Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

СЛАБАЯ ЭРГОДИЧНОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

КУРТ НАВРОТЦКИ

Пусть даны непустые, конечные или счетные множества A и X, семейство $(K_x)_{x\in X}$ стохастических матриц $K_x=(K_x(a, a'))_{a, a'\in A}$ и стационарная случайная последовательность $(\xi_n)_{n\geqq 1}$ со значениями в X.

В работе изучаются эргодические свойства произведений матриц $K_{\xi_1}\cdot\ldots\cdot K_{\xi_m}$. Полученные результаты представляют обобщение теоремы 1 из Навротцки (1977), в которой было предложено, что множество A конечно. Данные доказательства более простые, чем в упомянутой работе.

1. Пусть X есть непустое, конечное или счетное множество, $X_1^{+\infty}=\{(x_n)_{n\geqq 1}: x_n\in X$ для всех $n\geqq 1\}$ и $\mathfrak{X}_1^{+\infty}$ σ-алгебра подмножеств множества $X_1^{+\infty}$, порожденная цилиндрическими множествами. Пусть далее P — стационарный закон распределения на $\mathfrak{X}_1^{+\infty}$, то есть закон распределения на $\mathfrak{X}_1^{+\infty}$, инвариантный относительно сдвига $T: X_1^{+\infty}\to X_1^{+\infty}$, причем T определяется равенством $T(x_n)_{n\geqq 1}=(x_{n+1})_{n\geqq 1}$. Тогда вероятное пространство $[X_1^{+\infty}, \mathfrak{X}_1^{+\infty}, P]$ определяет стационарную случайную последовательность со значениями в X, которую обозначим $(\xi_n)_{n\geqq 1}$. Кроме того, пусть A непустое, не более чем счетное множество и $(K_x)_{x\in X}$ — семейство стохастических матриц $K_x=(K_x(a, a'))_{a, a'\in A}$. В дальнейшем через $K_{x_1\ldots x_m}$ обозначим произведение матриц $K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}$.

Тогда имеет место

Теорема 1. *Для того, чтобы*

$$(1)\qquad P(\lim_{m\to\infty}\sup_{a_1, a_2\in A}\sum_{a\in A}|K_{\xi_1\ldots\xi_m}(a_1, a)-K_{\xi_1\ldots\xi_m}(a_2, a)|=0)=1,$$

необходимо и достаточно, что

$$(2)\qquad P(\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\sup_{a_1,a_2\in A}\sum_{a\in A}|K_{\xi_1\ldots\xi_m}(a_1, a)-K_{\xi_1\ldots\xi_m}(a_2, a)|<2\})=1.$$

Доказательство. Необходимость условия (2) очевидна. Для доказательства достаточности условия (2) пусть $m\geqq 1$ и

$$B_m=\{(x_n)_{n\geqq 1}: x_{l+1}=x_1, \ldots, x_{l+m}=x_m \text{ для бесконечно много } l\geqq 1\}$$

$$=\bigcup_{x'_1,\ldots,x'_m\in X}[\{(x_n)_{n\geqq 1}: x_1=x'_1, \ldots, x_m=x'_m\}$$

$$\cap\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}\{(x_n)_{n\geqq 1}: x_{l+1}=x'_1, \ldots, x_{l+m}=x'_m\}].$$

Тогда в силу теоремы Пуанкаре о возвращении (см., например, [3]), вероятности событий $[\ldots]$ равняются, соответственно, $P(\{(x_n)_{n\geq 1}: x_1=x_1', \ldots, x_m=x_m'\})$, откуда следует, что $P(B_m)=1$ для каждого $m\geq 1$.

Положим

$$\alpha(K_{x_1\ldots x_m})=1-\frac{1}{2}\sup_{a_1,a_2\in A}\sum_{a\in A}|K_{x_1\ldots x_m}(a_1,a)-K_{x_1\ldots x_m}(a_2,a)|$$

для $m\geq 1$ и $x_1,\ldots,x_m\in X$, а

$$S=\bigcap_{m=1}^{\infty}B_m\cap\bigcup_{m=1}^{\infty}\{(x_n)_{n\geq 1}:\alpha(K_{x_1\ldots x_m})>0\}.$$

Тогда из условия (2) и $P(B_m)=1$ для всех $m\geq 1$ получаем $P(S)=1$. Если $(x_n)_{n\geq 1}\in S$, то существуют такое $m\geq 1$ и такая последовательность $(i_n)_{n\geq 1}$, что $\alpha(K_{x_1\ldots x_{m_0}})>0$, $i_1=1$, $i_n+m_0\leq i_{n+1}$ и $x_{i_n}=x_1,\ldots,x_{i_n+m_0-1}=x_{m_0}$ для всех $n\geq 1$. Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(K_{x_{i_n}\ldots x_{i_n+m_0-1}})=+\infty$. Но, из этого равенства и из оценки

$$1-\alpha(K_{x_1\ldots x_m})\geq\prod_{\substack{n\geq 1\\ i_n+m_0-1\leq m}}(1-\alpha(K_{x_{i_n}\ldots x_{i_n+m_0-1}}))$$

[2, с. 371] следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{a_1,a_2\in A}\sum_{a\in A}|K_{x_1\ldots x_m}(a_1,a)-K_{x_1\ldots x_m}(a_2,a)|=2\lim_{m\to\infty}(1-\alpha(K_{x_1\ldots x_m}))=0.$$

Итак, мы получили утверждение (1).

