^2 t_m^2 - (m+1)(m-1)\, t_{m-1} t_{m+1}, \quad m \geq 2,$$

которое при $m \leq k(G)$, очевидно, эквивалентно неравенству (3).

Очевидно при $m > k(G)$ неравенство (14) переходит в равенство. При $m \leq k(G)$, если G — полный хроматический и регулярный граф, неравенство (14) тоже переходит в равенство. Действительно, в этом случае любой хроматический класс содержит $t_1/k(G)$ элементов и очевидно $t_i = \binom{k}{i}\left(\frac{t_1}{k}\right)^i$, $1 \leq i \leq k(G)$. Если положить найденные t_i в (14), после некоторых преобразований убеждаемся, что (14) переходит в равенство.

Итак, для любого полного хроматического и регулярного графа неравенство (14), а, следовательно, и неравенство (3) переходит в равенство. Оказывается, это все экстремальные графы для неравенства (14), а значит и для неравенства (3), так как верно следующее

Предложение 2. *Если для некоторого m, $2 \leq m \leq k(G)$, в (14) имеет место равенство, тогда G является полным хроматическим и регулярным графом.*

Доказательство. Так как в (14) имеет место равенство, в (10) имеет место равенство для произвольной клики $\Delta \in K_m(G)$ (см. приведенное выше доказательство неравенства (14)). Согласно лемме 1 G является полным хроматическим графом. Из того, что в (14) имеется равенство, следует, что в (13) тоже имеет место равенство (см. доказательство неравенства (14)). Тогда согласно лемме 2 имеем $|A(\Delta'_1)| = |A(\Delta'_2)|$ для любых $\Delta'_1 \in K_{m-1}(G)$ и $\Delta'_2 \in K_{m-1}(G)$. Докажем, что граф G регулярен, т. е. что все его хроматические классы имеют одинаковое число элементов. Пусть $\Delta' \in K_{m-1}(G)$. Клика

Δ' имеет по одной вершине в $m-1$ хроматических классов и очевидно $|A(\Delta')|$ равняется произведению мощностей остальных хроматических классов. Итак, мы доказали, что произведение мощностей любых $k(G)-(m-1)$ хроматических классов одно и то же. Так как $m\geq 2$, из этого следует, что все хроматичеткие классы равномощны. Доказательство предложения завершено.

4. Некоторые экстремальные свойства полных хроматических и регулярных графов. Запишем неравенство (14) следующим образом:

$$(m+1)t_{m+1}/mt_m \geq mt_m/(m-1)t_{m-1}-t_1/m(m-1),\quad 2\leq m\leq k(G). \tag{15}$$

Почленным суммированием неравенств типа (15) получаем

$$(m+1)t_{m+1}/mt_m \geq it_i/(i-1)t_{i-1}-(m-i+1)t_1/m(i-1), \tag{16}$$

которое выполнено для любых m, i, удовлетворяющих неравенствам $2\leq i\leq m \leq k(G)$. С помощью предложения 2 получаем

Следствие 1. *Для любых m, i, для которых $2\leq i\leq m\leq k(G)$, верно неравенство (16). Оно переходит в равенство для некоторых m и i, удовлетворяющих $2\leq i\leq m\leq k(G)$, тогда и только тогда, когда G — полный хроматический и регулярный граф.*

При $i=2$ следствие 1 принимает следующий вид.

Следствие 2. *Если $2\leq m\leq k(G)$, то*

$$(m+1)t_{m+1}/mt_m \geq 2(t_2-(m-1)t_1^2/2m)/t_1. \tag{17}$$

Это неравенство переходит в равенство для некоторого m, $2\leq m\leq k(G)$, тогда и только тогда, когда G — полный хроматический и регулярный граф.

При $m=k(G)$ следствие 1 принимает следующий вид:

Следствие 3. *Для любого i, $2\leq i\leq k(G)$ имеем*

$$it_i/(i-1)t_{i-1}\leq (k(G)+1-i)t_1/(i-1)k(G). \tag{18}$$

Неравенство (18) переходит в равенство для некоторого i, $2\leq i\leq k(G)$, тогда и только тогда, когда G — полный хроматический и регулярный граф.

