Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

МИНИМАЛЬНЫЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ МНОГОУГОЛЬНИКА С ОПРЕДЕЛЕННЫМИ НЕЧЕТНЫМИ ВЕРШИНАМИ

НИКОЛА Й. МАРТИНОВ

Пусть P — многоугольник с множеством вершин $V(P)$ и $A\subseteq V(P)$. В работе исследуется плоский граф Γ, для которого одна из областей — это многоугольник P, а остальные области — треугольники; притом степени всех вершин A — нечетные, а степени остальных вершин — $V(P)$ — четные. Определяется (в зависимости от P и A) нижняя оценка числа вершин Γ. Для случая минимального числа вершин дается точное описание Γ.

Будем рассматривать плоские графы. В тех случаях, когда мы не даем определений, пользуемся терминологией и обозначениями Ф. Харари [1]. Если G — граф, через $V(G)$, $X(G)$ и $Z(G)$ будем обозначать соответственно множества вершин, ребер и областей, а через $V_1(G)$ и $V_2(G)$ — множества соответственно нечетных и четных вершин G. Символом $[v_1v_2]$ будем обозначать ребро с вершинами $v_1, v_2\in V(G)$. Будем рассматривать многоугольники тоже как графы.

Пусть P — многоугольник, а α — одна из его областей, например, внутренняя. Будем называть триангуляцией многоугольника P каждый граф Γ, для которого выполнено: P — цикл графа Γ, $\alpha\in Z(\Gamma)$ и каждый элемент $Z(\Gamma)$, кроме α, является треугольником (α тоже может быть треугольником). Будем называть минимальной триангуляцией ту триангуляцию, у которой минимальное число вершин (а, следовательно, число ребер и областей тоже минимальное).

Нормированным многоугольником P_A будем называть многоугольник P с фиксированным множеством $A\subset V(P)$. Триангуляцией P_A будем называть каждую триангуляцию Γ многоугольника P, для которой $V_1(\Gamma)\cap V(P)=A$. Множество нормированных многоугольников будем обозначать через Ω.

Пусть $P_A\in\Omega$ и $|A|$ — четное число. Определим число $\omega(P_A)$ следующим образом. Пусть A' — множество цепей с концами — последовательные вершины A, т. е. таких цепей P, которые начинаются с элемента из A, кончаются элементом из A и не содержат других вершин из A. Поскольку $|A|$ четное, то можно разбить A' на два класса A_1 и $\bar{A}_1$ таким образом, что две цепи с общим концом принадлежат разным классам. Пусть A_2 и $\bar{A}_2$ — множества отрезков (ребер), которые принадлежат цепям соответственно из A_1 и $\bar{A}_1$. Тогда $\omega(P_A):=|A_2|-|\bar{A}_2|$.

Множество Ω разбиваем на три непересекающиеся множества Ω_0, Ω_1 и Ω_2 следующим образом.

$P_A\in\Omega_0$ тогда и только тогда, когда $|A|$ четное и $\omega(P_A)\equiv 0 \pmod 3$.

$P_A\in\Omega_1$ тогда и только тогда, когда $|A|$ нечетное.

$P_A\in\Omega_2$ тогда и только тогда, когда $|A|$ четное и $\omega(P_A)\not\equiv$ (mod 3).

Будем говорить, что P_A типа k, когда $P_A\in\Omega_k$ ($k=0, 1, 3$).

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 5, 1979, с. 97–102

Множество Ω_0 исследовано в [2]. Здесь мы обобщим результаты, которые там получены, и переведем их к Ω_1, и Ω_2. Докажем, что $P_A \in \Omega_k$ ($k=0, 1, 2$) тогда и только тогда, когда существует триангуляция Γ нормированного многоугольника P_A, для которой $|V_1(\Gamma)| = |A| + k$, притом, если $k=2$, две вершины вне P смежны. Мы укажем и минимальное число четных вершин триангуляции P_A, когда $P_A \in \Omega$.

