Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОЦЕНКИ ДЛЯ ЧИСЛА КЛИК ГРАФА С ДАННЫМ ВЕРШИННЫМ ЧИСЛОМ НЕЗАВИСИМОСТИ

НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ, ВЛАДИМИР С. НИКИФОРОВ

Получена оценка сверху для числа k-клик графа с данным числом вершин, в котором хотя бы одна вершина максимальной степени не содержится ни в одном треугольнике. Показано, что полученная оценка асимптотически окончательна.

1. Введение. Пусть G — конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Множество вершин этого графа называют независимым, если никакие две из них не смежны. Наибольшее число вершин в таких множествах называют вершинным числом независимости графа G и обозначают через $\alpha(G)$. Множество, состоящее из k вершин графа, называется k-кликой, если любые две из них смежны. Число всех k-клик графа G обозначим через $t(G, k)$. В частности, $t(G, 1)=v(G)$ — число вершин графа G; $t(G, 2)=e(G)$ — число его ребер; $t(G, 3)=t(G)$ — число его треугольников. Степень вершины v в графе G обозначаем через $d(v)$, а максимум степеней всех вершин — через $d(G)$ и называем степенью графа G. Совокупность всех вершин графа G будем обозначать через $V(G)$.

В [1—4] было рассмотрено неравенство

$$e(G)\leqq d(G)(v(G)-\alpha(G)) \tag{1}$$

и сделаны многочисленные приложения этого неравенства. Впрочем, оно вытекает из очевидного факта, что если A — некоторое независимое множество вершин графа G, тогда $e(G)\leqq \Delta_A(v(G)-|A|)$, где $\Delta_A=\max\{d(v)/v\in V(G)\setminus A\}$.

В цитированных статьях был выявлен важный класс графов — те, для которых $d(G)\leq\alpha(G)$. Будем их называть H-графами. Неравенство (1) в применении к H-графу G дает $e(G)\leq[v^2(G)/4]$. Последнее неравенство выполнено для всех графов, не содержащих треугольников [5]. Все такие графы принадлежат классу H-графов. Однако этот класс отнюдь не исчерпывается ими. В нем, в частности, входит любой граф G, в котором хотя бы одна вершина максимальной степени не содержится ни в одном треугольнике графа. Действительно, все вершины графа, смежные с такой вершиной, составляют независимое множество и значит выполнено неравенство $d(G)\leq\alpha(G)$. Класс H-графов не исчерпывается и этими графами. Например, граф, состоящий из одного треугольника и одной изолированной вершины, является H-графом, однако в нем любая вершина максимальной степени содержится в треугольнике.

Н. Хаджиивановым и Н. Неновым была поставлена задача о нахождении оценок сверху для числа треугольников графа, аналогичных неравенству (1), т. е. зависящих только от числа вершин графа, его степени и его числа независимости. Это нам удалось сделать в [6], где было доказано, что

(2) $$t(G)\leqq(3d(G)^2-1)(v(G)-\alpha(G))/48,$$

а для H-графов —

(3) $$t(G)\leqq(v(G)-1/3)^3/36.$$

В настоящей статье дается алгоритм построения всех без исключений экстремальных графов для неравенства (2), который выглядит особенно просто для H-графов. Напомним, что граф называют экстремальным в классе графов, удовлетворяющих некоторому неравенству, если для этого графа вопросное неравенство переходит в равенство.

В настоящей статье неравенство (3) заменяется более точным неравенством $t(G)<2(v(G)-1/2)^3/75$ и в то же время показано, что его в принципе нельзя усилить еще, так как существуют H-графы с произвольно большим числом вершин, для которых $t(G)>2(v(G)-\lambda)^3/75$ при любом $\lambda>1/2$. Следовательно, неравенство

(4) $$t(G)\leqq 2v(G)^3/75$$

дает асимпотически точную оценку сверху для числа треугольников.

В [6] была введена постоянная $t=\sup\{t(G)v(G)^{-3}/G-H\text{-граф}\}$. Там же было доказано, что $9/343\leqq t\leqq 1/36$ и был поставлен вопрос о нахождении точного значения числа t. Здесь будет доказано, что $t=2/75$.

