Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ВТОРОЙ ФАКТОРИАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ВЕТВЯЩИХСЯ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

ПЕНКА И. МАЙСТЕР

Для ветвящихся диффузионных процессов в ограниченной области с поглощающей границей доказано, что асимптотическое поведение второго факториального момента при $t \to \infty$, где t — временной параметр, аналогично асимптотическому поведению второго факториального момента ветвящихся процессов с конечным числом типов частиц.

1. Описание модели. Пусть X — ограниченная открытая область r-мерного эвклидового пространства с достаточно гладкой границей ∂X, x_t — диффузионный процесс на X с поглощающим барьером на границе, $k(x)$ — ограниченная непрерывная функция на X, т. е. $0<c_1\leqq k(x)\leqq c_2<\infty$. Через x_t^0 обозначим обрывающийся диффузионный процесс, равный $\exp\left(-\int_0^t k(x_s)ds\right)$ — подпроцессу для x_t. Каждую траекторию процесса x_t^0 будем рассматривать как траекторию блуждающей частицы. При этом, если в произвольный момент времени t частица находилась в точке $y\in X$, то в временном интервале $t, t+\Delta t)$ с вероятностью $k(y)\Delta t+o(\Delta t)$ она исчезнет и превратится в некоторую случайную совокупность новых частиц. Количество и положение этих частиц определяется случайной мерой η_y, т. е. для любого борелевского подмножества U области X случайная величина $\eta_y(U)$ равна числу частиц-потомков в множестве U в момент превращения, если частица-предок в момент превращения находилась в точке $y\in X$ (предполагаем, что превращение (распад) частиц происходит мгновенно). Каждая новая частица, независимо от других частиц, эволюционирует аналогичным образом. Первоначальная частица составляет нулевое поколение. Все частицы, получившиеся в конце жизни частицы нулевого поколения, составляют первое поколение и т. д. Состояние системы определяется количеством частиц и их положением внутри области X. Основными характеристиками системы являются условные случайные меры μ_{xt} и μ_{xn}, где для любого борелевского подмножества U области X случайная величина $\mu_{xn}(U)$ равна числу частиц n-ого поколения в множестве U, если в начальный момент времени была одна частица и она находилась в точке $x\in X$, а $\mu_{xt}(U)$ равна числу частиц всех поколений в множестве U в момент времени t, если в начальный момент была одна частица и она находилась в точке $x\in X$.

2. Производящие функционалы мер μ_{xt}, μ_{xn}. Обозначим σ-алгебру борелевских множеств области X через $\mathcal{B}$. Рассмотрим пространство $B(X)$ ($C(X)$)-определенных на X, ограниченных, $\mathcal{B}$-измеримых (непрерывных) функций с нормой

$$\|f\|=\operatorname*{Sup}_{x\in X}|f(x)|. \tag{1}$$

Обозначим K_B (K_C)-конус неотрицательных функций пространства $B(X)$ ($C(X)$) и введем полуупорядоченность, полагая $f \geq g$, если $f-g \in K_B(K_C)$. Пусть $S_B((S_C))$ — единичный шар пространства $B(X)$ ($C(X)$).

Введем следующие операторы:

$$H: S_B \to S_B, \ Hf(x) = \mathsf{E} \exp\{\int_X \log f(z)\, \eta_x(dz)\}, \tag{2}$$

$$F_n: S_B \to S_B, \ F_n f(x) = \mathsf{E} \exp\{\int_X \log f(z) \mu_{xn}(dz)\}, \tag{3}$$

$$F_t: S_B \to S_B, \ F_t f(x) = \mathsf{E} \exp\{\int_X \log f(z) \mu_{xt}(dz)\}. \tag{4}$$