Следующий пример показывает, что условие

$$P(\bigcap_{m=1}\bigcap_{a_1,a_2\in A}\{\sum_{a\in A}|K_{\xi_1\ldots\xi_m}(a_1,a)-K_{\xi_1\ldots\xi_m}(a_2,a)|<2\})=1$$

недостаточно для того, чтобы

$$P(\bigcap_{a_1,a_2\in A}\{\lim_{m\to\infty}\sum_{a\in A}|K_{\xi_1\ldots\xi_m}(a_1,a)-K_{\xi_1\ldots\xi_m}(a_2,a)|=0\})=1$$

если A не конечно: Пусть $A=\{\ldots,-1,0,1,\ldots\}$, а $K_x=(K(n,n'))_{n,n'\in A}$ для всех $x\in X$, причем

$$K(n,n')=\begin{cases}\frac{1}{4}\delta_{-1}(n')+\frac{1}{2}\delta_0(n')+\frac{1}{4}\delta_1(n'), & \text{если } n=0,\\ p_n\delta_{n+1}(n')+(1-p_n)\delta_0(n'), & \text{если } n>0,\\ p_n\delta_{n-1}(n')+(1-p_n)\delta_0(n'), & \text{если } n<0;\end{cases}$$

при этом p_n, $n\geq 1$, выбирается так, что $0<p_n<1$, а $\prod_{n=0}^{\infty}p_n\geq 3/4$.

Тогда для любых $a_1,a_2\in A$ и $m\geq 1$ получаем $K^m(a_1,0)$, $K^m(a_2,0)>0$, а, следовательно, $\sum_{a\in A}|K^m(a_1,a)-K^m(a_2,a)|<2$. С другой стороны, для $n,m\geq 1$ имеют место неравенства

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}K^m(n,k)\geq K^m(n,n+m)=\prod_{r=n}^{n+m-1}p_r\geq\frac{3}{4},$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}K^m(-n,k)\leq 1-\sum_{k=n+1}^{\infty}K^m(-n,-k)\leq 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4},$$

поэтому

$$\sum_{k\in A} |K^m(n,k)-K^m(-n,k)| \geq \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(K^m(n,k)-K^m(-n,k))\right| \geq \frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

2. Пусть теперь Γ-множество целых чисел, $X_{-\infty}^{+\infty}=\{(x_n)_{n\in\Gamma}: x_n\in X$ для всех $n\in\Gamma\}$, а $\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$ — соответствующая σ-алгебра.

Закон распределения P на $\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$ называется стационарным, если он инвариантен относительно сдвига $T: X_{-\infty}^{+\infty}\to X_{-\infty}^{+\infty}$, который определяется равенством $T(x_n)_{n\in\Gamma}=(x_{n+1})_{n\in\Gamma}$. Заметим, что отображения $P\to P((.)\times X_{-\infty}^{0})$ где $X_{-\infty}^{0}=\{(x_n)_{n\leq 0}: x_n\in X$ для всех $n\leq 0\}$, представляет взаимнооднозначное соответствие между множествами стационарных распределений на $\mathfrak{X}_{-\infty}^{\infty}$ и $\mathfrak{X}_{1}^{\infty}$

Пусть далее $\mathfrak{A}$ σ-алгебра всех подмножеств множества A. Если $(K_x)_{x\in X}$ — семейство стохастических матриц на A, то через K обозначим стохастическое ядро на $[A\times X_{-\infty}^{+\infty},\ \mathfrak{A}\times\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}]$, для которого

(3) $$K([a,(x_n)_{n\in\Gamma}],\ \{a'\}\times S)=K_{x_1}(a,a')\,.\,\delta_{(x_{n+1})_{n\in\Gamma}}(S)$$

для $a, a'\in A$, $(x_n)_{n\in\Gamma}\in X_{-\infty}^{+\infty}$, и $S\in\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$.

Тогда для данного стационарного распределения P и семейства $(K_x)_{x\in X}$ закон распределения Q на σ-алгебра $\mathfrak{U}\times\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$ назовем стационарным относительно P и $(K_x)_{x\in X}$ распределением, если Q выполняет условия

(4) $$Q(A\times(\cdot))=P$$

и

(5) $$\int K[a,(x_n)_{n\in\Gamma}],\ (\cdot))\,Q(d[a,(x_n)_{n\in\Gamma}])=Q.$$

Обозначим через $[a,(\xi_n)_{n\in\Gamma}]$ случайную пару, которая определяется вероятностным пространством $[A\times X_{-\infty}^{+\infty},\ \mathfrak{A}\times\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty},\ Q]$, через $(\xi_n)_{n\in\Gamma}$ — случайную последовательность, соответствующую $[X_{-\infty}^{+\infty},\ \mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty},\ P]$.