Из (2) следует, что $t(G)\leqq 3d(G)^2(v(G)-\alpha(G))/16$. Это неравенство обобщается для числа k-клик, $k\geqq 3$ следующим образом:

$$t(G,\ k)\leqq\frac{1}{k!}\,\frac{k-1}{k-2}\left(\frac{k(k-2)}{(k-1)^2}\right)^{k-1}d(G)^{k-1}(v(G)-\alpha(G)).$$

Для H-графов неравенство (4) обобщается так:

$$t(G,k)\leqq\frac{1}{k!}\left(\frac{k-1}{2k-1}\right)^{k-1}v(G)^k.$$

Последнее неравенство асимптотически точно.

Положим $t(k)=\sup\{t(G,k)\,.\,v(G)^{-k}\mid G-H\text{-граф}\}$. Оказывается, что $t(k)=(k-1)2k-1)^{k-1}/k!$. Последнее равенство является обобщением равенства $t=2/75$.

2. Оценки сверху для числа треугольников графа, зависящих от числа вершин, степени графа и числа его независимости. Пусть G — граф с n-вершинами, A — некоторое независимое множество вершин этого графа и $|A|=\alpha$. Положим $A=\{v^1,\dots,v^\alpha\}$ и $v(G)F\setminus A=\{v_1,\dots,v_{n-\alpha}\}$. Пусть $\Delta_A=\max\{d(v_i)\mid 1\leqq i\leqq n-\alpha\}$. Воспримем еще следующие обозначения:

$\underline{d}(v_i)$ — число всех вершин из $V(G)\setminus A$, смежных вершине v_i;

$\underline{t}(v_i)$ — число всех треугольников графа G, проходящих через вершину v_i и содержащих вершины только из $V(\ \ )\setminus A$;

$\overline{t}(v_i)$ — число всех треугольников графа G, подходящих через вершину v_i и содержащих вершину из A.

Легко сообразить верность равенства

(5) $$t(G)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n-\alpha}\underline{t}(v_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-\alpha}\overline{t}(v_i).$$

Очевидно

(6) $$\underline{t}(v_i)\leq\binom{\underline{d}(v_i)}{2} \quad \text{и}$$

(7) $$\underline{t}(v_i)\leq\underline{d}(v_i)(d(v_i)-\underline{d}(v_i))$$

для любого i, $1\leq i\leq n-\alpha$. Так как $d(v_i)\leq\Delta_A$, $1\leq i\leq n-\alpha$, то из (5) — (7) получаем

(8) $$t(G)\leq\sum_{i=1}^{n-\alpha}\left(\frac{3\Delta_A-1}{6}\cdot\underline{d}(v_i)-\frac{1}{3}\underline{d}^2(v_i)\right).$$

Чтобы оценить сверху сумму, находящуюся в правой части этого неравенства, получим оценку сначала для любого из слагаемых. Рассмотрим функцию

(9) $$f(x)=(3\Delta_A-1)x/6-x^2/3.$$

Очевидно

(10) $$f(x)\leq(3\Delta_A-1)^2/48$$

и притом равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=(3\Delta_A-1)/4$. Следовательно,

(11) $$t(G)\leqq(3\Delta_A-1)^2(n-\alpha)/48.$$

Если в (11) имеет место равенство, тогда $\underline{d}(v_i)=(3\Delta_A-1)/4$, $d(v_i)=\Delta_A$ $1\leq i\leq n-\alpha$; совокупность всех вершин из $V(G)\setminus A$ разбивается в объединение попарно непересекающихся равномощных подмножеств B_j, $1\leqq j\leqq k$, таких, что любые две вершины из одного и того же множества B_j смежны, а из различных несмежны; для любой вершины из B_j совокупность смежных ей вершин из A одна и та же. Ясно, что

(12) $$|B_j|=3(\Delta_A+1)/4, \quad j=1, 2, \ldots, k,$$

и, следовательно,

(13) $$k=4(n-\alpha)/3(\Delta_A+1).$$

Окончательно доказано следующее основное для этого параграфа

Предложение 1. *Пусть G — граф с n вершинами и A — некоторое независимое множество вершин этого графа с $|A|=\alpha$. Тогда верно неравенство* (11). *Если в* (11) *имеет место равенство, тогда* $(3\Delta_A-1)/4$ *и* $4(n-\alpha)/3(\Delta_A+1)$ *— целые числа. Наоборот, если эти числа — целые, тогда указанным выше способом можно получить все экстремальные графы для неравенства* (11).