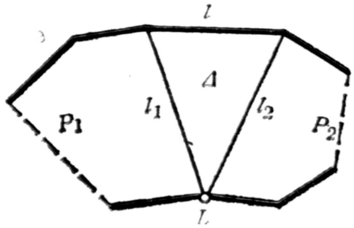

Рис. 1

Сначала мы введем еще несколько понятий и докажем некоторые леммы.

Пусть Γ — триангуляция многоугольника P. Если для одного треугольника из $Z(\Gamma)$ все вершины и две стороны принадлежат P (соответственно $V(P)$ и $X(P)$), будем называть его контурным треугольником, а если только две вершины и одна сторона принадлежат P — периферийным треугольником. $Z_1(P)$ будет множество всех контурных и периферийных треугольников Γ.

Лемма 1. *Если $\Gamma \neq K_3$, то $|Z_1(\Gamma)| \geq 2$.*

Доказательство. Проведем индукцию по $n = |Z(\Gamma)|$. По условию $n > 2$. Если $n=3$, то две внутренние области $Z(\Gamma)$ являются контурными треугольниками и, следовательно, лемма выполняется.

Пусть $n > 3$ и лемма справедлива для каждой триангуляции Γ'' многоугольника, для которой $|Z(\Gamma'')| < n$.

Пусть $l \in X(P)$ и $\Delta \in Z(\Gamma)$ является внутренним треугольником для P со стороной l. Если $\Delta \in Z_1(\Gamma)$, будем рассматривать другой треугольник $\Delta_1 \in Z(\Gamma)$, внутренний для P и имеющий общую сторону с P (существование Δ_1 следует из $\Gamma \neq K_3$). Если $\Delta_1 \in Z_1(\Gamma)$, то лемма выполняется. Поэтому предположим, что $\Delta \notin Z_1(\Gamma)$. Пусть l_1 и l_2 — другие две стороны Δ, а L — вершина, лежащая напротив l. Из $\Delta \notin Z_1(\Gamma)$ вытекает $L \in V(P)$, $l_1, l_2 \notin X(P)$ (рис. 1). Убираем Δ (т. е. удаляем l и прибавляем l_1 и l_2) и таким образом разбиваем P на два многоугольника P_1 и P_2, а Γ — на триангуляции Γ_1 и Γ_2 соответственно многоугольников P_1 и P_2. Очевидно, что каждый треугольник из $Z_1(\Gamma_i)$, для которого l_i не является стороной ($i=1, 2$), принадлежит $Z_1(\Gamma)$.

Если $\Gamma_1 = K_3$, то $\Gamma_1 \in Z_1(\Gamma)$. Если $\Gamma_1 \neq K_3$, поскольку $|Z(\Gamma_1)| < n$, то согласно предположению $|Z_1(\Gamma_1)| \geq 2$. В этом случае наиболее один из треугольников $Z_1(\Gamma_1)$ имеет сторону l_1, и не принадлежит $Z_1(\Gamma)$. Так получается, что во всех случаях $|Z_1(\Gamma_1) \cap Z_1(\Gamma)| \geq 1$. Таким образом получаем и $|Z_1(\Gamma_2) \cap Z_1(\Gamma)| \geq 1$. Но $Z(\Gamma_1) \cap Z(\Gamma_2) = \emptyset$. Следовательно, $|Z_1(\Gamma)| \geq 2$. Этим лемма доказана.

Пусть $P_A \in \Omega$, $v \in \bar{A} = V(P) \setminus A$, v_1 и v_2 — вершины P, смежные с v, $P' = (P - v) + [v_1 v_2]$, $B = \{v_1, v_2\}$, $A' = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Тогда будем говорить, что $P'_{A'} \in \Omega$ получается из P_A удалением (четной вершины) v и будем писать $P'_{A'} = P_A - v$.