При $i=2$ из следствия 3 вытекает

Следствие 4. *Верно неравенство*

$$t_2\leq (k(G)-1)t_1^2/2k(G) \tag{19}$$

п оно преходит в равенство тогда и только тогда, когда G — полный хроматический и регулярный граф.

Неравенство (19) установлено Тураном [3], а следствие 4 является ьастным случаем одного утверждения, доказанного в [4].

Почленным перемножением неравенств типа (18) получаем с помощью элдствия 3 следующее предложение:

Следствие 5 ([4]). *Для любого i, $2\leq i\leq k(G)$, выполняется неравенство*

$$t_i\leq \binom{k(G)}{i}\cdot\left(\frac{t_1}{k(G)}\right)^i. \tag{20}$$

Он переходит в равенство для некоторого i, $2\leq i\leq k(G)$, тогда и только тогда, когда G — полный хроматический и регулярный граф.

Почленным перемножением неравенств типа (18) можно получить из следствия 3 и следующее более общее по сравнению со следствием 5 предложение.

Следствие 6 ([5]). *При $2 \le j < i \le k(G)$ выполняется неравенство*

$$t_i \binom{k(G)}{i}^{-1} \left(\frac{t_1}{k(G)}\right)^{-i} \le t_j \binom{k(G)}{j}^{-1} \left(\frac{t_1}{k(G)}\right)^{-j}. \tag{21}$$

Оно переходит в равенство для некоторых i и j, $2 \le j < i \le k(G)$, тогда и только тогда, когда G — полный хроматический и регулярный граф.

Замечание. В [5] Н. Хаджиивановым доказано следующее более сильное утверждение.

Если $2 \le j < i \le k(G)$, тогда

$$\left(t_i \Big/ \binom{k(G)}{i}\right)^{1/i} \le \left(t_j \Big/ \binom{k(G)}{j}\right)^{1/j} \tag{22}$$

и притом (22) переходит в равенство для некоторых i и j, $2 \le j < i \le k(G)$, тогда и только тогда, когда G — полный хроматический и регулярный граф.

Покажем, как из этой теоремы легко вывести неравенство (21). Положим

$$\alpha = t_i \binom{k(G)}{i}^{-1} \left(\frac{t_1}{k(G)}\right)^{-i} \quad \text{и} \quad \beta = t_j \binom{k(G)}{j}^{-1} \left(\frac{t_1}{k(G)}\right)^{-j}.$$

Тогда неравенство (21) можно записать как $\alpha \le \beta$, а неравенство (22) — как $\alpha^{1/i} \le \beta^{1/j}$. Из последнего неравенства следует $\alpha \le \beta^{i/j}$. С другой стороны, $\beta \le 1$ (см. следствие 5) и, следовательно, $\beta^{i/j} \le \beta$, так как $i/j > 1$. Таким образом неравенство (22) влечет неравенство (21). Если G — полный хроматический и регулярный граф, тогда очевидно $\alpha = \beta$. Пусть теперь $\alpha = \beta$. Тогда $\alpha^{1/i} = \beta^{1/j}$, так как иначе $\alpha < \beta^{i/j} \le \beta$. Из цитированной выше теоремы следует, что G — полный хроматический и регулярный граф. Замечание завершено.

Допустим, что $t_2 \ge (m-1)t_1^2/2m$. Почленным перемножением неравенств типа (17) получаем следующее неравенство:

$$\frac{(m+1)t_{m+1}}{i\,t_i} \ge \left(\frac{2}{t_1}\right)^{m+1-i} \prod_{\nu=i}^{m} \left(t_2 - \frac{\nu-1}{2\nu}\, t_1^2\right) \tag{23}$$

при $2 \le i \le m \le k(G)$.