Очевидно $\Delta_A\leqq d(G)$. Допустим, что $\Delta_A=d(G)$ и G — экстремальный граф для неравенства (11). Сохраняем все предыдущие обозначения. Через A_j обозначим множество всех вершин из A, смежных вершинам из B_j. Докажем, что теперь $A_{j_1}\cap A_{j_2}=\emptyset$ при $j_1\neq j_2$. Действительно, если $v\in A_{j_1}\cap A_{j_2}$, тогда вершина v смежна всем вершинам из $B_{j_1}\cup B_{j_2}$, а их число, согласно (12), равно $3(\Delta_A+1)/2>\Delta_A=d(G)$. Нами получено противоречие: $d(v)>d(G)$. Дальше, очевидно $|\Delta_j|=\Delta_A-(3\Delta_A-1)/4=(\Delta_A+1)/4$. Так как множества A_j попарно не пересекаются, то $|\bigcup_{j=1}^k A_j|=\sum_{j=1}^k|A_j|\leq\alpha$ и, следовательно, $k\leq4\alpha/(d(G)+1)$. С помощью (13) заключаем, что последнее неравенство эквивалентно неравенству $\alpha\geq n/4$.

После всего этого можно считать доказанным следующее

Следствие 1. *Пусть G — граф с n вершинами и A — независимое множество с $|A|=\alpha$. Тогда*

$$t(G)\leq(3d(G)-1)^2(n-\alpha)/48. \tag{14}$$

Если здесь имеет место равенство, тогда $(3\Delta_A-1)/4$ и $4(n-\alpha)/3(\Delta_A+1)$ — целые числа, $\Delta_A=d(G)$ и $\alpha\geq n/4$. Наоборот, если все это выполнено, тогда все экстремальные графы для неравенства (14) получаются методом, указанным в предложении 1, пользуясь рассуждениями, предшествующими формулировки настоящего следствия.

Замечание. Возвратимся снова к предложению 1. Для доказательства неравенства (11) мы воспользовались неравенством (10), применяя его для $x=\underline{d}(v_i)$. С другой стороны, очевидно $\underline{d}(v_i)\leq n-\alpha-1$. Если

$$n-\alpha-1\leq(3\Delta_A-1)/4, \tag{15}$$

тогда

$$f(x)\leq f(n-\alpha-1) \quad \text{при} \quad x\in[0, n-\alpha-1], \tag{16}$$

так как функция $f(x)$ не убывает не отрезке $[0, (3\Delta_A-1)/4]$. Равенство в (16) имеется тогда и только тогда, когда $x=n-\alpha-1$.

Если воспользоваться неравенством (16) вместо (10), из (8) получим

$$t(G)\leq(n-\alpha-1)(3\Delta_A-2n+2\alpha+1)(n-\alpha)/6 \tag{17}$$

в случае, когда верно (15), так как $f(n-\alpha-1)=(n\text{-}d\text{-}1)(3\Delta_A-2n+2\alpha+1)/6$. В случае, когда (15) выполнено и в (17) имеет место равенство, тогда и в (16) имеет место равенство для $x=\underline{d}(v_i)$, $1\leq i\leq n-\alpha$, и, следовательно, $\underline{d}(v_i)=n-\alpha-1$, $1\leq i\leq n-\alpha$.

Значение этого замечания выяснится в следующем параграфе.

3. Оценки сверху для числа треугольников H-графов с данным числом вершин. Из следствия 1 вытекает, что если G — H-граф, тогда

$$t(G)\leq(3d(G)-1)^2(v(G)-d(G))/48, \tag{18}$$

$$t(G)\leq(3\alpha(G)-1)^2(v(G)-\alpha(G))/48. \tag{19}$$

Притом, ясно, когда (18) или (19) переходит в равенство и как строятся все экстремальные графы. В частности, если H-граф G — экстремальный для неравенства (18) или (19), тогда $k\leq 3$.

Пусть H-граф G — экстремальный для неравенства (18). Тогда $\Delta_A=d(G)=\alpha(G)$. Так как $k\leq 3$, а $(3\Delta_A-1)/4$ и $4(n-\alpha)/3(\Delta_A+1)$ — целые, то,

если $k=1$, тогда $v(G)+1\equiv 0 \pmod 7$ и $\alpha(G)=d(G)=(4v(G)-3)/7$;

если $k=2$, тогда $v(G)+1\equiv 0 \pmod{10}$ и $\alpha(G)=d(G)=(2v(G)-3)/5$;

если $k=3$, тогда $v(G)+1\equiv 0 \pmod{13}$ и $\alpha(G)=d(G)=(4v(G)-9)/13$.

