Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

КОМБИНАТОРНЫЕ СТРУКТУРЫ

ВЕСЕЛИН П. ПЕТРОВ, ДИМИТЪР Г. СКОРДЕВ

Работа связана с алгебраическим обобщением теории рекурсивных функций при помощи понятия комбинаторного пространства. При этом обобщении роль функций играли элементы некоторой полугруппы. В настоящей работе некоторые из результатов переносятся на более общий случай, когда роль функций исполняют морфизмы подходящей категории.

1. Введение. В течение последних двух десятилетий относительно ряда фактов из теории рекурсивных функций и из информатики было обнаружено, что эти факты являются частными случаями некоторых значительно более общих утверждений, чаще всего имеющих алгебраический характер. Появились различные обобщения теории рекурсивных функций, а некоторые вопросы информатики стали изучаться алгебраическим путем (нередко с использованием языка теории категорий).

Настоящая работа связана с алгебраическим обобщением теории рекурсивных функций, указанных в [1] (подробное изложение этого обобщения дается в [2]). При упомянутом обобщении роль функций играют элементы некоторых частично упорядоченных полугрупп; в конкретных случаях, охватываемых этим обобщением, полугруппы, о которых идет речь, состоят из отображений в обобщенном смысле (частичных, многозначных, вероятностных, размытых или других) некоторых фиксированных бесконечных множеств в себя. Ограничиться отображениями фиксированных множеств в себя естественно с точки зрения теории рекурсивных функций; это ограничение позволило доказать алгебраические обобщения ряда результатов обычной теории рекурсивных функций, в том числе теоремы об универсальной функции и первой и второй теоремы о рекурсии. С точки зрения информатики, однако, это ограничение кажется не очень естественным, так как в вопросах переработки данных обычно имеют дело с различными типами объектов и представляется целесообразным, чтобы наличие этих различных типов было отражено в разрабатываемой теории. В настоящей работе некоторые из результатов работ [1—4] переносятся на более общий случай, в котором частично упорядоченные полугруппы заменены категориями с частичным порядком в классе морфизмов, что позволяет (относительно этих результатов) освободиться от упомянутого выше ограничения применимости. Самый существенный из доказываемых результатов — это теорема о нормальной форме рекурсивных морфизмов, которая в некотором смысле утверждает, что вычислимость при помощи итеративной процедуры является свойством, сохраняющимся при композиции, декартовом умножении, разветвлении и итерации отображений (причем понятие отображения может пониматься в некотором из упомянутых выше обобщенных смыслов). Основная часть результатов, излагаемых здесь, содержится в [5], где вместо по-

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 5, 1979, с. 128—148.

нятия комбинаторной структуры используется понятие категорного пространства (разница между этими двумя понятиями — чисто техническая).

Для понимания настоящей работы необязательно (по крайней мере с формальной точки зрения), чтобы читатель был знаком с некоторой из цитированных выше работ (незнакомый с понятием комбинаторного пространства читатель должен только пропустить пример 3 и несколько других пассажей, где это понятие используется). Знакомство с работой [1], как и с работами [6—8], помогло бы, однако, читателю составить себе лучшее представление о круге примеров, охватываемых излагаемой здесь теорией. Что касается необходимых для чтения сведений из области теории категорий, они исчерпываются определением понятия категории и связанных с ним обозначений. Мы будем использовать терминологию и обозначения из [9], однако с двумя изменениями и одним дополнением в обозначениях: будем писать $K(A, B)$ вместо $\mathrm{Hom}_K(A, B)$ и I_A вместо 1_A и, если $\varphi \in K(A, B)$, то будем обозначать A и B соответственно через $\mathfrak{d}\varphi$ и $\mathfrak{r}\varphi$.

2. Определение понятия комбинаторной структуры. Примеры. Комбинаторной структурой будем называть любую упорядоченную 12-ку $\langle K, \leq, \mathfrak{C}, \downarrow, \times, \Pi, \mathfrak{L}, \mathfrak{R}, P, \Sigma, T, F\rangle$, где K — категория, $\leq$ — частичный порядок в классе $\mathrm{Mor}\,K$, $\mathfrak{C} \subseteq \mathrm{Mor}\,K$, $\downarrow$ — отображение декартова произведения $\mathfrak{C} \times \mathrm{Ob}\,K$ в $\mathfrak{C}$, $\times$ — бинарная операция в классе $\mathrm{Ob}\,K$, Π — частичная бинарная операция в классе $\mathrm{Mor}\,K$, $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{R}$ — отображения декартова произведения $\mathrm{Ob}\,K \times \mathrm{Ob}\,K$ в $\mathrm{Mor}\,K$, $P \in \mathrm{Ob}\,K$, Σ — частичная тернарная операция в классе $\mathrm{Mor}\,K$, $T, F \in \mathfrak{C}$, $T : P \to P$, $F : P \to P$ и для любых $\varphi, \psi, \theta, \chi$ из $\mathrm{Mor}\,K$ и любых A и B из $\mathrm{Ob}\,K$ выполняются следующие условия:

1) Если $\varphi \leq \psi$, то $\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\psi$ и $\mathfrak{r}\varphi = \mathfrak{r}\psi$;

2) Если $\mathfrak{d}\psi = \mathfrak{r}\varphi$, $\varphi \leq \theta$ и $\psi \leq \chi$, то $\psi\varphi \leq \chi\theta$;

3) Существует такое x из $\mathfrak{C}$, что $x : A \to A$;

4) Если $\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\psi = A$ и для любого x из $\mathfrak{C}$, удовлетворяющего условию $x : A \to A$, справедливо неравенство $\varphi x \leq \psi x$, то $\varphi \leq \psi$;

5) $x \downarrow A : A \to \mathfrak{r}x$ для любого x из $\mathfrak{C}$;

6) $(x \downarrow A) \downarrow \mathfrak{d}x = x$ для любого x из $\mathfrak{C}$;

7) $\Pi(\varphi, \psi)$ определено тогда и только тогда, когда $\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\psi$;

8) Если $\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\psi = A$, то $\Pi(\varphi, \psi) : A \to \mathfrak{r}\varphi \times \mathfrak{r}\psi$;

9) $\Pi(x, y) \in \mathfrak{C}$ для любых x и y из $\mathfrak{C}$, которые удовлетворяют условию $\mathfrak{d}x = \mathfrak{d}y$;

10) Если $\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\psi = A$, то $\Pi(\varphi, \psi)x = \Pi(\varphi x, \psi x)$ для любого x из $\mathfrak{C}$, удовлетворяющего условию $\mathfrak{r}x = A$.