Из определений (2)—(4) видно, что операторы H, F_n, F_t (n, t фиксированы) являются аналитическими в S_B векторными функциями векторного аргумента. Их значения на простых функциях $f: 0 \leq f \leq 1$, где $1(x) \equiv 1$, однозначно определяют распределение вероятностей целочисленных случайных мер η_y, μ_{xn}, μ_{xt}. Например, если $f(z) = \sum_{j=0}^m f_i \chi_{U_j}(z)$, то $\log f(z) = \sum_{j=1}^m \log f_j \chi_{U_j}(z)$ и $Hf(y) = \mathsf{E} f_1^{\eta_y(U_2)} \ldots f_m^{\eta_y(U_m)}$, т. е. $Hf(y)$ является производящей функцией целочисленного случайного вектора $(\eta_y(U_2), \eta_y(U_2), \ldots \eta_y(U_m))$.

Будем предполагать, что случайная мера η_y:

I) является измеримой функцией y,

II) для любого $U \in \mathcal{B}$, $\mathsf{P}\{\eta_y(U) > 0\} > 0$ для всех $y \in U$,

III) $\mathsf{P}\{\eta_y(X) < \infty\} = 1$ для всех $y \in X$, т. е. $H1 = 1$.

Предположение II) означает, что с положительной вероятностью потомство любой частицы расположено вокруг точки превращения, т. е. исключает возможности существования окрестности точки превращения, в которой с вероятностью единица число частиц-потомков равно нулю.

Пусть T_t — полугруппа диффузионного процесса x_t, T_t^0 — полугруппа обрывающегося диффузионного процесса x_t^0, т. е.

$$T_t^0 f(x) = \mathsf{E}_x \exp\{-\int_0^t k(x_s) ds\} f(x_t). \tag{5}$$

Икэда, Нагасава и Ватанбэ [1; 2] доказали, что операторы H_t и F_t связаны соотношением

$$F_t f(x) = T_t^0 f(x) + h(t, x) + \int_0^t T_s^0 (kHF_{t-s} f)(x) ds, \ f \in S_B, \tag{6}$$

причем $h(t, x) = 1 - T_t^0 1(x) - \int_0^t T_s^0 k(x) ds$ [2, 98—102].

Обозначим через $p(t, x, y)$ переходную плотность процесса x_t. Очевидно, если $k(x) = k$, то уравнение (6) имеет вид

$$F_t f(x) = \int_X e^{-kt} f(y) p(t, x, y) dy + \int_0^t \int_X e^{-ks} (kHF_{t-s} f)(y) p(s, x, y)\, dy ds$$

$$+ 1 - \int_X e^{-kt} p(t, x, y) dy - \int_0^t \int_X k e^{-ks} p(s, x, y) dy\, ds.$$

Пусть $\mathcal{L}$ — инфинитезимальный оператор полугруппы T_t, т. е.

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^r a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^r b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}; \ x \in X, \ u(x)\big|_{x \in \partial X} = 0, \tag{7}$$

где для любых $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$, $\sum_{i,j=1}^r a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c\sum_{i=1}^r \xi_i^2$, $c>0$, $x \in X$. Предполагаем, что коэффициенты сноса $b_i(x)$ и производные от коэффициентов диффузии $\partial a_{ij}(x)/\partial x_j$; $i, j=1, 2, \ldots r$, удовлетворяют в замкнутой области $\bar{X}$ некоторому условию Гельдера. Обозначим через $D(Z)$ область определения инфинитезимального оператора $\mathfrak{L}$. Если $f \in D(\mathfrak{L}) \cap S_C$, то $u(t, x)=F_t f(x)$ удовлетворяет уравнению

(8) $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}=\mathfrak{L}u+k[Hu-u],\ x \in X,\ t \in (0, \infty),\ \lim\limits_{t \downarrow 0}\|u(t, x)-f(x)\|=0,\ u(t, x)|_{x \in \partial X}=1$

[1, с. 402—404].