Если $k=1$, тогда согласно следствию 1 $B_1=V(G)\setminus A$, а в качестве A_1 можно взять множество произвольных $(\alpha(G)+1)/4$ вершин из A. Все вершины множества $B_1=V(G)\setminus A$ — попарно смежны. Кроме того, все вершины из B_1 смежны всем из A_1. Вспомним еще, что $|B_1|=3(\alpha(G)+1)/4$. Итак, при $k=1$ — единственный экстремальный граф. Обозначим его через G_1.

Если $k=2$, тогда тоже получается единственный экстремальный граф G_2. Он является объединением четырех непересекающихся множеств B_1, B_2, A_1, A_2, для которых $|A_1|=|A_2|=(\alpha(G)+1)/4$ и $|B_1|=|B_2|=3(\alpha(G)+1)/4$, и еще $(\alpha(G)-1)/2$ изолированных вершин. Вершины в любом из множеств B_j — попарно смежны, и любая вершина из B_j смежна любой вершине из A_j.

Наконец, если $k=3$, снова получается единственный экстремальный граф G_3. Он строится совершенно аналогично предшествующим двум экстремальным графам.

Таким образом мы доказали следующее утверждение:

Следствие 2. *H — граф G является экстремальным для неравенства* (18) *или* (19) *тогда и только тогда, когда он изоморфен некоторому из графов G_1, G_2 или G_3, построенных только что.*

Теперь перейдем к нахождению оценок для числа треугольников H-графа G, зависящих только от числа его вершин. Рассмотрим функцию $g(x)=(3x-1)^2(n-x)/48$. На отрезке $[0,[6n+1)/9]$ функция $g(x)$ не убывает, а дальше она не возрастает. Тогда $g(x)\leqq g((6n+1)/9)=(n-1/3)^3/36$ при $x\geqq 1/3$ и, следовательно,

$$t(G)\leqq (v(G)-1/3)^3/36, \text{ если } G — H\text{-граф}. \tag{20}$$

Полученная оценка не окончательна. Чтобы получить более точную оценку, воспользуемся замечанием, сделанным в конце предшествующего параграфа. Пусть $\Delta_A\leqq\alpha$. Тогда, согласно (7), если выполнено (15), будем иметь

$$t(G)\leqq(n-\alpha)(n-\alpha-1)(5\alpha-2n+1)/6. \tag{21}$$

С другой стороны, неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим дает:

$$(5/2)n-\alpha)\ (5/2)n-\alpha-1)(5\alpha-2n+1)<(n-1/2)^3. \tag{22}$$

Следовательно,

$$t(G)\leqq 2(n-1/2)^3/75, \text{ если } \Delta_A\leqq\alpha \text{ и } n-\alpha-1\leqq(2\Delta_A-1)/4. \tag{23}$$

Пусть теперь $n-\alpha-1>(3\Delta_A-1)/4$. Из неравенства $\Delta_A\leqq\alpha$ и последнего неравенства следует $\Delta_A<(4n-3)/7$. Так как $g(x)$ возрастает на отрезке $[0,\ (6n+1)/9]$ и $(4n-3)/7<(6n+1)/9$, то

$$g(x)\leqq g((4n-3)/7)=9\,(n-4/3)^2(n+1)/343, \text{ если } 0\leqq x\leqq(4n-3)/7. \tag{24}$$

Из (11) следует, что если $\Delta_A\leqq\alpha$, тогда $t(G)\leqq(3\Delta_A-1)^2(n-\Delta_A)/48$. С помощью этого неравенства и (24) получаем

$$t(G)\leqq 9(n-4/3)\,((n+1)/343, \text{ если } \Delta_A\leqq\alpha \text{ и } n-\alpha-1>(3\Delta_A-1)/4. \tag{25}$$

Сравним теперь (23) и (25). Очевидно $9(n-4/3)^2(n+1)/343<2(n-1/2)^3/75$.

Таким образом доказано следующее утверждение

Теорема 1. *Пусть G — граф с n вершинами и A — некоторое независимое множество вершин этого графа с $|A|=\alpha$. Если $\Delta_A\leqq\alpha$, тогда выполнено неравенство $t(G)<2(n-1/2)^3/75$. В частности, последнее неравенство верно для любого H-графа G.*

Полученная оценка лучше (20), так как $2(n-1/2)^3/75<(n-1/3)^3/36$. Притом, в принципе ее нельзя улучшить. Это видно из следующего примера.