С помощью следствия 2 получаем

Следствие 7. *Если $2 \le i \le m \le k(G)$ и $t_2 \ge (m-1) \cdot t_1^2/2m$, тогда верно неравенство (23). Оно переходит в равенство при $t_2 = (m-1)t_1^2/2m$ для некоторых m и i, $2 \le i \le m \le k(G)$, тогда и только тогда, когда G — полный хроматический и регулярный граф.*

При $i = 2$ из следствия 7 получаем

Следствие 8. *Если $2 \le m \le k(G)$ и $t_2 \ge (m-1)t_1^2/2m$, тогда верно неравенство*

$$(m+1)t_{m+1} \ge \frac{2^m}{t_1^{m-1}} \prod_{\nu=1}^{m} \left(t_2 - \frac{\nu-1}{2\nu}\, t_1^2\right). \tag{24}$$

Если $2 \le m \le k(G)$ и $t_2 \ge (m-1)t_1^2/2m$, равенство в (24) имеется тогда и только тогда, когда G — полный хроматический и регулярный граф.

Из следствия 8 легко вывести следующее

С л е д с т в и е 9. *Если $2 \leq m \leq k(G)$ и $t_2 \geq \binom{m}{2}\left(\frac{t_1}{m}\right)^2$, тогда для любого s, $2 \leq s \leq m$, верно неравенство*

$$t_{s+1} \geq \binom{m}{s+1}\cdot\left(\frac{t_1}{m}\right)^{s+1}. \tag{25}$$

При $2 \leq s \leq m$ и $t_2 \geq \binom{m}{2}\left(\frac{t_1}{m}\right)^2$ в неравенстве (25) имеет место равенство тогда и только тогда, когда G — полный хроматический и регулярный граф.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно $t_2 \geq (s-1)t_1^2/2s$. Из следствия 8 получаем

$$(s+1)t_{s+1} \geq \frac{2^s}{t_1^{s-1}} \prod_{\nu=1}^{s}\left(t_2 - \frac{\nu-1}{2\nu}t_1^2\right). \tag{26}$$

Очевидно $t_2-(\nu-1)t_1^2/2\nu \geq (m-\nu)t_1^2/2m\nu$. С помощью (26) получаем искомое неравенство (24). Если G — полный хроматический и регулярный граф, тогда ясно, что в (25) имеет место равенство. Допустим теперь, что $t_2 \geq (m-1)t_1^2/2m$ и в (25) есть равенство. Тогда в (26) имеется равенство и так как $t_2 \geq (s-1)t_1^2/2s$, то согласно следствию 8 граф G — полный хроматический и регулярный. Доказательство следствия завершено.

З а м е ч а н и е. Напомним, что если t_1/m — целое, тогда $\binom{m}{r}\left(\frac{t_1}{m}\right)^r$ представляет число r-клик полного m-хроматического и регулярного графа с t_1 вершинами. Без предположения о делимости t_1 на m число $\binom{m}{r}\left(\frac{t_1}{m}\right)^r$ не меньше числа r-клик графа Турана $T(t_1, m)$ с t_1 вершинами и хроматическим числом m [4].

Положим $p_r = (P_r)\cdot\left(\frac{t_1}{p}\right)^r$, где p — вещественное число, $p \neq 0$.

Легко проверить, что если $p_{i-1} \neq 0$ и $p_m \neq 0$, то

$$(m+1)p_{m+1}/mp_m = ip_i/(i-1)p_{i-1} - (m-i+1)t_1/m(i-1). \tag{27}$$

Почленным вычитанием (16) и (27) получаем

$$(m+1)m^{-1}(t_{m+1}/t_m - p_{m+1}/p_m) \geq i(i-1)^{-1}(t_i/t_{i-1} - p_i/p_{i-1}), \tag{28}$$

где $2 \leq i \leq m \leq k(G)$ и $p \neq 1, 2, \ldots, m-1$.

С помощью следствия 1 легко установить верность следующего утверждения.