Распределение Q со свойством (4) можно представить в виде

$$Q(\{a\}\times S)=\int_S q(a,(x_n)_{n\in\Gamma})P(d(x_n)_{n\in\Gamma}),$$

$a\in A$, $S\in\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$. Назовем q-плотностью распределения Q. Очевидно, $q(a,(x_n)_{n\in\Gamma})$ есть условная вероятность

$$q(a,(x_n)_{n\in\Gamma})=Q(a=a\mid(\xi_n)_{n\in\Gamma}=(x_n)_{n\in\Gamma}),$$

а, поэтому, имеет место

(6) $$\sum_{a\in A} q(a,(x_n)_{n\in\Gamma})=1 \text{ для } P\text{— п. в. } (x_n)_{n\in\Gamma}\in X_{-\infty}^{\infty}.$$

Легко доказать [5, утверждение 2.4], что закон распределения Q на $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$ со свойством (4) удовлетворяет условию (5) тогда и только тогда, когда для его плотности q имеет место равенство

(7) $$q(a',(x_{n+1})_{n\in\Gamma})=\sum_{a\in A} q(a,(x_n)_{n\in\Gamma})K_{x_1}(a,a')$$

для всех $a'\in A$ и P— п. в. $(x_n)_{n\in\Gamma}\in X_{-\infty}^{+\infty}$.

Теорема 2. *Пусть даны стационарное распределение* P *на* $\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$ *и семейство стохастических матриц* $(K_x)_{x\in X}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(а) *Существует стационарное относительно* P *и* $(K_x)_{x\in X}$ *распределение* Q *и имеет место соотношение* (2) *из теоремы* 1.

(б) *Существует такое измеримое отображение* $q: A\times X_{-\infty}^0 \to [0, +\infty)$, *что*

$$P\Big(\lim_{m\to\infty}\sup_{a_1\in A}\sum_{a\in A}|K_{\xi_1\dots\xi_m}(a_1, a)-q(a,(\xi_{n+m})_{n\leq 0})|=0\Big)=1.$$

(в) *Существует такое измеримое отображение* $q: A\times X_{-\infty}^0 \to [0, +\infty)$, *что*

$$P\Big(\lim_{m\to\infty}\sup_{a_1\in A}\sum_{a\in A}|K_{\xi_{-m}\dots\xi_0}(a_1, a)-q(a,(\xi_n)_{n\leq 0})|=0\Big)=1.$$

Если эти условия выполняются, то существует не более одного стационарного относительно P *и* $(K_x)_{x\in X}$ *распределения* Q, *а отображение* q *из* (б) *и* (в) *является его плотностью. В частности, плотность распределения* Q *не зависит от* $(x_n)_{n\geq 1}$.

Доказательство. Пусть выполняется условие (а). Плотность распределения Q обозначим q. Тогда в силу (6) и (7) получаем для всех $m\geq 0$ и почти всех $(x_n)_{n\in\Gamma}\in X_{-\infty}^{+\infty}$

$$\begin{aligned}
(8)\qquad &\sup_{a_1}\sum_a |K_{x_1\dots x_m}(a_1, a)-q(a,(x_{n+m})_{n\in\Gamma})|\\
&=\sup_{a_1}\sum_a |K^{x_1\dots x_m}(a_1, a)-\sum_{a'} q(a', x_n)_{n\in\Gamma})K_{x_1\dots x_m}(a', a)|\\
&\leq\sup_{a_1}\sum_{a'} q(a',(x_n)_{n\in\Gamma})\sum_a |K_{x_1\dots x_m}(a_1, a)-K_{x_1\dots x_m}(a', a)|\\
&\leq\sup_{a_1, a_2}\sum_a |K_{x_1\dots x_m}(a_1, a)-K_{x_1\dots x_m}(a_2, a)|.
\end{aligned}$$

Значит, выражение (8) при $m\to\infty$ стремится к нулю P почти всюду.

Для доказательства выполнения условия (б) нужно еще показать, что плотность q не зависит от $(x_n)_{n\geq 1}$. Но, из только что доказанного следует

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\int\sup_{a_1}\sum_a |K_{x_{-m+1}\dots x_0}(a_1, a)-q(a,(x_n)_{n\in\Gamma})|P(d(x_n)_{n\in\Gamma})\\
&=\lim_{m\to\infty}\int\sup_{a_1}\sum_a |K_{x_1\dots x_m}(a_1, a)-q(a,(x_{n+m})_{\in\Gamma})|P(d(x_n)_{n\in\Gamma})=0,
\end{aligned}$$