Пример 1. Пусть $n\equiv 0 \pmod 5$. Определим граф Γ с вертинами $v_1,\ldots,\ v_{2n/5},\ v^1,\ldots,\ v^{3n/5}$ следующим образом. Объявим смежными между собою все вершины типа v_i, а также любая вершина v_i и любая вершина v^j, если $j\leqq n/5+1$. Тогда $d(\Gamma)=\alpha(\Gamma)=3n/5$ и $t(\Gamma)=2n(n+1)(n-5/2)/75$.

Приведем те эвристические соображения, с помощью которых был построен этот пример.

Для любого графа G с n вершинами, для которого существует независимое множество A с $\Delta_A \leqq |A| = a$, нами доказано неравенство $t(G) < 2n^3/75$. Возможно ли для произвольно больших n построить таким образом граф Γ_n и независимое множество его вершин A^n с $|A^n| = a_n$ так, чтобы $\Delta_n = \Delta_{A^n} \leqq a_n$ и

$$t(\Gamma^n) \sim 2n^3/75, \quad n \to \infty\,? \tag{26}$$

Если это возможно, тогда для Γ_n выполнено неравенство (15). Действительно, если это не так, тогда верно (25) и, следовательно, соотношение (26) невозможно. Итак, имеет место (15) и, следовательно, и (21). Из (26), (21) и (22) следует $(n-a_n)(n-a_n-1)(5a_n-2n+1)/6 \sim 2n^3/75$, $n \to \infty$. Отсюда легко получить $\lim a_n/n = 3/5$. Аналогично можно доказать, что $\lim \Delta_n/n = 3/5$. Дальше будем считать, что $a_n = \Delta_n = 3n/5$. Для простоты предложим, что $d(v)$ одно и то же для всех вершин из $V(\Gamma_n) \setminus A^n$; обозначим его через $\underline{d}_n$. Если допустим, что

$$\underline{d}_n \leqq \lambda n - 1, \quad \text{где} \quad \lambda < 2/5, \tag{27}$$

получим противоречие. Действительно, $\lambda n - 1 \leqq 2n/5 - 1 = n - a_n - 1 \leqq (3\Delta_n - 1)/4$ и, следовательно, $f(\underline{d}_n) \leqq f(\lambda n - 1) \sim (3/10 \,.\, \lambda - 1/3 \,.\, \lambda^2) n^2$, $n \to \infty$. Тогда согласно (8) и (9) имеем $t(\Gamma_n) \leqq (3/10 \,.\, \lambda - 1/3 \,.\, \lambda^2) 2/5 \,.\, n^3$, $n \to \infty$. Однако при $\lambda < 2/5$ очевидно $(3/10 \,.\, \lambda - 1/3 \,.\, \lambda^2) \,.\, 2/5 < 2/75$. Итак, (27) невозможно. Поэтому будем считать, что $\underline{d}_n = 2/5\, n - 1$. Так как $|V(\Gamma^n) \setminus A^n| = 2/5 \,.\, n$, то из $\underline{d}_n = 2n/5 - 1$ следует, что любая из них смежна в точности $\Delta_n - \underline{d}_n = n/5 + 1$ вершин из A^n.

После всего изложенного нетрудно сообразить каким образом построить Γ_n и A^n.

Из теоремы и примера непосредственно получаем:

Следствие 3. *Верны равенства:*

$$\sup\{t(G) v(G)^{-3} \mid G - H\text{-граф}\} = 2/75,$$
$$\sup\{t(G)\, n^{-2} \mid G - H\text{-граф},\ v(G) = n\} = 2n/75 - 1/25.$$

Замечание. Если в G имеется вершина максимальной степени, не содержащейся ни в одном треугольнике, тогда G является H-графом и, следовательно, для него верны все утверждения, высказанные здесь для H-графов.