С л е д с т в и е 10. *Если $2 \leq i \leq m \leq k(G)$ и $p \neq 1, 2, \ldots, m-1$, тогда верно неравенство (28). При $2 \leq i \leq m \leq k(G)$ и $p \neq 1, 2, \ldots, m-1$ неравенство (28) переходит в равенство тогда и только тогда, когда G — полный хроматический и регулярный граф.*

Так как при $2 \leq i \leq m$ имеем $mi/(m+1)(i-1) > 1$, то из (28) следует, что верно следующее.

С л е д с т в и е 11. *Если $2 \leq i \leq m \leq k(G)$ и $p \neq 1, 2, \ldots, m-1$, тогда из неравенства*

$$t_i/t_{i-1} \geq p_i/p_{i-1} \tag{30}$$

следует неравенство

(31) $$t_{m+1}/t_m-p_{m+1}/p_m \geqq t_i/t_{i-1}-p_i/p_{i-1}\,.$$

Притом, если первое неравенство строгое, то и второе — строгое.

Докажем теперь следующее

Следствие 12. *Пусть* $2 \leqq m \leqq k(G)$ *и* $p>m-1$. *Тогда, если*

(32) $$t_m \geqq p_m\,,$$

то

(33) $$t_{m+1} \geqq p_{m+1}\,.$$

Притом, если неравенство (32) — *строгое, то и неравенство* (33) — *строгое. При* $2 \leqq m \leqq k(G)$ *и* $p>m-1$, *если выполнено* (32), *то равенство в* (33) *имеется тогда и только тогда, когда* G — *полный хроматический и регулярный граф.*

Доказательство. Докажем сначала, что существует i, $2 \leqq i \leqq m$, для которого

(34) $$t_i/t_{i-1} \geqq p_i/p_{i-1}\,.$$

Действительно, допустим, что

(35) $$t_i/t_{i-1}<p_i/p_{i-1} \text{ для любого } i,\ 2 \leqq i \leqq m.$$

Почленным перемножением неравенств (35) получаем $t_m<p_m$, что противоречит неравенству (32).

Итак, существует i, $2 \leqq i \leqq m$, для которого выполнено (34). Тогда согласно следствию 11 имеем

(36) $$t_{m+1}/t_m \geqq p_{m+1}/p_m\,.$$

Из (32) и (36) следует искомое (33) и притом ясно, что если (32) строгое, то и (33) тоже строгое. Впрочем, для доказательства последнего утверждения достаточно заметить, что если (32) — строгое, тогда (34) тоже строгое и, следовательно, (36) — строгое и значит (33) — строгое.

Если G — полный хроматический и регулярный граф, тогда $t_m = \binom{k(G)}{m}\left(\frac{t_1}{k(G)}\right)^m$. Если, кроме того, в (32) имеется равенство, то $p_m = \binom{p}{m}\left(\frac{t_1}{p}\right)^m = \binom{k(G)}{m}\left(\frac{t_1}{k(G)}\right)^m$ и значит $p=k(G)$ [5]. Теперь ясно, что (33) переходит в равенство

Пусть сейчас выполнено (32), однако в (33) есть равенство. Тогда согласно доказанному выше в (32) тоже есть равенство. Из (34) следует, что в (28) имеется равенство. Следовательно, G — полный хроматический и регулярный граф. Доказательство следствия завершено.

Заметим, что следствие 12 обобщает следствие 9.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. A. Nordhaus, B. M. Stewart. Triangles in an ordinary graph. *Canad. J. Math.*, **15**, 1963, 33—41.
2. J. W. Moon, L. Moser. On a problem of Turán. *Magyar tud. akad. Mat. Kutató int. közl.*, ser. A., 7, 1962, 283—285.
3. P. Turán. On the theory of graphs, *Colloq. Math.*, 3, 1954, 19—30.
4. Н. Хаджииванов. Обобщение теоремы Турана о графах. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 1567—1570.
5. Н. Хаджииванов. Неравенства для графов. *Доклады БАН*, **30**, 1977, 793—796.

Единый центр математики и механики
София 1090 *П. Я. 373*

Поступила 2. 2. 1978