Для описания ветвящихся диффузионных процессов с дискретным временем (т. е. свойства меры μ_{xn}) необходимо рассмотреть функцию $\mathcal{K}(x, y)$, равную плотности точки $y \in X$, в которой происходит превращение частицы, находившейся в момент своего рождения в точке $x \in X$. Легко заметить, что для рассматриваемой нами модели

$$\mathcal{K}(x, y)=\mathsf{E}_x\int_0^\tau \exp\{-\int_0^t k(x_s)ds\}k(x_t)\delta(x_t-y)dt=\int_0^\infty (T_t^0 k\delta_y(.))(x)dt,$$

где τ есть момент первого выхода процесса x_t на границу ∂X, $\delta_y(x)=\delta(x-y)$, есть дельта-функция. В силу [5, теорема 5, § 2, гл. 13] $\mathcal{K}(x, y)$ является функцией Грина для задачи Дирихле

(9) $$\mathfrak{L}v-kv=-kf,\ x \in X,\ v(x)|_{x \in \partial X}=0,$$

где f — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Очевидно что, если $k(x)\equiv k$, то $\mathcal{K}(x, y)=\int_0^\infty e^{-kt}kp(t, x, y)dt$.

В силу независимости эволюции отдельных частиц и строгой марковости диффузионного процесса x_t производящие функционалы F_n, H связаны рекуррентным соотношением

(10) $$F_{n+1}f(x)=1-\int_X \mathcal{K}(x, y)dy+\int_X \mathcal{K}(x, y)(HF_nf)(y)dy,\ F_0f=f.$$

3. Факториальные моменты мер η_y, μ_{xn}, μ_{xt}. Для любой случайной меры μ в некотором измеримом пространстве $(X, \mathcal{B})$ функция множеств $\mathsf{E}\mu(U)$, $U \in \mathcal{B}$ является мерой на $X, \mathcal{B})$, а функция множеств

(11) $$\mathsf{E}\mu(U_1)\mu(U_2)\ldots\mu(U_m);\ U_1, U_2, \ldots U_m \in \mathcal{B},$$

является m-вариантной мерой. Функция множеств $\mathsf{E}\mu(U)$ называется математическим ожиданием меры μ, а функция множеств (11) называется m-ым моментом меры μ. Приведем определение m-ого факториального момента $\varphi_m(U_1, U_2, \ldots U_m)$ для случая, когда m-ый момент меры конечен.

Определение 1. *Первый факториальный момент φ_1 целочисленной случайной меры μ определим как $\varphi_1(U)=\mathsf{E}\mu(U)$.*

Пусть уже определены k-ые факториальные моменты $\varphi_k(U_1, U_2, \ldots U_k)$, $U_i \in \mathcal{B}$, $i=1, 2, \ldots k$; $1 \leq k<m$. Тогда m-ый факториальный момент $\varphi_m(U_1, U_2, \ldots U_m)$ определяется из равенства

(12) $$\mathsf{E}\mu(U_2)\mu(U_2)\ldots\mu(U_m=\varphi_m(U_1, U_2, \ldots U_m)+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{a_k}\varphi_k(V_{J1}V_{J2}\ldots V_{Jk}),$$

где $J_1, J_2, \ldots J_k$ — подмножества, на которые разбивается множество индексов $\{1, 2, \ldots m\}$, множество $V_Y=\cap_{j \in Y}U_j$. Суммирование $\sum_{a_k}$ распространяется на всевозможные разбиения $J_1, J_2, \ldots J_k$ множества $\{1, 2, \ldots m\}$ (разбиения, отличающиеся только порядком, считаются одинаковыми).

Например, второй факториальный момент меры μ равен $\varphi_2(U_1, U_2) = \mathrm{E}\mu(U_2)\mu(U_2) - \mathrm{E}\mu(U_1 \cap U_2)$: $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$.