4. Оценки сверху для числа k-клик графов с данным числом вершин, степенью и числом независимости. Основным результатом в настоящем параграфе является следующее

Предложение 2. *Пусть G — граф с n вершинами, а A — независимое множество, состоящее из a вершин этого графа. Тогда*

$$t(G,k) \leqq \frac{1}{k!} \frac{k-1}{k-2} \left(\frac{k(k-2)}{(k-2)^2} \right)^{k-1} \Delta_A^{k-1} \,.\, (n-a). \tag{28}$$

Доказательство проведем аналогично доказательству предложения 1. Введем следующие обозначения:

$$A = \{v^1, \ldots, v^a\}, \quad V(G) \setminus A = \{v_1, \ldots, v_{n-a}\};$$

$\underline{t}_k(v_i)$ — число k-клик через вершину v_i, содержащихся в $V(G) \setminus A$;

$\overline{t}_k(v_i)$ — число k-клик через вершину v_i, имеющих вершину из A.

Верны следующие соотношения:

(29) $$t(G, k)=\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{n-\alpha}\underline{t}_k(v_i)+\frac{1}{k-1}\cdot\sum_{i-1}^{n-\alpha}\overline{t}_k(v_i),$$

(30) $$\underline{t}_k(v_i)\leqq\binom{\underline{d}(v_i)}{k-1}$$

(31) $$\overline{t}_k(v_i)\leqq(\Delta_A-\underline{d}(v_i))\binom{\underline{d}(v_i)}{k-2}.$$

Затруднительно идти путем, следованным в доказательстве предложения 1, так как здесь правые части неравенств (30) и (31) слишком сложные. Поэтому мы их заменим следующими:

(32) $$\underline{t}_k(v_i)\leqq d(v_i^{k-1})/(k-1)\,!,$$

(33) $$\overline{t}_k(v_i)\leqq(\Delta_A-\underline{d}(v_i))\underline{d}^{k-2}(v_i)/(k-2)\,!.$$

Теперь с помощью этих неравенств и равенства (29) получаем:

(34) $$t(G, k)\leqq\sum_{i=1}^{n-\alpha}(\underline{d}^{k-1}(v_i)/k\,.(k-1)\,!+(\Delta_A-\underline{d}(v_i))d^{k-2}v_i)/(k-1)(k-2)\,!).$$

Рассмотрим функцию $f_k(x)=x^{k-1}/k\,!+(\Delta_A-x)x^{k-2}/(k-1)\,!$. Ясно, что $f_k(x)\leqq f_k(x_k)$ при $x\geqq 0$, где $x_k=k(k-2)\Delta_A/(k-1)^2$. Очевидно

$$f_k(x_k)=\frac{1}{k\,!}\,\frac{k-1}{k-2}\left(\frac{k(k-2)}{(k-1)^2}\right)^{k-1}\Delta_A^{k-1}(n-\alpha).$$

Этим неравенство (28) доказано.

Положим $\Delta(G)=\max\{\Delta_A|A\subset V(G),\ A$ — независимое множество$\}$. Из предложения 2 следует

$$t(G, k)\leqq\frac{1}{k\,!}\,\frac{k-1}{k-2}\cdot\left(\frac{k(k-2)}{(k-1)^2}\right)^{k-1}\Delta(G)^{k-1}(n-\alpha).$$

В частности,

$$t(G, k)\leqq\frac{1}{k\,!}\,\frac{k-1}{k-2}\left(\frac{k(k-2)}{(k-1)^2}\right)^{k-1}\Delta(G)^{k-1}(v(G)-\alpha(G)).$$

Предложение 2 не является обобщением предложения 1, и это вполне естественно, так как мы заменили (30) и (31) более неточными (32) и (33). Кроме того, здесь вопрос о нахождении экстремальных графов не возникает, потому что неравенство (28) почти всегда строгое.

Замечание. На отрезке $[0, x_k]$ функция $f_k(x)$ возрастает. Пусть $n-\alpha\leqq x_k$. Тогда

(35) $$f_k(x)\leqq f_k(n-\alpha)\quad\text{при}\quad 0\leqq x\leqq n-\alpha.$$

Очевидно $f_k(n-\alpha)=(n-\alpha)^{k-2}(\Delta_A-(k-1)(n-\alpha)/(k)/(k-1)\,!$. Так как $\underline{d}(v_i)<n-\alpha$, то, согласно (34), (35) и последнего равенства, получаем

(36) $$t(G, k)<(n-\alpha)^{k-1}(\Delta_A-(k-1)(n-\alpha)/k)/(k-1)\,!\ \text{при}\ n-\alpha\leqq x_k.$$