Лемма 2. *P_A и $P'_{A'}$ — нормированные многоугольники одного типа.*

Доказательство. Для вершин v_1 и v_2 возможны следующие три случая: оба принадлежат A, только один принадлежит A, оба принадлежат $\bar{A}$. В этих случаях выполняется соответственно: $|A'| = |A| - 2$, $|A'| = |A|$, $|A'| = |A| + 2$. Это означает, что $|A|$ и $|A'|$ одновременно четные или нечетные. Осталось только доказать, что если они четные, то $\omega(P_A)$ и $\omega(P'_{A'})$ одновременно делятся или не делятся на 3.

Из определения $\omega(P_A)=||A_2|-|\bar{A}_2||$ следует, что число $\omega(P_A)$ не изменяется, если поменять роли совокупностей A_2 и $\bar{A}_2$. То же самое справедливо и для A'_2, $\bar{A}'_2$ и числа $\omega(P'_{A'}) = ||A'_2|| - |\bar{A}'_2||$. Поскольку $v \in \bar{A}$, ребра $[vv_1]$ и $[vv_2]$ принадлежат одной из совокупностей A_2 и $\bar{A}_2$. Пусть $[vv_1]$, $[vv_2] \in A_2$, а $[v_1v_2] \in A'_2$. Тогда $A_2=A'_2 \cup \{[vv_2], [vv_1]\}$, $A'_2 = A_2 \cup \{[v_1v_2]\}$, т. е. $|A_2| = |A'_2| + 2$, $|\bar{A}_2| = |\bar{A}'_2| - 1$. Следовательно, $\varepsilon\omega(P_A) = \varepsilon'\omega(P'_{A'})+\varepsilon$, $|\varepsilon|=|\varepsilon'|=1$; это означает, что $\omega(P_A)$ и $\omega(P'_{A'})$ либо оба делятся, либо не делятся на 3. Этим лемма доказана.

Триангуляция Γ многоугольника (нормированного многоугольника) P, для которой $V(P)=V(\Gamma)$, называется внешнепланарной триангуляцией P.

Лемма 3. *Пусть P_A — нормирован n-угольник. Тогда следующие две утверждения эквивалентны*:

а) $P_A \in \Omega_0$ *и* $|A|<n$;

б) P_A *допускает внешнепланарную триангуляцию.*

Доказательство. Проведем индукцию по числу вершин многоугольника P. Когда P — треугольник, утверждение очевидно выполняется. Пусть $n>3$; предположим, что утверждение выполняется для каждого многоугольника с числом вершин меньше чем n.

1. а) влечет б). По условию существует $v \in \bar{A} = V(P) \setminus A$. Если $A \neq \emptyset$, выбираем v так, что хотя бы одна из вершин, смежных с v, принадлежала бы A. Если $A=\emptyset$, то v — произвольная вершина P. Согласно лемме 2, $P_A - v = P'_{A'}$, — нормирован $n-1$-угольник Ω_0. Так как $|A'|<n-1$, по предположению $P'_{A'}$ допускает внешнепланарную триангуляцию Γ'. Очевидно, что $\Gamma=\Gamma' \cup P$ есть внешнепланарная триангуляция P_A.

2. б) влечет а). Пусть Γ — внешнепланарная триангуляция P_A. Известно, что Γ имеет вершину v степени 2. (Это получается, например, из леммы 1). Тогда $\Gamma'=\Gamma-v$ — внешнепланарная триангуляция $P'_{A'}=P_A-v$. Но $P'_{A'}$ — нормирован $n-1$-угольник и по предположению он принадлежит Ω_0. Отсюда согласно лемме 2 получаем, что и $P_A \in \Omega_0$. Кроме того, $|A|<n$, так как $v \notin A$. Этим лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $P_A \in \Omega$. Тогда следующие две утверждения эквивалентны*:

а) $P_A \in \Omega_0$;

б) *существует триангуляция Γ многоугольника P_A, для которой $V_1(\Gamma)=A$.*

Доказательство. 1. а) влечет б). Если $|A|<|V(P)|$, согласно лемме 3 существует внешнепланарная триангуляция Γ многоугольника P_A и для нее выполняется $V_1(\Gamma)=A$. Пусть $A=V(P)$. Тогда выбираем точку u, внутренюю для P, и рассматриваем колесо W_u с центром u и циклом P. Очевидно, что $u \notin V_1(W_u)$, т. е. $V_1(W_u)=A$.