11) $\Pi(\varphi x, I_{\mathfrak{r}\theta})\theta = \Pi(\varphi(x \downarrow \mathfrak{d}\theta), \theta)$ для любого x из $\mathfrak{C}$, удовлетворяющего условию $x : \mathfrak{r}\theta \to \mathfrak{d}\varphi$;

12) $\Pi(I_{\mathfrak{r}\theta}, \psi x)\theta = \Pi(\theta, \psi(x \downarrow \mathfrak{d}\theta))$ для любого x из $\mathfrak{C}$, удовлетворяющего условию $x : \mathfrak{r}\theta \to \mathfrak{d}\psi$;

13) $\mathfrak{L}(A, B) : A \times B \to A$ и $\mathfrak{R}(A, B) : A \times B \to B$;

14) $\mathfrak{L}(\mathfrak{r}x, \mathfrak{r}y)\Pi(x, y) = x$ и $\mathfrak{R}(\mathfrak{r}x, \mathfrak{r}y)\Pi(x, y) = y$ для всех x и y из $\mathfrak{C}$, удовлетворяющих условию $\mathfrak{d}x = \mathfrak{d}y$.

15) $\Sigma(\chi, \varphi, \psi)$ определено тогда и только тогда, когда $\mathfrak{d}\chi = \mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\psi$, $\mathfrak{r}\chi = P$, $\mathfrak{r}\varphi = \mathfrak{r}\psi$;

16) Если $\mathfrak{d}\chi = \mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\psi = A$, $\mathfrak{r}\chi = P$ и $\mathfrak{r}\varphi = \mathfrak{r}\psi = B$, то $\Sigma(\chi, \varphi, \psi) : A \to B$;

17) Если $\mathfrak{d}\chi = \mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\psi = A$, $\mathfrak{r}\chi = P$ и $\mathfrak{r}\varphi = \mathfrak{r}\psi$, то $\Sigma(\chi, \varphi, \psi)x = \Sigma(\chi x, \varphi x, \psi x)$ для любого x из $\mathfrak{C}$, удовлетворяющего условию $\mathfrak{r}x = A$;

18) Если $\mathfrak{d}\chi=\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi$, $\mathfrak{r}\chi=P$ и $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}\psi=\mathfrak{d}\theta$, то $\theta\Sigma(\chi, \varphi, \psi)=\Sigma(\chi, \theta\varphi, \theta\psi)$.

19) Если $\mathfrak{r}\theta=P$, $\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi=A$ и $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}\psi$, то $\Sigma(I_P, \varphi x, \psi x)\theta=\Sigma(\theta, \varphi(x\downarrow\mathfrak{d}\theta), \psi(x\downarrow\mathfrak{d}\theta))$, для любого x из $\mathfrak{C}$, удовлетворяющего условию $x:P\to A$;

20) Если $\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi=P$, $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}\psi$, $\varphi\leq\theta$ и $\psi\leq\chi$, то $\Sigma(I_P, \varphi, \psi)\leqq\Sigma(I_P, \theta, \chi)$;

21) Если $\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi=P$ и $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}\psi$, то $\Sigma(T, \varphi, \psi)=\varphi$, $\Sigma(F, \varphi, \psi)=\psi$.

Приведем несколько примеров комбинаторных структур.

Пример 1. Пусть категория K определяется следующим образом: $\mathrm{Ob}\,K$ состоит из всех непустых множеств; $\mathrm{Mor}\,K$ состоит из всех троек $\langle A, f, B\rangle$, где f — частичное отображение непустого множества A в непустое множество B; если $\langle A, f, B\rangle\in\mathrm{Mor}\,K$, то $\mathfrak{d}\langle A, f, B\rangle=A$, $\mathfrak{r}\langle A, f, B\rangle=B$; если $\langle A, f, B\rangle, \langle B, g, C\rangle\in\mathrm{Mor}\,K$, то $\langle B, g, C\rangle\langle A, f, B\rangle=\langle A, gf, C\rangle$. Для любых $\langle A, f, B\rangle$ и $\langle C, g, D\rangle$ из $\mathrm{Mor}\,K$ считаем, что $\langle A, f, B\rangle\leq\langle C, g, D\rangle$ тогда и только тогда, когда $A=C$, $B=D$ и отображение g является продолжением отображения f. Пусть $\mathfrak{C}$ состоит из тех $\langle A, f, B\rangle$ из $\mathrm{Mor}\,K$, у которых f является постоянным всюду определенным отображением множества A в множество B. Операция $\downarrow$ пусть определяется так: если $\langle B, f, C\rangle\in\mathfrak{C}$ и $A\in\mathrm{Ob}\,K$, то $\langle B, f, C\rangle\downarrow A=\langle A, g, C\rangle$, где g — постоянное отображение с областью определения A и с тем же самым значением, как отображение f. Знаком $\times$ пусть обозначена операция декартова умножения множеств. Частичная операция Π пусть определена следующим образом: если $\langle A, f, B\rangle$, $\langle A, g, C\rangle\in\mathrm{Mor}\,K$, то

$$\Pi(\langle A, f, B\rangle, \langle A, g, C\rangle)=\langle A, \lambda p\cdot\langle f(p), g(p)\rangle, B\times C\rangle.$$