Обозначим вторые факториальные моменты мер η_x, μ_{xn}, μ_{xt} через $b(x;\, U_1, U_2)$, $n_n(x;\, U_1, U_2)$, $n_t(x;\, U_1, U_2)$, соответственно. Введем линейные операторы

$$Kf(x) = \int_X f(y)\mathcal{K}(x, y)dy, \tag{13}$$

$$Af(x) = \int_X f(y)\mathrm{E}\eta_x(dy), \quad B[f, g](x) = \int_X\int_X f(y)g(z)b(x;\, dy, dz), \tag{14}$$

$$M_n f(x) = \int_X f(y)\mathrm{E}\mu_{xn}(dy), N_n[f, g](x) = \int_X\int_X f(y)g(z)n_n(x;\, dy, dz), \tag{15}$$

$$M_t f(x) = \int_X f(y)\mathrm{E}\mu_{xt}(dy), \ N_t[f, g](x) = \int_X\int_X f\,y)g(z)n_t(x;\, dy, dz). \tag{16}$$

В работе [6] доказано, что если $\operatorname{Sup}\mathrm{E}\,\eta_y(X) \leq \mathrm{const} < \infty$, то оператор $M_1 = KA$ и при $n \to \infty$

$$M_n f(x) = \lambda_0^n \omega_0(x)\omega_0^*(f) + Q^n f(x), \tag{17}$$

где λ_0 есть положительное собственное значение оператора $M_1(M_1^*)$, $\omega_0(\ )(\omega_0^*)$ — соответствующий ему собственный вектор: $M_1\omega_0 = \lambda_0\omega_0$, $M_1^*\omega_0^* = \lambda_0\omega_0^*$. При этом $\omega_0 \in K_C$, $\|\omega_0\| = 1$, $\omega_0^*(\omega_0) = 1$, ω_0^* является строго положительным функционалом относительно конуса K_C. Спектральный радиус оператора Q строго меньше λ_0, т. е.

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|Q^n\|} < \lambda_0 \tag{18}$$

[4, теоремы 2.5 и 2. 10—2.14]. Асимптотическое разложение (17) означает, что при $n \to \infty$

$$\mathrm{E}\,\mu_{xn}(U) = \lambda_0^n \omega_0(x)\omega_0^*(\chi_U(x)) + o(\lambda_0^n). \tag{19}$$

Ввиду (19) ветвящийся диффузионный процесс называется докритическим, критическим или надкритическим, если, соответственно, $\lambda_0 < 1$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 > 1$.

Например, если $X = [0,1]$, $\mathscr{L} = D\partial^2/\partial x^2$, $k(x) = k$, $\mathrm{E}\,\eta_x(U) = a$, (для всех $x \in X$, $U \in \mathscr{B}$), то $\lambda_0 = ak/(k + D\pi^2)$, $\omega_0(x) = \sqrt{2}\sin \pi x$. Поэтому ветвящийся диффузионный процесс будет критическим, если $\mathrm{E}\,\eta_x(X) = (k + D\pi^2)/k$.

Математическое ожидание меры μ_{xt} рассмотрено автором в работе [7]. Там доказано, что полугруппа M_t имеет следующее асимптотическое поведение при $t \to \infty$:

$$M_t f(x) = e^{\mu_0 t}\varphi_0(x)\varphi_0^*(f) + o(e^{\mu_1 t}\|f\|), \ \mu_1 < \mu_0, \tag{20}$$

где μ_0 есть первое собственное значение, $\varphi_0(\cdot)$ — соответствующий ему собственный вектор в задаче

$$\mathscr{L}\,v(x) + k(x)[Av(x) - v(x)] = \mu v(x), \ x \in X, \ v(x)\big|_{x\in\partial X} = 0, \tag{21}$$

функция $\varphi_0 \in K_C$, $\|\varphi_0\| = 1$, φ_0^* является строго положительным функционалом относительно конуса K_C и $\varphi_0^*(\varphi_0) = 1$.