2. б) влечет а). Проведем индукцию по $k=|X(\Gamma)|$. Очевидно, что если $k=3$, утверждение справедливо, т. е. $P_A \in \Omega_0$.

Пусть $k>3$; предположим, что когда для $Q_B \in \Omega$ существует триангуляция Γ^*, для которой $V_1(\Gamma^*)=B$, $|X(\Gamma^*)|<n$, то тогда $Q_B \in \Omega_0$.

Согласно лемме 1 существует треугольник $\Delta \in Z_1(\Gamma)$. Рассмотрим два подслучая.

2.1. Пусть Δ — контурный треугольник. Пусть v — та вершина Δ, у которой степень 2, а v_1 и v_2 — остальные две вершины Δ. Тогда $\Gamma'' = \Gamma - v$ — триангуляция $P'_{A'} = P_A - v$. Имея в виду, что каждая вершина $B = \{v_1, v_2\}$ принадлежит точно одной из совокупностей $V_1(\Gamma'')$ и $V_1(\Gamma) = A$, получаем $A' = V_1(\Gamma'') = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Кроме того, $|X(\Gamma'')| = k - 2 < k$. Тогда, согласно предположению $P'_{A'} \in \Omega_0$. Отсюда и из леммы 2 получаем, что и $P_A \in \Omega_0$.

2.2. Пусть Δ — периферийный треугольник. Пусть l — то ребро Δ, которое принадлежит $X_1(P)$, v_1 и v_2 — вершины Δ из $V(P)$ и v — третья вершина Δ. Тогда граф $\Gamma'' = \Gamma - l$ — триангуляция нормированного многоугольника $P'_{A'}$. Из $V_1(\Gamma) = A \subset V(P)$ и $\Gamma'' = \Gamma - l$ вытекает, что $V_1(\Gamma'') \subset V(P)$, т. е. $V_1(\Gamma'') = A'$ и $v \notin A'$. Кроме того каждый элемент $B = \{v_1, v_2\}$ принадлежит точно одной из совокупностей $V_1(\Gamma) = A$ и $V_1(\Gamma'') = A'$, т. е. $A' = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Следовательно, $P_A = P'_{A'} - v$. Из $V_1(\Gamma'') = A'$ и $|X(\Gamma'')| = k - 1$ по предположению получается $P'_{A'} \in \Omega_0$. Отсюда и из $P_A = P'_{A'} - v$ согласно лемме 2 вытекает $P_A \in \Omega_0$. Этим теорема доказана.

Принимая ввиду, что для $P_A \in \Omega_0$, когда $|A| < |V(P)|$, выполняется лемма 3, а когда $A = V(P)$, P_A имеет триангуляцию W_u с одной вершиной вне $V(P)$, мы получаем следующее

С л е д с т в и е 1. *Если Γ — минимальная триангуляция многоугольника $P_A \in \Omega_0$, то $|V(\Gamma)| \leq |V(P)| + 1$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $A = V(P)$.*

При $A = \emptyset$ получается частный случай теоремы 1.

С л е д с т в и е 2. *n-угольник имеет триангуляцию без нечетных вершин тогда и только тогда, когда $n \equiv 0 \pmod 3$.*

Прямое доказательство этого следствия, а также и другое доказательство леммы 3 изложены в [2]. Из теоремы 1, когда P — треугольник, имея в виду, что $P_A \in \Omega_0$ тогда и только тогда, когда $|A| = 0$, получаем

С л е д с т в и е 3. *Если одна триангуляция плоскости имеет только две нечетные вершины, они не смежны.*

Прямое доказательство этого следствия дано в [3]; другие его доказательства изложены в [4] и [2].