так как P стационарно и выражение (8) ограничено. Поэтому $q(a,(x_n)_{n\in\Gamma})$ не зависит от $(x_n)_{n\geq 1}$. Если теперь выполняется условие (б), то последнее равенство одновременно показывает, что выражение

$$\sup_{a_1}\sum_a |K_{x_{-m}\dots x_0}(a_1, a)-q(a,(x_n)_{n\leq 0})|$$

в среднем (относительно P) стремится к нулю при $m\to\infty$. Но это выражение монотонно убывает: Для любых $m\geq 1$ и $(x_n)_{n\leq 0}\in X_{-\infty}^0$ имеет место

$$\begin{aligned}
&\sup_{a_1}\sum_a |K_{x_{-m}\dots x_0}(a_1, a)-q(a,(x_n)_{n\leq 0})|\\
&=\sup_{a_1}\sum_a\Big|\sum_{a'} K_{x_{-m}}(a_1, a')(K_{x_{-m+1}\dots x_0}(a', a)-q(a,(x_n)_{n\leq 0}))\Big|
\end{aligned}$$

$$\leqq \sup_{a_1} \sum_{a'} K_{x_{-m}}(a_1, a') \cdot \sup_{a''} \sum_{a} | K_{x_{-m+1} \cdots x_0}(a'', a) - q(a, (x_n)_{n \leqq 0})|$$

$$= \sup_{a''} \sum_{a} | K_{x_{-m+1} \cdots x_0}(a'', a) - q(a, (x_n)_{n \leqq 0}) |.$$

Отсюда следуют свойства (в).

Теперь покажем, что (а) следует из (в).

Если $m \geqq 1$, $a_1 \in A$, $(x_n)_{n \in \Gamma} \in X_{-\infty}^{+\infty}$, а q — отображение из (в), то имеем

$$\sum_{a'} | q(a', (x_{n+1})_{n \leqq 0}) - \sum_{a} q(a, (x_n)_{n \leqq 0}) K_{x_1}(a, a') |$$

$$\leqq \sum_{a'} | q(a', (x_{n+1})_{n \leqq 0}) - K_{x_{-m} \cdots x_1}(a_1, a')$$

$$+ \sum_{a'} | \sum_{a} (K_{x_{-m} \cdots x_0}(a_1, a) - q(a, (x_n)_{n \leqq 0})) K_{x_1}(a, a') |$$

$$\leqq \sum_{a'} | q(a', (x_{n+1})_{n \leqq 0}) - K_{x_{-m} \cdots x_1}(a_1, a') | + \sum_{a} | K_{x_{-m} \cdots x_0}(a_1, a) - q(a, (x_n)_{n \leqq 0}) |.$$

Но в силу (в) последние выражения стремятся к нулю при $m \to \infty$ для всех $a_1 \in A$ и P—п. в. $(x_n)_{n \in \Gamma} \in X_{-\infty}^{+\infty}$. Следовательно, отображения q из (в) удовлетворяет соотношению (7). Поэтому закон распределения Q, определенный равенством

$$Q(\{a\} \times S) = \int_S q(a, (x_n)_{n \leqq 0}) P(d(x_n)_{n \in \Gamma}).$$

$a \in A$, $S \in \mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$, является стационарным относительно P и $(K_x)_{x \in X}$. Значит, такое распределение существует.

Для доказательства справедливости второй части утверждения (а) заметим, что с помощью неравенства треугольника получается

$$\sup_{a_1, a_2} \sum_{a} | K_{x_1 \cdots x_m}(a_1, a) - K_{x_1 \cdots x_m}(a_2, a) | \tag{9}$$

$$\leqq 2 \sup_{a_1} \sum_{a} | K_{x_1 \cdots x_m}(a_1, a) - qa(, (x_{n+m})_{n \leqq 0}) |.$$

Поэтому в силу стационарности P из (в) следует, что выражение (9) в среднем (относительно P) стремится к нулю при $m \to \infty$. Но, выражение (9) монотонно убывает: Для любых $m \geqq 1$ и $(x_n)_{n \geqq 1} \in X_1^{\infty}$ имеет место

$$\sup_{a_1, a_2} \sum_{a} | K_{x_1 \cdots x_{m+1}}(a_1, a) - K_{x_1 \cdots x_{m+1}}(a_2, a) |$$

$$= \sup_{a_1, a_2} \sum_{a} | \sum_{a'} (K_{x_1 \cdots x_m}(a_1, a') - K_{x_1 \cdots x_m}(a_2, a')) K_{x_{m+1}}(a', a) |$$

$$\leqq \sup_{a_1, a_2} \sum_{a'} | K_{x_1 \cdots x_m}(a_1, a') - K_{x_1 \cdots x_m}(a_2, a') |.$$

Значит, соотношение (1), а поэтому, в силу теоремы 1, также соотношение (2) выполняется.

Последнее утверждение теоремы 2 непосредственно следует из первой части данного доказательства.