Ветвящийся диффузионный процесс с непрерывным временем называется докритическим, критическим и надкритическим в зависимости от того, является ли $\mu_0<0$, $\mu_0=0$ или $\mu_0>0$. В указанном выше частном случае $\mu_0=k(a-1)-D\pi^2$.

Теперь мы готовы приступить к рассмотрению асимптотического поведения операторов $N_n[f,g]$ и $N_t[f,g]$.

Теорема 1. *Если второй факториальный момент $b(y;U_1,U_2)$ меры η_y равномерно ограничен, то второй факториальный момент меры μ_{xn} тоже равномерно ограничен и соответствующий ему билинейный оператор $N_n[f,g]$ удовлетворяет соотношению*

$$(22)\qquad N_{n+1}[f,g]=M_1N_n[f,g]+N_1[M_1^nf,M_1^ng],\ N_1[f,g]=KB[f,g],$$

$$N_0[f,g]\equiv 0,\ M_0f=fN.$$

При $n\to\infty$

$$N_{n+1}[f,g](x)=\begin{cases}\lambda_0^n\omega_0(x)\omega_0^*(f)\omega_0^*(g)(\mathrm{const}+o(1)], & \text{если } \lambda_0<1,\\ n\omega_0(x)\omega_0^*(f)\omega_0^*(g)[\omega_0^*N_1[\omega_0,\omega_0]-o(1)], & \text{если } \lambda_0=1,\\ \lambda_0^{2n}\varkappa(x)\omega_0^*(f)\omega_0^*(g)[1+o(1)], & \text{если } \lambda_0>1,\end{cases}$$

где функция $\varkappa(x)$ не зависит от f и g и является решением уравнения

$$(23)\qquad \lambda_0^2\varkappa(x)=M_1\varkappa(x)+KB[\omega_0,\omega_0](x).$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что $b(y;X,X)=\mathsf{E}[\eta_y(X)]^2-\mathsf{E}\,\eta_y(X)$ и для любого фиксированного $y\in X$ в силу леммы Абеля о сходимости рядов с положительными членами $\lim\limits_{\alpha\to1}\delta^2H[\alpha1,1,1](y)=b(y;X,X)$.

Потом, в силу аналитичности оператора H внутри S_B и счетной аддитивности случайной меры η_y [3, гл. XII], имеем для любой слабо сходящейся к 1 последовательности функции $v_n\nearrow 1$ $\lim_{n\to\infty}\delta^2H[v_n;f,g](x)=B[f,g](x)$ $\forall$ фиксированного $x\in X$.

Рекуррентное соотношение (10) при $n=1$ означает, что для любой внутренней точки $v\in S_B$ выполнено $\delta^2F_1[v;f,g]=K\delta^2H[v;f,g]$. Ввиду того, что $\mathcal{K}(x,y)$ является функцией Грина задачи Дирихле (9), интегральный оператор K есть оператор типа потенциала, действует, в частности, из $B(X)$ в $C(X)$ и вполне непрерывен.

Следовательно, из слабой непрерывности вариации $\delta^2H[v;f,g]$ в точке $v=1$ следует сильная непрерывность вариации $\delta^2F_1[v;f,g]$ в точке $v=1$, т. е. если $v(x)\to1$ для любого $x\in X$, то $\lim\limits_{v\to1}\delta^2F_1[v;f,g]=\delta^2F_1[1;f,g]=N_1[f,g]$.

Аналогично, из рекуррентного соотношения (10) получим ограниченность билинейного оператора N_n и соотношение (22) для любого n.

Теперь подставим в (22) разложение (17) оператора M_1^n. Получим, что

$$(24)\qquad N_{n+1}[f,g]=\sum_{j=0}^{n}\lambda_0^{n-j}\omega_0\omega_0^*N_1[M_1^jf,M_1^jg]+\sum_{j=0}^{n}Q^{n-j}N_1[M_1^jf,M_1^jg].$$

Пусть $\lambda_0<1$ тогда, если $\lambda_0^2<\lambda_1<\lambda_0$, то положим $\varrho_1=\lambda_1$. Если $\lambda_1<\lambda_0^2<\lambda_0$, то выберем ϱ_1 так, чтобы $\lambda_1<\lambda_0^2<\varrho_1<\lambda_0$.