Т е о р е м а 2. *Пусть $P_A \in \Omega$. Тогда следующие две утверждения эквивалентны:*

а) $P_A \in \Omega_1$;

б) *существует триангуляция Γ многоугольника P_A, для которой $|V_1(\Gamma)| = |A| + 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. б) влечет а). Принимая ввиду, что $|V_1(\Gamma)|$ четное число, из $|V_1(\Gamma)| = |A| + 1$ получаем, что $|A|$ нечетное, т. е. $P_A \in \Omega_1$.

2. а) влечет б). Это докажем по индукции по $n = |V(P)|$. Когда $n = 3$, для A существуют две возможности: либо $|A| = 1$, либо $|A| = 3$. Очевидно, что в обоих случаях утверждение справедливо — P_A допускает триангуляцию с одной внутренней нечетной вершиной (рис. 2).

Пусть $n > 3$; предположим, что если $Q_B \in \Omega_1$ и $|V(Q)| < n$, то существует триангуляция Γ^*, для которой $|V_1(\Gamma^*)| = |B| + 1$.

Если $|A| = n$, каждое колесо W_u с циклом P — триангуляция P_A. Тогда для $\Gamma = W_u$ выполнено б), потому что $V(W_u) = V(P) \cup \{u\}$ и $\deg u = |A|$ — нечетное число. Пусть $|A| < n$. Тогда существует $v \in V(P) \setminus A$. Согласно лемме 2, $P_A - v = P'_{A'} \in \Omega_1$. Кроме того $|V(P^1)| = n-1 < n$. Следовательно, по предположению, $P'_{A'}$ допускает триангуляцию Γ'', для которой $|V_1(\Gamma'')| = |A'|+1$. Тогда $\Gamma = \Gamma'' \bigcup P$ — триангуляция P_A и для нее выполнено

(1) $$V(\Gamma) = V(\Gamma'') + \{v\}, \quad V_1(\Gamma) \setminus A = V_1(\Gamma'') \setminus A'.$$

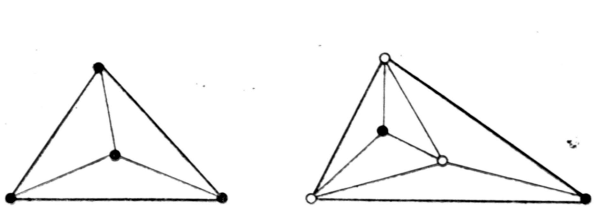

Рис. 2

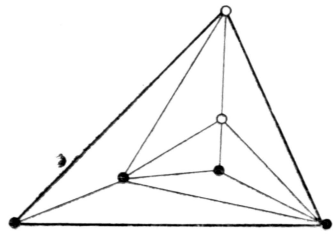

Рис. 3

Но $|V_1(\Gamma'') \setminus A'| = 1$. Следовательно, $|V_1(\Gamma) \setminus A| = 1$, т. е. $|V_1(\Gamma)| = |A|+1$. Этим теорема доказана.

Из доказательства теоремы 2, имея в виду частный случай $n=3$ (рис. 2) и зависимости (1), непосредственно получаем

Следствие 4. *Для каждого нормированного многоугольника $P_A \in \Omega_1$ существует триангуляция Γ, для которой $|V(\Gamma)| \leqq |V(P)| + 2$.*

Можно уточнить следствие 4, доказывая при этом следующее утверждение:

Если Γ — минимальная триангуляция нормированного многоугольника $P_A \in \Omega_1$, то $|V(\Gamma)| = |V(P)| + 2$, когда $\bar{A} = V(P) \setminus A$ содержит одну или две смежные для P вершины, и $|V(\Gamma)| = |V(P)| + 1$ во всех остальных случаях.