Если $A, B\in\mathrm{Ob}\,K$, то уславливаемся, что $\mathfrak{L}(A, B)=\langle A\times B, f_{A,B}, A\rangle$ и $\mathfrak{R}(A, B)=\langle A\times B, g_{A,B}, B\rangle$, где $f_{A,B}$ — отображение множества $A\times B$ в множество A, определяемое при помощи равенства $f_{A,B}(\langle q, r\rangle)=q$, а $g_{A,B}$ — отображение множества $A\times B$ в B, определяемое при помощи равенства $g_{A,B}(\langle q, r\rangle)=r$. Пусть $P=\{a, b\}$ — фиксированное двуэлементное множество ($a\neq b$). Частичная операция Σ пусть определяется так: если $\chi=\langle A, h, P\rangle$, $\varphi=\langle A, f, B\rangle$ и $\psi=\langle A, g, B\rangle$ — элементы класса $\mathrm{Mor}\,K$, то $\Sigma(\chi, \varphi, \psi)=\langle A, k, B\rangle$, где k — частичное отображение множества A в B, определяемое при помощи эквивалентности

$$k(p)=q\Leftrightarrow(h(p)=a\&f(p)=q)\vee(h(p)=b\&g(p)=q).$$

Пусть наконец $T=\langle P, \lambda pa, P\rangle$, $F=\langle P, \lambda p\,.\,b, P\rangle$. Тогда 12-ка $\langle K, \leq, \mathfrak{C}, \downarrow, \times, \Pi, \mathfrak{L}, \mathfrak{R}, P, \Sigma, T, F\rangle$ является комбинаторной структурой. Заметим, что с интуитивной точки зрения можно считать, что a и b символизируют логические значения „истина“ и „ложь“, а отображения со значениями в P могут рассматриваться как предикаты.

Пример 2. Сделаем в определении категории K из примера 1 следующее изменение: вместо частичных отображений рассмотрим частично-многозначные отображения. Для любых $\langle A, f, B\rangle$ и $\langle C, g, D\rangle$ из $\mathrm{Mor}\,K$ будем считать, что $\langle A, f, B\rangle\leq\langle C, g, D\rangle$ тогда и только тогда, когда $A=C$, $B=D$ и $f(p)\subseteq g(p)$ для любого p из A. Пусть $\mathfrak{C}$ состоит из тех $\langle A, f, B\rangle$ из $\mathrm{Mor}\,K$, для которых существует такое c из B, что $f(p)=\{c\}$ для любого p из A. Операции $\downarrow$ и $\times$ пусть определяются так же, как в примере 1. Частичная операция Π пусть определяется при помощи равенства

$$\Pi(\langle A, f, B\rangle, \langle A, g, C\rangle)=\langle A, \lambda p\,.\,f(p)\times g(p), B\times C\rangle.$$

Операции $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{R}$ пусть определяются так же, как в примере 1, но с той разницей, что теперь определяющие равенства отображений $f_{A,B}$ и $g_{A,B}$

имеют вид $f_{A,B}(\langle q, r\rangle)=\{q\}$, $g_{A,B}(\langle q, r\rangle)=\{r\}$. Пусть P — то же самое, как в примере 1, а определение операции Σ отличается от соответствующего определения в примере 1 только тем, что определяющая эквивалентность для отображения k имеет теперь вид

$$q\in k(p)\Leftrightarrow(a\in h(p)\,\&\,q\in f(p))\vee(b\in h(p)\,\&\,q\in g(p)).$$

Наконец, пусть $T=\langle P, \lambda p.\{a\}, P\rangle$, $F=\langle P, \lambda p.\{b\}, P\rangle$. Тогда 12-ка $\langle K, \leq, \mathfrak{C}, \downarrow, \mathbf{\times}, \Pi, \mathfrak{L}, \mathfrak{R}, P, \Sigma, T, F\rangle$ является комбинаторной структурой.

Пример 3. Пусть $\langle \mathfrak{F}, \mathfrak{C}, \Pi, L, R, \Sigma, T, F, \leq\rangle$ — произвольное комбинаторное пространство в смысле определения из [1]. Рассмотрим категорию K, для которой $\mathrm{Ob}\,K$ состоит из одного элемента (обозначим его через M), $\mathrm{Mor}\,K=\mathfrak{F}$, а операцией композиции является умножение в полугруппе $\mathfrak{F}$. Операции $\downarrow$, $\mathbf{\times}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}$ пусть определяются при помощи равенств $x\downarrow M=x$, $M\mathbf{\times}M=M$, $\mathfrak{L}(M, M)=L$, $\mathfrak{R}(M, M)=R$. Тогда 12-ка $\langle K, \leq, \mathfrak{C}, \downarrow, \mathbf{\times}, \Pi, \mathfrak{L}, \mathfrak{R}, M, \Sigma, T, F\rangle$ является комбинаторной структурой.

Примеры 1 и 2 могут рассматриваться как аналоги примеров 2 и 3 из [1]. Дальнейшие примеры комбинаторных структур могут быть получены путем построения аналогов подобного вида для остальных примеров из [1] и [6—8]. Таким образом получатся примеры комбинаторных структур, не сводящиеся к примеру 3, в которых морфизмы являются вероятностными или размытыми отображениями, примеры топологического характера, примеры, связанные со сложностью переработки данных, и так далее.

3. Некоторые свойства комбинаторных структур. Будем предполагать, что дана некоторая комбинаторная структура $\langle K, \leq, \mathfrak{C}, \downarrow, \mathbf{\times}, \Pi, \mathfrak{L}, \mathfrak{R}, P, \Sigma, T, F\rangle$. Буквами A, B, C и D будем обозначать элементы класса $\mathrm{Ob}\,K$, буквами x, y и z — элементы класса $\mathfrak{C}$, а строчными греческими буквами — элементы класса $\mathrm{Mor}\,K$. Вместо $x\downarrow A$, $\mathfrak{L}(A, B)$, $\mathfrak{R}(A, B)$, $\Pi(\varphi, \psi)$ и $\Sigma(\chi, \varphi, \psi)$ будем писать соответственно x_A, $L_{A,B}$, $R_{A,B}$, (φ, ψ) и $(\chi\supset\varphi, \psi)$. Множество тех x, для которых выполняется условие $x: A\to B$, будем обозначать через $\mathfrak{C}_{A,B}$.

Предложение 3.1. *Пусть* $\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi=A$ *и* $\varphi x=\psi x$ *для любого* x *из* $\mathfrak{C}_{A,A}$. *Тогда* $\varphi=\psi$.

Доказательство. Для любого x из $\mathfrak{C}_{A,A}$ справедливы неравенства $\varphi x\leq\psi x$ и $\psi x\leq\varphi x$. В силу условия 4) из определения понятия комбинаторной структуры это позволяет утверждать, что $\varphi\leq\psi$ и $\psi\leq\varphi$.