Имеем

$$N_{n+1}[f,g]=\lambda_0^n\omega_0\sum_{j=0}^{n}\lambda_0^j\omega_0^*N_1\left[\frac{M_1^jf}{\lambda_0^j},\ \frac{M_1^jg}{\lambda_0^j}\right]+\varrho_1^n\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\lambda_0^2}{\varrho_1}\right)^j\frac{n-j}{\varrho_1^{n-j}}N_1\left[\frac{M_1^jf}{\lambda_0^j},\ \frac{M_1^jg}{\lambda_0^j}\right]$$

$$=\lambda_0^n\omega_0O(\|fg\|)+O(\varrho_1^n\|fg\|)=\lambda_0^n\omega_0\omega_0^*(f)\omega_0^*(g)\,[\mathrm{const}+o(1)],$$

так как операторы M_1^j/λ_0^j, Q^j/ϱ_1^j, $j=1,2,\ldots$, равномерно ограничены.

Пусть $\lambda_0=1$. В силу билинейности оператора N_1

$$N_{n+1}[f,g]=\omega_0\sum_{j=0}^{n}\omega_0^*N_1[\omega_0,\omega_0]\omega_0^*(f)\omega_0^*(g)+\sum_{j=0}^{n}Q^{n-j}N_1[M_1^jf,\ M_1^jg]$$

$$+\omega_0\sum_{j=0}^{n}\omega_0^*\{N_1[\omega_0\omega_0^*(f),\ Q_g^j]+N_1[Q^jf,\ \omega_0\omega_0^*(g)]+N_1[Q^jf,\ Q^jg]\}$$

$$=n\omega_0(\cdot)\omega_0^*(f)\omega_0^*(g)\omega_0^*(N_1[\omega_0,\ \omega_0])+\sum_{j=0}^{n}O(\lambda_1^j).$$

Очевидно $\sum_{j=0}^{n}O(\lambda_1^j)=o(n)$, т. к. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}O(\lambda_2^j)<\mathrm{const}$ $\lim_{n\to\infty}\lambda_1^n=0$.

Если $\lambda_0>1$, то в (22) вынесем λ_0^{2n} перед знаком суммы и получим, что

$$N_{n+1}[f,g]=\lambda_0^{2n}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{\lambda_0^{n-j}}\,\frac{M_1^{n-j}}{\lambda_0^{n-j}}\,N_1\left[\frac{M_1^jf}{\lambda_0^j},\ \frac{M_1^jg}{\lambda_0^j}\right]=O(\lambda_0^{2n}),$$

так как операторы M_1^j/λ_0^j, $j=1,2,\ldots$, равномерно ограничены.

Представим $O(\lambda_0^{2n})$ в виде $\lambda_0^{2n}\varkappa(x)\omega_0^*(f)\omega_0^*(g)+o(\lambda_0^{2n})\|fg\|$. Для определения функции $\varkappa(x)$ достаточно подставить асимптотическое разложение операторов N_{n+1}, M_1^n в (22) и приравнить главные члены. Получим, что $\varkappa(x)$ должна удовлетворять уравнению (23).