3. Эргодические свойства из теорем 1 и 2 тесно связаны с эргодическими свойствами ядра K из (3). Если даны стационарное распределение P на $\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$ и семейство стохастических матриц $(K_x)_{x \in X}$, то имеет место

Теорема 3. *Свойство* (1) *из теоремы* 1 *эквивалентно свойству*

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{U_1, U_2} \| U_1 * K^m - U_2 * K^m \| = 0. \tag{10}$$

Свойства (а), (б), (в) *из теоремы* 2 *эквивалентны свойству*

(г) *Существует стационарное относительное P и $(K_x)_{x\in X}$ распределение Q, и для него выполняется соотношение*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_U \| U * K^m - Q \| = 0.$$

При этом верхние грани берутся по всем законам распределений U_1, U_2 и U на $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$, для которых

$$U_1(A\times(\ )) = U_2(A\times(\ )) = U(A\times(\ )) = P. \tag{11}$$

Далее, пусть

$$\| V_1 - V_2 \| = \sup_{B\in\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}} | V_1(B) - V_2(B) |,$$

$$V * K = \int K([a, (x_n)_{n\in\Gamma}], (\cdot))\, V(d[a, (x_n)_{n\in\Gamma}]),$$

а $V * K^{m+1} = (V * K^m) * K$ для $m \geqq 1$ и любых законов распределений V_1, V_2, V на $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$.

Доказательство теоремы 3. Второе утверждение сразу следует из первого. Для доказательства первого утверждения заметим, что для любого $a_1, a_2 \in A$, $(x_n)_{n\in\Gamma} \in X_{-\infty}^{+\infty}$ и $m \geqq 1$

$$\| K^m([a_1, (x_n)_{n\in\Gamma}], (\cdot)) - K^m([a_2, (x_n)_{n\in\Gamma}], (\cdot)) \|$$
$$= \frac{1}{2} \sum_a | K_{x_1\ldots x_m}(a_1, a) - K_{x_1\ldots x_m}(a_2, a) |.$$

Если U_1, U_2 — законы распределений на $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$ со свойством (11), то для каждого $m \geqq 1$ и $a_0 \in A$

$$\int K^m([a_0, (x_n)_{n\in\Gamma}], (\cdot)) U_i(d[a, (x_n)_{n\in\Gamma}])$$
$$= \int K^m([a_0, (x_n)_{n\in\Gamma}], (\cdot))\ P(d(x_n)_{n\in\Gamma}), \quad i = 1, 2,$$

и мы получим оценку

$$\sup_{U_1, U_2} \| U_1 * K^m - U_2 * K^m \|$$
$$\leqq \sup_{U_1, U_2} \sum_{i=1}^{2} \| \int [K^m([a_0, (x_n)_{n\in\Gamma}], (\cdot)) - K^m([a, (x_n)_{n\in\Gamma}], (\cdot))] U_i(d[a, (x_n)_{n\in\Gamma}]) \|$$
$$\leqq \sup_{U_1, U_2} \int \| K^m([a_0, (x_n)_{n\in\Gamma}], (\cdot)) - K^m([a, (x_n)_{n\in\Gamma}], (\cdot)) \| (U_1 + U_2)(d[a, (x_n)_{n\in\Gamma}])$$
$$\leqq \int \sup_{a_1, a_2} \sum_a | K_{x_1\ldots x_m}(a_1, a) - K_{x_1\ldots x_m}(a_2, a) | P(d(x_n)_{n\in\Gamma}).$$

Таким образом из свойства (1) теоремы 1 следует свойство (10) теоремы 3.

Далее, если законы распределений U_1, U_2 на $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$ удовлетворяют условию (11), то существуют плотности u_1, u_2 такие, что

$$\int_S u_i(a, (x_n)_{n\in\Gamma}) P(d[x_n)_{n\in\Gamma}) = U_i(\{a\}\times S)$$

для $a \in A$, $S \in \mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$, $i = 1, 2$. Поэтому для $m \geqq 1$

$$\| U_1 * K^m - U_2 * K^m \|$$

$$=\frac{1}{2}\int\sum_{a}\Big|\sum_{a_1}u_1(a_1,(x_n)_{n\in\Gamma})K_{x_1\ldots x_m}(a_1,a)-\Sigma u_2(a_2,(x_n)_{n\in\Gamma})K_{x_1\ldots x_m}(a_2,a)\Big|P(d(x_n)_{n\in\Gamma})$$

Кроме того, для любого $\varepsilon>0$, $m\geqq 1$, $x_1,\ldots,x_m\in X$ существуют элементы $a_1(\varepsilon,x_1,\ldots,x_m)$, $a_2(\varepsilon,x_1,\ldots,x_m)\in A$ такие, что

$$\sup_{a_1,a_2}\sum_a|K_{x_1\ldots x_m}(a_1,a)-K_{x_1\ldots x_m}(a_2,a)|$$
$$\leqq\sum_a|K_{x_1\ldots x_m}(a_1(\varepsilon,x_1,\ldots,x_m),a)-K_{x_1\ldots x_m}(a_2(\varepsilon,x_1,\ldots,x_m),a)|+\varepsilon,$$