Предложение 3.2. *Для любого* z *справедливы равенства*

$$L_{\mathfrak{d}z,\mathfrak{r}z}(I_{\mathfrak{d}z}, z)=I_{\mathfrak{d}z},\quad R_{\mathfrak{r}z,\mathfrak{d}z}(z, I_{\mathfrak{d}z})=I_{\mathfrak{d}z}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{d}z=A$, $\mathfrak{r}z=B$. Если x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{A,A}$, то с использованием условий 13), 7), 8), 12), 5) и 14) получаем

$$L_{A,B}(I_A, z)x=L_{A,B}(I_A, I_Bz)x=L_{A,B}(x, I_Bz_A)=L_{A,B}(x, z_A)=x=I_Ax.$$

Отсюда при помощи предложения 3.1 заключаем, что $L_{A,B}(I_A, z)=I_A$. Второе из написанных равенств доказывается аналогичным образом.

Предложение 3.3. *Для любого* z *справедливы равенства*

$$L_{\mathfrak{r}z,\mathfrak{d}z}(z, I_{\mathfrak{d}z})=z,\quad R_{\mathfrak{d}z,\mathfrak{r}z}(I_{\mathfrak{d}z}, z)=z.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{d}z=A$, $\mathfrak{r}z=B$. Если x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{A,A}$, то с использованием условий 13), 7), 8), 10), 6), 12), 5) и предложения 3.2 получаем

$$L_{B,A}(z,\ I_A)x=L_{B,A}(zx,\ I_Ax)=L_{B,A}(zx,\ I_A(x_B)_A)$$

$$=L_{B,A}(I_B,\ I_Ax_B)zx=L_{B,A}(I_B,\ x_B)zx=I_Bzx=zx.$$

Отсюда с использованием предложения 3.1 заключаем, что $L_{B,A}(z,\ I_A)=z$. Второе из написанных равенств доказывается аналогичным образом.

Предложение 3.4. *Если $\mathfrak{d}x=\mathfrak{r}y$, то $xy=x_{\mathfrak{d}y}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{d}x=\mathfrak{r}y=A$, $\mathfrak{r}x=B$. Воспользовавшись предложением 3.3 и условиями 11), 5) и 14) получаем

$$xy=L_{B,A}(x,\ I_A)y=L_{B,A}(I_Bx,\ I_A)y=L_{B,A}(I_Bx_{\mathfrak{d}y},y)=L_{B,A}(x_{\mathfrak{d}y},y)=x_{\mathfrak{d}y}.$$

Предложение 3.5. *Если $\mathfrak{d}x=\mathfrak{d}y$, то $x_{\mathfrak{r}y}y=x$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{d}x=\mathfrak{d}y$. На основании предложения 3.4 и условий 5) и 6) имеем $x_{\mathfrak{r}y}y=(x_{\mathfrak{r}y})_{\mathfrak{d}y}=(x_{\mathfrak{r}y})_{\mathfrak{d}x}=x$.

Предложение 3.6. *Для любого x справедливо равенство $x_{\mathfrak{d}x}=x$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{d}x=A$, $\mathfrak{r}x=B$. Применив предложение 3.3 и воспользовавшись условиями 11) и 5), получаем

$$x=L_{B,A}(x,\ I_A)=L_{B,A}(I_Bx,\ I_A)I_A=L_{B,A}(I_Bx_A,\ I_A)=L_{B,A}(x_A,\ I_A)=x_A.$$

Предложение 3.7. *Если $\mathfrak{d}y=\mathfrak{r}y=\mathfrak{d}x$, то $xy=x$.*

Доказательство. При сделанных предположениях относительно x и y, на основании предложений 3.4 и 3.6, имеем $xy=x_{\mathfrak{d}y}=x_{\mathfrak{d}x}=x$.

Предложение 3.8. *Для любых A и B множество $\mathfrak{C}_{A,B}$ имеет, по крайней мере, один элемент.*

Доказательство. На основании условия 3) берем x из $\mathfrak{C}_{B,B}$. Воспользовавшись условием 5), заключаем, что $x_A\in\mathfrak{C}_{A,B}$.

Предложение 3.9. *Для любых x и y справедливо равенство $x_{\mathfrak{r}y}y=x_{\mathfrak{d}y}$.*

Доказательство. Берем z, принадлежащее множеству $\mathfrak{C}_{\mathfrak{r}y,\mathfrak{d}x}$. Воспользовавшись условием 5) и предложением 3.4, получаем $x_{\mathfrak{r}y}y=xzy$ $=xz_{\mathfrak{d}y}=x_{\mathfrak{d}y}$.

Предложение 3.10. *Для любого x и любых A и B справедливо равенство $(x_A)_B=x_B$.*

Доказательство. Берем y, принадлежащее множеству $\mathfrak{C}_{B,A}$. Воспользовавшись условием 5) и предложениями 3.4 и 3.9, получаем

$$(x_A)_B=(x_A)_{\mathfrak{d}y}=x_Ay=x_{\mathfrak{r}y}y=x_{\mathfrak{d}y}=x_B.$$

Предложение 3.11. *Пусть $\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi=A$ и пусть $\varphi x\leqq\psi x$ для любого x из $\mathfrak{C}_{C,A}$. Тогда $\varphi\leqq\psi$.*

Доказательство. В силу условия 4) достаточно доказать, что $\varphi y\leqq\psi y$ для любого y из $\mathfrak{C}_{A,A}$. Пусть y — произвольный элемент множества $\mathfrak{E}_{A,A}$. Воспользовавшись условием 5) и сделанными предположениями, получаем неравенство $\varphi y_C \leqq \psi y_C$. Берем z, принадлежащее множеству $\mathfrak{E}_{A,C}$. Тогда, на основании условия 2), можно утверждать, что $\varphi y_C z \leqq \psi y_C z$. Однако $y_C z = y$ в силу предложения 3.5. Следовательно, $\varphi y \leqq \psi y$.

Предложение 3.12. *Пусть* $\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\psi = A$ *и* $\varphi x = \psi x$ *для любого* x *из* $\mathfrak{E}_{C,A}$. *Тогда* $\varphi = \psi$.

Доказательство. Для любого x из $\mathfrak{E}_{C,A}$ справедливы неравенства $\varphi x \leqq \psi x$ и $\psi x \leqq \varphi x$. В силу предложения 3.11 это позволяет утверждать, что $\varphi \leqq \psi$ и $\psi \leqq \varphi$.