Теорема 2. *Если второй факториальный момент $b(y;\,U_1,\,U_2)$ меры η_y равномерно ограничен, то второй факториальный момент меры μ_{xt} тоже равномерно ограничен для любого фиксированного t, и соответствующий ему билинейный оператор $N_t[f,g]$ удовлетворяет соотношению*

(25) $$N_t[f,g](x)=\int_0^t(M_{t-s}B[M_sf,\ M_sg])(x)ds:\ f,\ g\in S_B.$$

При $t\to\infty$

$$N_t[f,g](x)=\begin{cases}e^{\mu_0t}\varphi_0(x)\varphi_0^*(f)\varphi_0^*(g)\,[\mathrm{const}+o(1)], & \textit{если}\ \mu<0,\\ t\,\varphi_0(x)\varphi_0^*(f)\varphi_0^*(g)[\varphi_0^*B[\varphi_0,\ \varphi_0]+o(1)], & \textit{если}\ \mu_0=0,\\ e^{2\mu_0t}\,\psi(x)\varphi_0^*(f)\varphi_0^*(g)[1+o(1)], & \textit{если}\ \mu_0>0.\end{cases}$$

Доказательство. Продифференцируем обе стороны уравнения (6) в некоторой внутренней точке $v\in S_B$:

(26) $$\delta F_t[v;\ f](x)=T_t^0f(x)+\int_0^tT_{t-s}^0\,k\delta H[F_sv,\ \delta F_s[v;\ f]](x)ds,$$

(27) $$\delta^2F_t[v;\ f,g](x)=\int_0^tT_{t-s}^0\,k\{\delta^2H[F_sv;\ \delta F_s[v;\ f],\ \delta F_s[v;\ g]]+\delta H[F_sv;\ \delta^2F_s\ [v;\ \varrho,\ g]]\}.$$

Теперь заметим, что из существования второго факториального момента меры η_y следует слабая непрерывность Hv, $\delta H[v; f]$, $\delta^2 H[v: f, g]$ в $v=1$. Кроме того, $\lim_{f\to 1} F_t f(x) = F_t 1(x)$ для любого фиксированного x в силу счетной аддитивности меры μ_{xt}. $F_t 1(x) = \mathsf{P}\{\mu_{xt}(X) < \infty\} \equiv 1$, так как сделанные предположения достаточны для регулярности процесса [8].

Перейдем к пределу в уравнении (26) при $v \nearrow 1$. Получим, что $\lim v \nearrow 1\ \delta F_t[v; f, g] = w(t, x)$, если он конечен, удовлетворяет уравнению

$$(28) \qquad w(t, x) = T_t^0 f(x) + \int_0^t (T_{t-s}^0 kAw(s, \cdot))(x)ds.$$

Ограниченность оператора A и функции k означает, что уравнение (28) определяет полугруппу $M_t f(x) = w(t, x)$ линейных ограниченных операторов того же класса, что и T_t^0. Аналогично, если перейдем к пределу в уравнении (27), получим, что $\lim_{v\uparrow 1} \delta^2 F_t[v; f, g] = u(t, x)$ должен удовлетворять уравнению

$$u(t, x) = \int_0^t T_{t-s}^0 k\{B[M_s f, M_s g] + Au(s, \cdot)\}(x)ds.$$

Решение последнего уравнения может быть записано через полугруппу M_t следующим образом:

$$(29) \qquad u(t, x) = \int_0^t M_{t-k} B[M_s f, M_s g](x)ds.$$

Следовательно, $N_t[f, g](x) = u(t, x) < \infty$, $x \in X$, t фиксировано.

Если $\mu_0 < 0$, то в асимптотическом разложении (20) оператора M_t выберем μ_1 так, чтобы $2\mu_0 < \mu_1 < \mu_0$. Представим $o(e^{\mu_1 t}\|f\|)$ в виде $\|f\|\,e^{\mu_1 t}\varepsilon_t(\cdot)$, где $\|\varepsilon_t(x)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Подставим (20) в (29) и проинтегрируем, учитывая равномерную ограниченность операторов $e^{-\mu_0 s} M_s$:

$$N_t[f, g](x) = e^{\mu_0 t}\varphi_0(x)\int_0^t e^{\mu_0 s}\varphi_0^*(kB[e^{-\mu_0 s} M_s f,\ e^{-\mu_0 s} M_s g])ds$$

$$+ e^{\mu_1 t}\int_0^t e^{(-\mu_1+2\mu_0)s}\|kB[e^{-\mu_0 s} M_s f,\ e^{-\mu_0 s} M_s g]\|\,\varepsilon_{t-s}(x)ds$$

$$= e^{\mu_0 t}\varphi_0(x)\varphi_0^*(f)^*\varphi^*(g)\,\mathrm{const} + O(e^{\mu_1 t}).$$