и мы получим

$$(12)\qquad \int\sup_{a_1,a_2}\sum_a|K_{x_1\ldots x_m}(a_1,a)-K_{x_1\ldots x_m}(a_2,a)|P(d(x_n)_{n\in\Gamma})$$
$$\leqq\int\sum_a|K_{x_1\ldots x_m}(a_1(\varepsilon,x_1,\ldots,x_m),a)-K_{x_1\ldots x_m}(a_2(\varepsilon,x_1\ldots,x_m),a)|P(d(x_n)_{n\in\Gamma})+\varepsilon$$
$$\leqq 2\sup_{U_1,U_2}\|U_1*K^m-U_2*K^m\|+\varepsilon.$$

Поэтому, из свойства (10) следует, что выражение (12) стремится к нулю при $m\to\infty$. Так как подынтегральная функция в (12) монотонно убывает (см. доказательство теоремы 2), то условие (1) теоремы 1 выполняется. Этим теорема доказана.

4. По поводу теоремы 2 возникает вопрос, в каких условиях стационарное относительно P и $(K_x)_{x\in X}$ распределение Q существует. Если A конечно, то такое распределение всегда существует [5, предложение 2.2]. Это утверждение является также следствием следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть даны стационарный закон распределения P на $\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$ и семейство $(K_x)_{x\in X}$ стохастических матриц на A. Тогда эквивалентны следующие утверждения.*

(а) *Существует стационарное относительно P и $(K_x)_{x\in X}$ распределение Q.*

(б) *Существует такой закон распределения S на $\mathfrak{U}\times\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$, что $S(A\times(\cdot))=P$, а последовательность $(S_n)_{n\geqq1}$ законов распределений на $[A,\mathfrak{U}]$, где*

$$S_n(\{a'\})=\sum_{a\in A,x_1,\ldots,x_n\in X}S(\alpha=a,\xi_1=x_1,\ldots,\xi_n=x_n)K_{x_1\ldots x_n}(a,a')$$

для $a'\in A$, $n\geqq1$ является слабокомпактной.

Для доказательства этой теоремы заметим, что равенством

$$\varrho([a,(x_n)_{n\in\Gamma}],[a',(x'_n)_{n\in\Gamma}])=\Delta(a,a')+\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\Delta(x_n,x'_n),$$

где $\Delta(z,z')=1$, когда $z=z'$, а $\Delta(z,z')=0$, когда $z\neq z'$, определяется метрика ϱ на $A\times X_{-\infty}^{\infty}$. В данных предположениях о множествах A и X метрическое пространство $[A\times X_{-\infty}^{\infty},\varrho]$ является полным сепарабельным, а σ-алгебра его борелевских множеств совпадает с σ-алгеброй $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}_{-\infty}^{\infty}$.

Доказательство теоремы 4. Очевидно, для всех $n\geqq0$ и $a\in A$ имеет место $S_n(\{a\})=(S*K^n)(\{a\}\times X_{-\infty}^{+\infty})$. Поэтому, для стационарного Q получим $Q_n=Q((\ )\times X_{-\infty}^{+\infty})$ для всех $n\geqq0$. Следовательно, условие (б) является необходимым для (а).

Пусть теперь дан закон распределения S со свойствами из (б). Тогда, для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $A_\varepsilon \subseteq A$ такое, что $S * K^n(A_\varepsilon \times X_{-\infty}^{+\infty}) = S_n(A_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$, для всех $n \geq 1$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $X_\varepsilon \in \mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$, для которого $P(X_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$.

Множество $A_\varepsilon \times X_\varepsilon$ в метрическом пространстве $A \times X_{-\infty}^{+\infty}$ компактно и для него $S * K^n(\overline{A_\varepsilon \times X_\varepsilon}) \leq S * K^n(\overline{A}_\varepsilon \times X_{-\infty}^{+\infty}) + S * K^n(A \times X_\varepsilon) \leq 2\varepsilon$. Следовательно, последовательность $S * K^n$, $n \geq 1$, а поэтому также последовательность $\overline{S}_n$, $n \geq 1$, где $\overline{S}_n = n^{-1}\Sigma_{l=1}^n S * K^l$, слабокомпактны.

Берем слабосходящуюся подпоследовательность $(\overline{S}_{nk})_{n\geq 1}$. Ее предел обозначим Q. Докажем, что Q стационарно относительно P и $(K_x)_{x \in X}$:

Для любого $m \geq 1$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ множество

$$Z(x_1, \ldots, x_m) = X_{-\infty}^0 \times \{x_1\} \times \cdots \times \{x_m\} \times X_{m+1}^{+\infty}$$

в метрическом пространстве $A \times X_{-\infty}^{+\infty}$ открыто и замкнуто одновременно Поэтому

$$Q(A \times Z(x_1, \ldots, x_m)) = \lim_{k\to\infty} \overline{S}_{n_k}(A \times Z(x_1, \ldots, x_m)) = P(Z(x_1, \ldots, x_m)),$$