Предложение 3.13. *Если* $\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\psi = A$ *и* $\mathfrak{r}\varphi = \mathfrak{r}\psi$, *то* $(T_A \supset \varphi, \psi) = \varphi$ *и* $(F_A \supset \varphi, \psi) = \psi$.

Доказательство. Пусть z — произвольный элемент множества $\mathfrak{E}_{P,A}$. В силу предложения 3.5 справедливо равенство $T_A z = T$. Отсюда получаем, что

$$(T_A \supset \varphi, \psi) z = (T_A z \supset \varphi z, \psi z) = (T \supset \varphi z, \psi z) = \varphi z.$$

В силу произвольности элемента z можно применить предложение 3.12 и заключить, что $(T_A \supset \varphi, \psi) = \varphi$. Равенство $(F_A \supset \varphi, \psi) = \psi$ доказывается аналогичным образом.

Предложение 3.14. *Если* $x \in \mathfrak{E}_{\mathfrak{d}\theta, \mathfrak{d}\varphi}$, *то* $(\varphi x, \theta) = (\varphi x_{\mathfrak{r}\theta}, I_{\mathfrak{r}\theta})\theta$.

Доказательство. В силу условий 5), 11) и 6) имеем

$$(\varphi x_{\mathfrak{r}\theta}, I_{\mathfrak{r}\theta})\theta = (\varphi (x_{\mathfrak{r}\theta})_{\mathfrak{d}\theta}, \theta) = (\varphi x, \theta).$$

Предложение 3.15. *Если* $x \in \mathfrak{E}_{\mathfrak{d}\theta, \mathfrak{d}\psi}$, *то* $(\theta, \psi x) = (I_{\mathfrak{r}\theta}, \psi x_{\mathfrak{r}\theta})\theta$.

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 3.14.

Предложение 3.16. *Если* $\mathfrak{d}\theta = \mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\psi = \mathfrak{r}x$, $\mathfrak{r}\varphi = \mathfrak{r}\psi$ *и* $\mathfrak{r}\theta = P$, *то* $(\theta \supset \varphi x, \psi x) = (I_P \supset \varphi x_P, \psi x_P)\theta$.

Доказательство. В силу условий 5), 19) и 6) имеем

$$(I_P \supset \varphi x_P, \psi x_P)\theta = (\theta \supset \varphi (x_P)_{\mathfrak{d}\theta}, \psi (x_P)_{\mathfrak{d}\theta}) = (\theta \supset \varphi x, \psi x).$$

Предложение 3.17. *Пусть* $\varphi \leqq \varphi_1$, $\psi \leqq \psi_1$ *и* $\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\psi$. *Тогда справедливо неравенство* $(\varphi, \psi) \leqq (\varphi_1, \psi_1)$.

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент множества $\mathfrak{E}_{\mathfrak{d}\varphi, \mathfrak{d}\varphi}$. Тогда при помощи условий 10) и 2) и предложений 3.15 и 3.14 получаем

$$\begin{aligned}(\varphi, \psi)x &= (\varphi x, \psi x) = (I_{\mathfrak{r}\varphi}, \psi x_{\mathfrak{r}\varphi})\varphi x \leqq (I_{\mathfrak{r}\varphi}, \psi x_{\mathfrak{r}\varphi})\varphi_1 x = (I_{\mathfrak{r}\varphi_1}, \psi x_{\mathfrak{r}\varphi_1})\varphi_1 x \\ &= (\varphi_1 x, \psi x) = (\varphi_1 x_{\mathfrak{r}\psi}, I_{\mathfrak{r}\psi})\psi x \leqq (\varphi_1 x_{\mathfrak{r}\psi}, I_{\mathfrak{r}\psi})\psi_1 x \\ &= (\varphi_1 x_{\mathfrak{r}\psi_1}, I_{\mathfrak{r}\psi_1})\psi_1 x = (\varphi_1 x, \psi_1 x) = (\varphi_1, \psi_1)x.\end{aligned}$$

Следовательно, $(\varphi, \psi) \leqq (\varphi_1, \psi_1)$.

Предложение 3.18. *Пусть* $\chi \leqq \chi_1$, $\varphi \leqq \varphi_1$, $\psi \leqq \psi_1$, $\mathfrak{d}\chi = \mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\psi$, $\mathfrak{r}\varphi = \mathfrak{r}\psi$, *и* $\mathfrak{r}\chi = P$. *Тогда* $(\chi \supset \varphi, \psi) \leqq (\chi_1 \supset \varphi_1, \psi_1)$.

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент множества $\mathfrak{E}_{\mathfrak{d}\chi, \mathfrak{d}\chi}$. Тогда при помощи условий 17), 20) и 2) и предложения 3.16 получаем

$$(\chi\supset\varphi,\psi)x=(\chi x\supset\varphi x,\psi x)=(I_P\supset\varphi x_P,\psi x_P)\chi x$$
$$\leq(I_P\supset\varphi_1 x_P,\psi_1 x_P)\chi_1 x=(\chi_1 x\supset\varphi_1 x,\psi_1 x)=(\chi_1\supset\varphi_1,\psi_1)x.$$

Следовательно, $(\chi\supset\varphi,\psi)\leq(\chi_1\supset\varphi_1,\psi_1)$.

Предложение 3.19. *Если $\mathfrak{d}x=\mathfrak{d}\psi=\mathfrak{r}\theta$ и $\mathfrak{r}x=\mathfrak{d}\varphi$, то справедливо равенство $(\varphi x,\psi)\theta=(\varphi x_{\mathfrak{d}\theta},\psi)$.*

Доказательство. Имеем

$$(\varphi x,\psi)\theta=(\varphi x_{\mathfrak{r}\psi},I_{\mathfrak{r}\psi})\psi\theta=(\varphi(x_{\mathfrak{r}\psi})_{\mathfrak{d}\theta},\psi\theta)=(\varphi x_{\mathfrak{d}\theta},\psi\theta).$$

Предложение 3.20. *Если $\mathfrak{d}x=\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{r}\theta$ и $\mathfrak{r}x=\mathfrak{d}\psi$, то справедливо равенство $(\varphi,\psi x)\theta=(\varphi\theta,\psi x_{\mathfrak{d}\theta})$.*

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 3.19.