Если $\mu_0 = 0$, имеем аналогично

$$N_t[f, g](x) = \varphi_0(x)\int_0^t \varphi_0^*(kB[\varphi_0\varphi_0^*(f) + \|f\|\,e^{\mu_1 s}\varepsilon_s,\quad \varphi_0\varphi_0^*(g) + \|g\|\,e^{\mu_1 s}\varepsilon_s])ds$$

$$+ \int_0^t \|kB[M_s f, M_s g]\|\,\varepsilon_{t-s}(x)ds = t\varphi_0(x)\varphi_0^*(f)\varphi_0^*(g)\varphi_0^*(kB[\varphi_0, \varphi_0]) + o(t).$$

Если $\mu_0 > 0$, то в (29) вынесем $e^{2\mu_0 t}$ перед интегралом

$$N_t[f, g](x) = e^{2\mu_0 t}\int_0^t e^{-2\mu_0(t-s)} M_{t-s}(kB[e^{-\mu_0 s} M_s f, e^{-\mu_0 s} M_s g])ds = O(e^{2\mu_0 t}).$$

Пусть

$$(30) \qquad O(e^{2\mu_0 t})(x) = \psi(x)e^{2\mu_0 t}\varphi_0^*(f)\varphi_0^*(g)[1 + o(1)].$$

Заметим, что (29) есть решение дифференциального уравнения,

$$\partial u(t, x)/\partial t = \mathcal{L} u(t, x) - k(x)u(t, x) + Au(t, \cdot)(x) + k(x)B[M_t f, M_t g](x), \tag{31}$$

$$u(t, x)|_{x \in \partial X} = 0, \quad u(0+, x) \equiv 0.$$

Для определения функции $\psi(x)$ подставим (30) и (20) в (31) и перейдем к пределу при $t \to \infty$. Получим, что ψ должна удовлетворять эллиптическому уравнению [9, теорема 2, § 1, гл. VI].

$$\mathcal{L}\psi(x) - [k(x) + 2\mu_0]\psi(x) + k(x)(A\psi)(x) + k(x)B[\varphi_0, \varphi_0](x) = 0, x \in X, \ \psi(x)|_{x \in \partial X} = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Ikeda, M. Nagasawa, S. Watanabe. Branching Markov Process I, II. *J. Math. Kyoto Univ.* **8**, 1969, 233—279, 365—411.
2. N. Ikeda, M. Nagasawa, S. Watanabe. Branching Markov Process, III. *J. Math. Kyoto Univ.*, **9**, 1969, 95—160.
3. Б. А. Севастьянов. Ветвящиеся процессы. Москва 1971.
4. М. А. Красносельский. Положительные решения операторных уравнений. Москва, 1962.
5. А. Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов, Москва, 1975.
6. П. И. Майстер. Ветвящиеся процессы с диффузией в ограниченной области с поглощающей границей. *Теория вероятностей и ее применения*, **19**, 1974, 589—595.
7. П. И. Майстер. Математическое ожидание ватвящегося диффузионного процесса с непрерывным временем. *Теория вероятностей и ее применения* (в печати).
8. T. H. Sawits. The Exsplosion Problem for Branching Markov Processes. *Osaka J. Math.*, **6**, 1969, 375—395.
9. Фридман. Уравнения с частными производными параболического типа. Москва, 1968.

Институт иностранных студентов
София

Поступила 24. 2. 1978