5. Оценки для числа k-клик графов с данным числом вершин. Пусть G — H-граф. Тогда

$$(37)\qquad t(G,k)\leqq\frac{1}{k!}\left(\frac{k(k-2)}{(k-1)^2}\right)^{k-1}.\,d^{k-1}(G)(v(G)-d(G)),$$

$$t(G,k)\leqq\frac{1}{k!}\left(\frac{k(k-2)}{(k-1)^2}\right)^{k-1}\alpha^{k-1}(G)(v(G)-\alpha(G)).$$

Элементарным исследованием функции $g_k(x)=x^{k-1}(n-x)$ получаем (см. (37)), что если G — граф с n вершинами, а A — независимое множество с $\Delta_A\leqq|A|$, тогда

$$(38)\qquad t(G,k)<\frac{1}{k\,.\,k!}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^{k-2}.\,n^k.$$

Как и в третьем параграфе, получим оценку получше. Для этой цели воспользуемся замечанием, сделанным в конце предшествующего параграфа. Пусть $\Delta_A\leqq|A|=\alpha$. Из (36) следует

$$(39)\qquad t(G,k)\leqq(n-\alpha)^{k-1}((2k-1)\alpha-(k-1)\,n))/k!\quad\text{при}\quad n-\alpha\leqq x_k.$$

Из $n-\alpha\leqq x_k$ следует, что $(2k-1)\alpha-(k-1)n\geqq 0$. Тогда, применением неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим, получаем $((2k-1)(n-\alpha)/(k-1))^{k-1}((2k-1)\alpha-(k-1)n)\leqq n^k$. Из (39) и последнего неравенства следует

$$(40)\qquad t(G,k)\leqq\frac{1}{k!}\left(\frac{k-1}{2k-1}\right)^{k-1}.\,n^k\quad\text{при}\quad n-\alpha\leqq x_k\quad\text{и}\quad\Delta_A\leqq\alpha.$$

Пусть теперь

$$(41)\qquad n-\alpha>x_k=k(k-2)\Delta_A/(k-1)^2.$$

Так как $\Delta_A\leqq\alpha$, то (28) дает:

$$(42)\qquad t(G,k)\leqq\frac{1}{k!}\cdot\frac{k-1}{k-2}\left(\frac{k(k-2)}{(k-1)^2}\right)^{k-1}\Delta_A^{k-1}(n-\Delta_A).$$

Из (41) и $\Delta_A\leqq\alpha$ следует

$$(43)\qquad \Delta_A<(k-1)^2n/(2k^2-4k+1).$$

На отрезке $[0,(k-1)/k]$ функция $g_k(x)$ возрастает. Очевидно $(k-1)^2n/(2k^2-4k+1)<(k-1)n/k$ и, следовательно,

$$(44)\qquad g_k(x)<g_k\left(\frac{(k-1)^2}{2k^2-4k+1}\cdot n\right)=\left(\frac{(k-1)^2}{2k^2-4k+1}\right)^{k-1}\frac{k(k-2)}{2k^2-4+1}\cdot n^k,$$

если $0\leqq x\leqq(k-1)^2/(2k^2-4k+1)$. Из (42) — (44) следует

$$(45)\qquad t(G,k)\leqq\frac{1}{k!}\,\frac{k-1}{k-2}\left(\frac{k(k-2)}{2k^2-4k+1}\right)^k\cdot n^k\quad\text{при}\quad n-\alpha>x_k\quad\text{и}\quad\Delta_A\leqq\alpha.$$

Сравним неравенства (40) и (45). Покажем, что

$$(46)\qquad \frac{k-1}{k-2}\cdot\left(\frac{k(k-2)}{2k^2-4k+1}\right)^k<\left(\frac{k-1}{2k-1}\right)^{k-1}.$$

Неравенство (46) эквивалентно неравенству

$$(47)\qquad (2k^2-4k+1)/k(k-1)>(k(k-2)(2k-1)/(k-1)(2k^2-4k+1))^{k-1}.$$

Заметим, что $k(k-2)/(2k^2-4k+1)<1/2\cdot$ Следовательно, верность неравенства (47) будет установлена, если покажем, что $(2k^2-4k+1)/k(k-1)>((2k-1)/2(k-1))^{k-1}$. Последнее неравенство эквивалентно неравенству $((2k^2-4k+1)/k(k-$

$1))^2>(1+1/2(k-1))^{2(k-1)}$, которое обязательно будет выполнено, если $((2k^2-4k+1)/k(k-1))^2>e$. Это неравенство эквивалентно неравенству $2-1/k-1/(k-1)>ve$. Последнее неравенство выполнено при $k\geqq 7$. Этим верность неравенства (46) доказана при $k\geqq 7$. Рассмотрение случаев $k=3, 4, 5, 6$ делается непосредственно.