Предложение 3.21. *Если $\mathfrak{d}\chi=\mathfrak{d}x=\mathfrak{r}\theta$, $\mathfrak{r}\chi=P$, $\mathfrak{r}x=\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi$ и $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}\psi$, то $(\chi\supset\varphi x,\psi x)\theta=(\chi\theta\supset\varphi x_{\mathfrak{d}\theta},\psi x_{\mathfrak{d}\theta})$.*

Доказательство. Имеем

$$(\chi\supset\varphi x,\psi x)\theta=(I_P\supset\varphi x_P,\psi x_P)\chi\theta=(\chi\theta\supset\varphi(x_P)_{\mathfrak{d}\theta},\psi(x_P)_{\mathfrak{d}\theta})=(\chi\theta\supset\varphi x_{\mathfrak{d}\theta},\psi x_{\mathfrak{d}\theta}).$$

Определим теперь понятие совершенного элемента класса $\mathrm{Mor}\,K$. Будем говорить, что ξ является совершенным морфизмом, если $\xi x\in\mathfrak{C}$ для любого x из $\mathfrak{C}_{\mathfrak{d}\xi,\mathfrak{d}\xi}$. Очевидно, что морфизм I_A является совершенным для любого A. Из предложения 3.7 следует, что все элементы множества $\mathfrak{C}$ также являются совершенными.

Предложение 3.22. *Если ξ — совершенный морфизм и $\mathfrak{r}x=\mathfrak{d}\xi$, то $\xi x\in\mathfrak{C}$.*

Доказательство. В силу предложений 3.5 и 3.4 имеем $\xi x=\xi x_{\mathfrak{r}x}x=(\xi x_{\mathfrak{r}x})_{\mathfrak{d}x}$.

Предложение 3.23. *Пусть ξ — совершенный морфизм и $\mathfrak{d}\xi=\mathfrak{d}\theta$ Тогда справедливы равенства $L_{\mathfrak{r}\theta,\mathfrak{r}\xi}(\theta,\xi)=\theta$, $R_{\mathfrak{r}\xi,\mathfrak{r}\theta}(\xi,\theta)=\theta$.*

Доказательство. Если x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{\mathfrak{d}\xi,\mathfrak{d}\xi}$, то при помощи предложений 3.15 и 3.2 получаем

$$L_{\mathfrak{r}\theta,\mathfrak{r}\xi}(\theta,\xi)x=L_{\mathfrak{r}\theta,\mathfrak{r}\xi}(\theta x,\xi x)=L_{\mathfrak{r}\theta,\mathfrak{r}\xi}(I_{\mathfrak{r}\theta},\xi x_{\mathfrak{r}\theta})\theta x=I_{\mathfrak{r}\theta}\theta x=\theta x.$$

Следовательно, $L_{\mathfrak{r}\theta,\mathfrak{r}\xi}(\theta,\xi)=\theta$. Равенство $R_{\mathfrak{r}\xi,\mathfrak{r}\theta}(\xi,\theta)=\theta$ доказывается аналогичным образом.

Предложение 3.24. *Если ξ и η — совершенные морфизмы и $\mathfrak{d}\xi=\mathfrak{d}\eta$, то морфизм (ξ,η) также является совершенным.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{d}\xi=\mathfrak{d}\eta=A$. Тогда $\mathfrak{d}(\xi,\eta)=A$. Пусть x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{A,A}$. Тогда морфизмы ξx и $\xi\eta$ принадлежат классу $\mathfrak{C}$. Следовательно, $(\xi,\eta)x=(\xi x,\eta x)\in\mathfrak{C}$.

Предложение 3.25. *Если ξ и η — совершенные морфизмы и $\mathfrak{d}\xi=\mathfrak{r}\eta$, то морфизм $\xi\eta$ также является совершенным.*

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{\mathfrak{d}\eta,\mathfrak{d}\eta}$. Тогда $\eta x\in\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{r}(\eta x)=\mathfrak{d}\xi$. Поэтому на основании предложения 3.22 можно утверждать, что $\xi\eta x\in\mathfrak{C}$.

Предложение 3.26. *Если ξ — совершенный морфизм и* $\mathfrak{d}x=\mathfrak{r}\xi$, *то* $x\xi=x_{\mathfrak{d}\xi}$.

Доказательство. Пусть z — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{\mathfrak{d}\xi,\mathfrak{d}\xi}$. Тогда $\xi z\in\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{d}x=\mathfrak{r}(\xi z)$. На основании предложений 3.4 и 3.9 получаем $x\xi z=x_{\mathfrak{d}z}=x_{\mathfrak{r}z}z=x_{\mathfrak{d}\xi}z$.

Предложение 3.27. *Если ξ — совершенный морфизм и* $\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi=\mathfrak{r}\xi$, *то* $(\varphi,\psi)\xi=(\varphi\xi,\psi\xi)$.

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{\mathfrak{d}\xi,\mathfrak{d}\xi}$. Тогда $\xi x\in\mathfrak{C}$ и, следовательно, $(\varphi,\psi)\xi x=(\varphi\xi x,\psi\xi x)=(\varphi\xi,\psi\xi)x$.

Предложение 3.28. *Если ξ — совершенный морфизм,* $\mathfrak{d}\chi=\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi=\mathfrak{r}\xi$, $\mathfrak{r}\chi=P$ *и* $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}\psi$, *то* $(\chi\supset\varphi,\psi)\xi=(\chi\xi\supset\varphi\xi,\psi\xi)$.

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{\mathfrak{d}\xi,\mathfrak{d}\xi}$. Тогда $\xi x\in\mathfrak{C}$ и, следовательно, $(\chi\supset\varphi,\psi)\xi x=(\chi\xi x\supset\varphi\xi x,\psi\xi x)=(\chi\xi\supset\varphi\xi,\psi\xi)x$.