Теорема 3. *Пусть $P_A \in \Omega$. Тогда следующие две утверждения эквивалентны.*

а) $P_A \in \Omega_2$;

б) *существует триангуляция Γ многоугольника P_A, для которой $V_1(\Gamma) \setminus A = \{v_1, v_2\}$ и $[v_1 v_2] \in X(\Gamma)$.*

Доказательство. 1. б) влечет а). Так как $|V_1(\Gamma)|$ — четное число, из условия $|V_1(\Gamma)| = |A| + 2$ получаем, что $|A|$ — четное, т. е. что либо $P_A \in \Omega_0$, либо $P_A \in \Omega_2$.

Пусть $P_A \in \Omega_0$. Тогда согласно теореме 1, существует для P_A триангуляция Γ'', у которой нет нечетных вершин вне A. Не теряя общности, можем предположить, что Γ и Γ'' принадлежат различным областям относительно P, т. е. что $\Gamma_1 = \Gamma \bigcup \Gamma''$ — плоский граф. Но Γ_1 является триангуляцией плоскости и для нее выполняется $V_1(\Gamma_1) = \{v_1, v_2\}$, а это противоречит следствию 3. Итак, остается единственная возможность $P_A \in \Omega_2$.

2. а) влечет б). Проведем индукцию по $n = |V(P)|$. Если $n=3$, то $|A| = 2$ и легко сообразить, что выполняется б) (рис. 3).

Пусть $n > 3$, и если $Q_B \in \Omega_2$ и $|V(Q)| < n$, то существует триангуляция Γ^*, для которой $V_1(\Gamma^*) \setminus B = \{v_1^*, v_2^*\}$ и $[v_1^* v_2^*] \in X(\Gamma^*)$.

Из $P_A \in \Omega_2$ вытекает $|A| < n$, т. е. что существует $v \in \bar{A} = V(P) \setminus A$. Согласно лемме 2, $P_A - v = P'_{A'} \in \Omega_2$. Кроме того $|V(P')| = n-1$. Отсюда, по предположению, вытекает, что $P'_{A'}$ имеет триангуляцию Γ'', для которой $V_1(\Gamma'')\setminus A=\{v_1, v_2\}$, $[v_1,v_2]\in X(\Gamma'')$. Тогда $\Gamma=\Gamma'\bigcup P$ — триангуляция P_A и для нее выполнено

$$(2)\qquad V(\Gamma)=V(\Gamma')\bigcup\{v\},\quad X(\Gamma)=X(\Gamma')\bigcup X(P),$$
$$V_1(\Gamma)\setminus A=V_1(\Gamma')\setminus A'=\{v_1, v_2\},\ [v_1v_2]\in X(\Gamma).$$

Таким образом для Γ выполняется б). Этим теорема доказана.

Из доказательства теоремы 3, имея в виду случай $n=3$ (рис. 3 и (2)), непосредственно получаем

Следствие 5. *Для каждого нормированного многоугольника $P_A\in\Omega_2$ существует триангуляция Γ, такая, что* $|V(\Gamma)|\leqq|V(P)|+3$.

Можно уточнить это следствие; можно доказать следующее утверждение:

Если Γ — минимальная триангуляция $P_A\in\Omega_2$, то $|V(\Gamma)|=|V(P)|+3$, когда $n=3$, или $n=4$ и $|A|=0$, и $|V(\Gamma)|=|V(P)|+2$ во всех остальных случаях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Харари. Теория графов. Москва, 1973.
2. H. Flischner, P. Roy. Distribution of points of odd degree of certain triangulation in the plane. *Monatsh. Math.*, 78, 1974, 385—390.
3. Н. Мартинов. О 3-раскрашиваемых плоских графах. *Сердика*, 3, 1977, 11—16.
4. J. W. Moon. Solution to E 1667 (1964, 205). *Amer. Math. Monthly*, 72, 1965, 81—82.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 23. 11. 1976