С помощью неравенств (40), (45) и (46) очевидно доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть G — граф с n вершинами, а A — независимое множество вершин этого графа. Если $\Delta_A=\max\{d(v)\mid v\in V(G)\setminus A\}\leq|A|$, тогда*

$$t(G, k)\leq((k-1)/(2k-1))^{k-1}.\, n^k/k! \quad \text{при} \quad k\geq 3. \tag{48}$$

В частности, неравенство (48) *выполнено для произвольного H-графа G с n вершинами. Специально, оно выполнено для любого графа G с n вершинами, у которого есть вершина максимальной степени, через которую не проходит ни один треугольник.*

Простое сравнение неравенств (48) и (38) показывает, что неравенство (48) лучше. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать неравенство:

$$((k-1)/(2k-1))^{k-1}<((k-2)/(k-1))^{k-2}/k \quad \text{при} \quad k\geqq 3. \tag{49}$$

Его можно записать следующим образом:

$$k(k-1)/(2k-1)<((2k-1)(k-2)/(k-1)^2)^{k-2}. \tag{50}$$

Очевидно

$$\left(\frac{(2k-1)(k-2)}{(k-1)^2}\right)^{k-2}=\left(1+\frac{k^2-3k+1}{k^2-2k+1}\right)^{k-2}\geqq 1+\frac{k^2-2k+1}{k^2-2k+1}\,(k-2).$$

Следовательно, неравенство (50) будет доказано, если установим, что $k(k-1)/(2k-1)<1+(k^2-3k+1)(k-2)/(k^2-2k+1)$ или, что то же самое, $1/(2k-1)<(k-2)/(k^2-2k+1)$. Последнее неравенство очевидно верно. Этим неравенство (49) доказано.

Оценку (48) из теоремы 2 нельзя улучшить асимптотически, как это видно из следующего примера:

Пример 2. Пусть $n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2k-1)$. Вершины графа Γ_n обозначим через $v_1, v_2, \ldots, v_{(k-1)n/(2k-1)}, v^1, \ldots, v^{k.n/(2k-1)}$. Объявим смежными все вершины типа v_i и, кроме того, v_i и v^j, когда $j\leq n/(2k-1)+1$. Тогда $d(\Gamma_n)=\alpha(\Gamma_n)=kn/(2k-1)$ и

$$t(\Gamma_n, k)=\binom{(k-1)n/(2k-1)}{k}+\binom{(k-1)n/(2k-1)}{k-1}(n/(2k-1)+1).$$

Очевидно

$$t(\Gamma_n, k)\sim((k-1)/(2k-1))^{k-1}n^k/k!,\quad n\to\infty,\quad n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2k-1).$$

Пример 2 является обобщением примера 1.

Из теоремы 2 и только что приведенного примера очевидно получаем

Следствие 4. *Верно равенство*

$$\sup\{t(G, k), v(G)^{-k}\mid G - H\text{-граф}\}=((k-1)/(2k-1))^{k-1}/k!.$$

Следствие 4 является обобщением следствия 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Хаджииванов, Н. Ненов. Экстремальные задачи для s-графов и теорема Турана *Сердика*, 3, 1977, 117—125.

2. Н. Хаджииванов, Н. Ненов. О максимуме числа ребер графа. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 1575—1578.

3. Н. Хаджииванов, Н. Ненов. p-последовательности графов и некоторые экстремальные свойства графов Турана. *Доклады БАН*, **30**, 1977, 475—478.

4. Н. Хаджииванов, Н. Ненов. О числе p-клик в графах с p-фильтрами. *Доклады БАН*, **30**, 1977, 1231—1234.

5. P. Turan. On the theory of graphs. *Colloq. Math.*, **3**, 1954, 19—30.

6. Н. Хаджииванов, В. Никифоров. Оценки сверху для числа треугольников графа. *Математика и математическо образование* (Доклади на седма пролетна конференция на СМБ, Слънчев бряг 1978), София, 1978, 541—543.

Единый центр математики и механики
1090 София п. я. 373

Поступила 6. 6. 1978