и мы получим $Q(A \times (\ )) = P$. Далее, для $a \in A$, $m \geq 1$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ имеем

$$(Q * K)(\{a\} \times Z(x_1, \ldots, x_m)) = \int K_{x_1'}(a', a)\, 1_{Z(x_1, \ldots, x_m)}((x_n')_{n \in \Gamma})\, Q(d[a', (x_n')_{n \in \Gamma}]),$$

где 1_B обозначает индикатор множества B. Но подынтегральная функция непрерывна и ограничена, и поэтому последнее выражение равняется пределу

$$\lim_{k\to\infty} \int K_{x_1'}(a', a)\, 1_{Z(x_1, \ldots, x_m)}((x_n')_{n \in \Gamma})\, \overline{S}_{n_k}(d[a', (x_n')_{n \in \Gamma}])$$

$$= \lim_{k\to\infty} (\overline{S}_{n_k} * K)(\{a\} \times Z(x_1, \ldots, x_m)) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} (S * K^{l+1})(\{a\} \times Z(x_1, \ldots, x_m))$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} (S * K^l)(\ldots) + \frac{1}{n_k}(S * K^{n_k+1})(\ldots) - \frac{1}{n_k}(S * K)(\ldots)\right]$$

$$= Q(\{a\} \times Z(x_1, \ldots, x_m)),$$

так как множество $\{a\} \times Z(x_1, \ldots, x_m)$ также открыто и замкнуто одновременно. Таким образом получим $Q * K = Q$, чем теорема 4 доказана. Кроме того, из доказательства видно следующее.

Если Q — единственное стационарное распределение, то для любого закона распределения S со свойствами из (б) *последовательность $S_n = n^{-1} \Sigma_{l=1}^n S * K^l$, $n \geq 1$ слабо сходится к Q.*

Вид стационарного распределения Q для марковской последовательности $(\xi_n)_{n \in \Gamma}$ подробно изучен в [6].

5. Положим $(A \times X)_1^\infty = \{([a_n, x_n])_{n\geq 1} : [a_n, x_n] \in A \times X$ для всех $n \geq 1\}$ и обозначим $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{X})_1^\infty$ σ-алгебру подмножеств этого множества, порожденную цилиндрическими множествами.

Если тогда S — закон распределения на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{X}_1^\infty$, а $(K_x)_{x \in X}$ — семейство стохастических матриц, то соотношениями

$$S \times K(\{[a_1, \xi_1] = [a_1, x_1], \ldots, [a_m, \xi_m] = [a_m, x_m]\})$$
$$= S(\{a = a_1, \xi_1 = x_1, \ldots, \xi_m = x_m\}) K_{x_1}(a_1, a_2) \ldots K_{x_{m-1}}(a_{m-1}, a_m)$$

$m \geq 1$, $a_1, \ldots, a_m \in A$, $x_1, \ldots, x_m \in X$, определяется закон распределения $S \times K$ на $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{X})_1^\infty$. Соответственную случайную последовательность обозначим $([\alpha_n, \xi_n])_{n \geq 1}$.

Легко проверить, что закон распределения $S \times K$ стационарен тогда и только тогда, когда $\int K([a, (x_n)_{n \geq 1}], (\ ))S(d[a, (x_n)_{n \geq 1}]) = S$, где ядро определяется равенством $K([a, (x_n)_{n \geq 1}], \{a'\} \times B) = K_{x1}(a, a')\delta_{(x_{n+1})_{n \geq 1}}(B)$. В этом случае S можно продолжить однозначным образом до закона распределения S' на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$, стационарного относительно $P = S'(A \times (\cdot))$ и $(K_x)_{x \in X}$ (см. также [5]).

Для применения теоремы 1 и 2 нас интересует, при каких условиях закон распределения R на $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{X})_1^\infty$ представляется в виде $S \times K$.

Теорема 5. *Закон распределения R на $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{X})_1^\infty$ имеет представление $R = S \times K$ с законом распределения S на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{X}_1^\infty$ и семейством $(K_x)_{x \in X}$ стохастических матриц тогда и только тогда, когда R удовлетворяет следующими условиями:*

а. *Для любого $1 \leq m \leq n$, $a_1, \ldots, a_{m+1} \in A$, $x_1, \ldots, x_n \in X$, для которого $R(\alpha_1 = a_1, \ldots, \alpha_m = a_m, \xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n) > 0$, имеет место, $R(\alpha_{m+1} = a_{m+1} \mid \alpha_1 = a_1, \ldots, \alpha_m = a_m, \xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n) = R(\alpha_{m+1} = a_{m+1} \mid \alpha_m = a_m, \xi_m = x_m)$.*

(б) *Для любого $1 \leq m, n, a, a' \in A$, $x \in X$, для которого $R(\alpha_m = a, \xi_m = x) > 0$ и $R(\alpha_n = a, \xi_n = x) > 0$, имеет место $R(\alpha_{m+1} = a' \mid \alpha_m = a, \xi_m = x) = R(\alpha_{n+1} = a' \mid \alpha_n = a, \xi_n = x)$.*

Доказательство: Необходимость условий очевидно. Для доказательства достаточности положим $S = R([\alpha_1, (\xi_n)_{n \geq 1}] \in (\ )$, а для $a, a' \in A$ и $x \in X$ соответственно $K_x(a, a') = R(\alpha_{n+1} = a' \mid \alpha_n = a \mid \xi_n = x)$, где n — некоторое число со свойством $R(\alpha_n = a, \xi_n = x) > 0$, если такое n существует, а $K_x(a, a') = p(\{a'\})$, где p — произвольный закон распределения на A, если такого n нет. Тогда легко проверить, что при данных условиях имеет место представление $R = S \times K$. Этим теорема 5 доказана.