Предложение 3.29. *Пусть* $\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\gamma=A$, $\mathfrak{r}\gamma=B$ *и* $\mathfrak{d}\theta=A\times B$. *Тогда*

$$(\varphi L_{A,B},\theta)(I_A,\gamma)=(\varphi,\theta(I_A,\gamma)),\ (\theta,\varphi L_{A,B})(I_A,\gamma)=(\theta(I_A,\gamma),\varphi).$$

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{A,A}$. Тогда при помощи предложений 3.14, 3.24, 3.27, 3.3 и 3.19 получаем

$$(\varphi L_{A,B},\theta)(I_A,\gamma)x=(\varphi L_{A,B},\theta)(I_Ax,\gamma x)=(\varphi L_{A,B},\theta)(x_B,I_B)\gamma x$$
$$=(\varphi L_{A,B}(x_B,I_B),\theta(x_B,I_B))\gamma x=(\varphi x_B,\theta(x_B,I_B))\gamma x=(\varphi(x_B)_A,\theta(x_B,I_B)\gamma x)$$
$$=(\varphi x,\theta(x,\gamma x))=(\varphi,\theta(I_A,\gamma))x.$$

Следовательно, справедливо первое из написанных двух равенств. Второе из них доказывается аналогичным образом.

Предложение 3.30. *Пусть* $\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\gamma=A$, $\mathfrak{r}\gamma=B$ *и* $\mathfrak{d}\theta=B\times A$. *Тогда*

$$(\varphi R_{B,A},\theta)(\gamma,I_A)=(\varphi,\theta(\gamma,I_A)),\ (\theta,\varphi R_{B,A})(\gamma,I_A)=(\theta(\gamma,I_A),\varphi).$$

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 3.29.

Предложение 3.31. *Пусть* $\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{r}\gamma=A$, $\mathfrak{d}\psi=\mathfrak{r}\delta=B$ *и* $\mathfrak{d}\gamma=\mathfrak{d}\delta$. *Тогда*

$$(\varphi L_{A,B},\psi R_{A,B})(\gamma,\delta)=(\varphi\gamma,\psi\delta),\ (\varphi R_{B,A},\psi L_{B,A})(\delta,\gamma)=(\varphi\gamma,\psi\delta).$$

Доказательство. Если x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{\mathfrak{d}\gamma,\mathfrak{d}\gamma}$, то в силу предложений 3.15, 3.29, 3.23 и 3.20 имеем

$$(\varphi L_{A,B},\psi R_{A,B})(\gamma,\delta)x=(\varphi L_{A,B},\psi R_{A,B})(\gamma x,\delta x)=(\varphi L_{A,B},\psi R_{A,B})(I_A,\delta x_A)\gamma x$$
$$=(\varphi,\psi R_{A,B}(I_A,\delta x_A))\gamma x=(\varphi,\psi\delta x_A)\gamma x=(\varphi\gamma x,\psi\delta x)=(\varphi\gamma,\psi\delta)x.$$

Отсюда следует истинность первого из написанных двух равенств. Истинность второго доказывается аналогичным образом.

Для любых φ и ψ обозначим через $(\varphi\times\psi)$ морфизм $(\varphi L_{\mathfrak{d}\varphi,\mathfrak{d}\psi},\psi R_{\mathfrak{d}\varphi,\mathfrak{d}\varphi})$. Очевидно, что $(\varphi\times\psi):\mathfrak{d}\varphi\times\mathfrak{d}\psi\to\mathfrak{r}\varphi\times\mathfrak{r}\psi$. Из предложения 3.31 сразу вытекает

Предложение 3.32. *Если* $\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{r}\sigma$ *и* $\mathfrak{d}\psi=\mathfrak{r}\varrho$, *то справедливо равенство* $(\varphi\times\psi)(\sigma\times\varrho)=(\varphi\sigma\times\psi\varrho)$.

Докажем теперь одно утверждение, в которое входят обе операции Π и Σ.

Предложение 3.33. *Если* $\mathfrak{d}\chi=\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi=\mathfrak{d}\theta$, $\mathfrak{r}\chi=P$ *и* $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}\psi$, *то*

$$((\chi\supset\varphi,\ \psi),\ \theta)=(\chi\supset(\varphi,\ \theta),\ (\psi,\ \theta)),\ (\theta,\ (\chi\supset\varphi,\ \psi))=(\chi\supset(\theta,\ \varphi),\ (\theta,\ \psi)).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{d}\chi=A$, $\mathfrak{r}\varphi=B$. Если x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{A,A}$, то в силу предложения 3.15 имеем

$$((\chi\supset\varphi,\ \psi),\ \theta)x=((\chi\supset\varphi,\ \psi)x,\ \theta x)=(I_B,\ \theta x_B)(\chi\supset\varphi,\ \psi)x=(I_B,\ \theta x_B)(\chi x\supset\varphi x,\ \psi x)$$

$$=(\chi x\supset(I_B,\ \theta x_B)\varphi x,\ (I_B,\ \theta x_B)\psi x)=(\chi x\supset(\varphi x,\ \theta x),\ (\psi x,\ \theta x))=(\chi\supset(\varphi,\ \theta),\ (\psi,\ \theta))x.$$

Отсюда следует истинность первого из написанных равенств. Истинность второго доказывается аналогичным образом.

При помощи предложения 3.33 докажем одно утверждение, в которое операция Π не входит.

Предложение 3.34. *Если* $\mathfrak{d}x=\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi=\mathfrak{r}\theta$, $\mathfrak{d}\chi=\mathfrak{r}x$, $\mathfrak{r}\chi=P$ *и* $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}\psi$, *то* $(\chi x\supset\varphi,\ \psi)\theta=(\chi x_{\mathfrak{d}\theta}\supset\varphi\theta,\ \psi\theta)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{d}x=\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi=A$, $\mathfrak{d}\chi=\mathfrak{r}x=B$, $\mathfrak{r}\chi=P$ и $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}\psi$. Обозначим через τ морфизм $(L_{P,A}\supset\varphi R_{P,A},\ \psi R_{P,A})$. Докажем, что для любого морфизма θ, удовлетворяющего условию $\mathfrak{r}\theta=A$, справедливо равенство

$$\tau((\chi\supset T_B,\ F_B)x,\ I_A)\theta=(\chi x_{\mathfrak{d}\theta}\supset\varphi\theta,\ \psi\theta).$$