Если условия теоремы 5 для закона распределения R выполняется, то для определенного в доказательстве семейства стохастических матриц K_x, $x \in X$ имеет место

$$K_{x_1 \ldots x_m}(a, a') = R(\alpha_{m+1} = a' \mid \alpha_1 = a, \xi_1 = x_1, \ldots, \xi_m = x_m). \tag{13}$$

Следовательно, в теоремах 1 и 2 содержатся утверждения об асимптотическом поведении условных вероятностей в (13).

Рассмотрим как пример условную цепь Марлова, которая исследовалась З. Бежаевой в [1]:

Пусть дана однородная цепь Маркова $([\alpha_n, \eta_n])_{n \geq 1}$ со значениями в $A \times Y$, где A и Y —счетные множества. Ее закон распределения обозначим через P. Предполагается, что для всех $a \in A$, y, $y' \in y$ имеем $P(\eta_{n+1} = y' \mid \alpha_n = a, \eta_n = y)$, $= P(\eta_{n+1} = y' \mid \eta_n = y)$, если $P(\alpha_n = a, \eta_n = y) > 0$. В этом случае последовательность $(\eta_n)_{n \geq 1}$ сама является однородной цепью Маркова.

Если положить $X = Y \times Y$ и $\xi_n = [\eta_n, \eta_{n+1}]$ для всех $n \geq 1$, то легко видеть, что случайная последовательность $([\alpha_n, \xi_n])_{n \geq 1}$ имеет свойства (а) и (б) из теоремы 5. При этом, стохастические матрицы $K_{x,x} \in X = Y \times Y$ имеют вид $K\, y, y'\, (a, a') = P(\alpha_{m+1} = a' \mid \alpha_m = a, \eta_m = y, \eta_{m+1} = y')$. Следовательно, для $m \geq 1$, $a, a' \in A$, $y_1, \ldots, y_m \in Y$ и всех $n \geq 1$ получается $K_{[y_1, y_2][y_2, y_3] \ldots [y_{m-1}, y_m]}(a, a')$

$=P(\alpha_{m+n}=a' \mid \alpha_{n+1}=a, \eta_{n+1}=y_1, \ldots, \eta_{n+m}=y_m)$, а из теорем 1 и 2 следуют эргодические свойства этих условных вероятностей. Заметим, что при данных в [1] условиях всегда существует стационарное относительно $P((\xi_n)_{n\geq 1}\in(\cdot))$ и $(K_x)_{x\in X}$ распределение Q.

Более подробные исследования для случая, когда случайная последовательность $(\xi_n)_{n\geq 1}$ является марковской (как в работе [1]) можно найти в [6].

Заметим еще, что при условиях теоремы 2 получается также, что распределение случайного вектора $(P(\alpha_{m+1}=a' \mid \alpha_1=a, \eta_1, \ldots, \eta_m))_{a'\in A}$ (как функция от случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_m$) для любого $a\in A$ слабо стремится к распределению случайного вектора $(P_S(\alpha_0=a' \mid (\eta_n)_{n\leq 0}))_{a\in A}$, где P_S обозначает соответствующее стационарное распределение, а $(\eta_n)_{n\leq 0}$ распределено по закону P_S. То же самое получается в случае, рассмотренным Кайзером в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. З. И. Бежаева. Условные цепи Маркова с счётным множеством состояний. *Теория вероятностей и ее применения*, **22**, 1977, 556—565.
2. Р. Л. Добрушин. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова II. *Теория вероятностей и ее применения*, 1, 1956, 365—425.
3. K. Jacobs. Einige neuere Ergebnisse der Ergodentheorie. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, **67**, 1965, H. 4, 143—182.
4. T. Kaiyser. A limit theorem for partially observed Markov chains. *Ann. Probability*, **3**, 1975, 677—696.
5. K. Nawrotzki. Ein Grenzwertsatz für stationäre zufällige Folgen stochastischer Matrizen. *Math. Nachr.*, **80**, 1977, 133—150.
6. K. Nawrotzki. Stationäre Anfangsverteilungen stochastischer Automaten III. *Elektron. Informationsverarb. und Kybern.*, **14**, 1978, H. 3. 123—142.

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Sektion Mathematik, UHH, 69 Jena

Поступила 20. 4. 1978