В самом деле, если $\mathfrak{r}\theta=A$ и $\mathfrak{d}\theta=C$, то

$$\tau((\chi\supset T_B,\ F_B)x,\ I_A)\theta=\tau((\chi\supset T_B,\ F_B)x_C,\ \theta)=\tau((\chi x_C\supset T_Bx_C,\ F_Bx_C),\ \theta)$$

$$=\tau(\chi x_C\supset(T_Bx_C,\ \theta),\ (F_Bx_C,\ \theta))=\tau(\chi x_C\supset(T_Bx,\ I_A)\theta,\ (F_Bx,\ I_A)\theta)$$

$$=(\chi x_C\supset\tau(T_Bx,\ I_A)\theta,\ \tau(F_Bx,\ I_A)\theta),$$

однако в силу предложений 3.9, 3.24, 3.28, 3.23 и 3.13 имеем

$$\tau(T_Bx,\ I_A)=\tau(T_A,\ I_A)=(L_{P,A}(T_A,\ I_A)\supset\varphi R_{P,A}(T_A,\ I_A),\ \psi R_{P,A}(T_A,\ I_A))=(T_A\supset\varphi,\ \psi)=\varphi$$

и аналогичным образом получаем, что $\tau(F_Bx,\ I_A)=\psi$. Написанное выше вспомогательное равенство таким образом доказано. Взяв I_A в качестве θ, получаем, что множитель $\tau((\chi\supset T_B,\ F_B)x,\ I_A)$ перед θ в левой части этого равенства равняется морфизму $(\chi x_A\supset\varphi,\ \psi)$. Однако $x_A=x$ в силу предложения 3.6 и, следовательно, упомянутый множитель совпадает с морфизмом $(\chi x\supset\varphi,\ \psi)$. Предложение доказано.

Тождества из предложений 3.29, 3.30 и 3.31 имеют свои аналоги, касающиеся операции Σ. Приведем эти аналоги.

Предложение 3.35. *Пусть* $\mathfrak{d}\chi=\mathfrak{d}\gamma=A$, $\mathfrak{r}\chi=P$, $\mathfrak{r}\gamma=B$, $\mathfrak{d}\sigma=\mathfrak{d}\varrho=A\times B$, $\mathfrak{r}\sigma=\mathfrak{r}\varrho$. *Тогда*

$$(\chi L_{A,B}\supset\sigma,\ \varrho)(I_A,\ \gamma)=(\chi\supset\sigma(I_A,\ \gamma),\ \varrho(I_A,\ \gamma)).$$

Доказательство. Если x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{A,A}$ то при помощи предложений 3.14, 3.24, 3.28, 3.3 и 3.34 получаем

$$(\chi L_{A,B}\supset\sigma,\ \varrho)(I_A,\ \gamma)x=(\chi L_{A,B}\supset\sigma,\ \varrho)(I_Ax,\ \gamma x)=(\chi L_{A,B}\supset\sigma,\ \varrho)(x_B,\ I_B)\gamma x$$

$$=(\chi L_{A,B}(x_B,\ I_B)\supset\sigma(x_B,\ I_B),\ \varrho(x_B,\ I_B))\gamma x=(\chi x_B\supset\sigma(x_B,\ I_B),\ \varrho(x_B,\ I_B))\gamma x$$

$$=(\chi(x_B)_A\supset\sigma(x_B,\ I_B)\gamma x,\ \varrho(x_B,\ I_B)\gamma x)=(\chi x\supset\sigma(x,\ \gamma x),\ \varrho(x,\ \gamma x))=(\chi\supset\sigma(I_A,\ \gamma),\ \varrho(I_A,\ \gamma))x$$

Предложение 3.36. *Пусть* $\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi=\mathfrak{d}\gamma=A$, $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}\psi$, $\mathfrak{r}\gamma=B$, $\mathfrak{d}\pi=A\times B$, $\mathfrak{r}\pi=P$. *Тогда* $(\pi\supset\varphi L_{A,B},\ \psi L_{A,B})(I_A,\gamma)=(\pi(I_A,\gamma)\supset\varphi,\ \psi)$.

Доказательство. Если x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{A,A}$, то при помощи предложений 3.14, 3.24, 3.28, 3.3 и 3.21 получаем

$$(\pi\supset\varphi L_{A,B},\ \psi L_{A,B})(I_A,\gamma)x=(\pi\supset\varphi L_{A,B},\ \psi L_{A,B})(I_Ax,\gamma x)=(\pi\supset\varphi L_{A,B},\psi L_{A,B})(x_B,I_B)\gamma x$$

$$=(\pi(x_B,I_B)\supset\varphi L_{A,B}(x_B,I_B),\ \psi L_{A,B}(x_B,I_B))\gamma x=(\pi(x_B,I_B)\supset\varphi x_B,\ \psi x_B)\gamma x$$

$$=(\pi(x_B,I_B)\gamma x\supset\varphi(x_B)_A,\ \psi(x_B)_A)=(\pi(x,\gamma x)\supset\varphi x,\ \psi x)=(\pi(I_A,\gamma)\supset\varphi,\psi)x.$$

Предложение 3.37. *Пусть* $\mathfrak{d}\chi=\mathfrak{d}\gamma=A$, $\mathfrak{r}\chi=P$, $\mathfrak{r}\gamma=B$, $\mathfrak{d}\sigma=\mathfrak{d}\varrho=B\times A$ $\mathfrak{r}\sigma=\mathfrak{r}\varrho$. *Тогда* $(\chi R_{B,A}\supset\sigma,\varrho)(\gamma,I_A)=(\chi\supset\sigma(\gamma,I_A),\ \varrho(\gamma,I_A))$.

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 3.35.

Предложение 3.38. *Пусть* $\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi=\mathfrak{d}\gamma=A$, $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}\psi$, $\mathfrak{r}\gamma=B$, $\mathfrak{d}\pi,=B\times A$, $\mathfrak{r}\pi=P$. *Тогда* $(\pi\supset\varphi R_{B,A},\ \psi R_{B,A})(\gamma,I_A)=(\pi(\gamma,I_A)\supset\varphi,\ \psi)$.

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 3.36.

Предложение 3.39. *Пусть* $\mathfrak{d}\chi=\mathfrak{r}\gamma=A$, $\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi=\mathfrak{r}\delta=B$, $\mathfrak{r}\chi=P$, $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}\psi$ $\mathfrak{r}\gamma=\mathfrak{d}\delta$. *Тогда*

$$(\chi L_{A,B}\supset\varphi R_{A,B},\ \psi R_{A,B})(\gamma,\delta)=(\chi\gamma\supset\varphi\delta,\ \psi\delta),$$

$$(\chi R_{B,A}\supset\varphi L_{B,A},\ \psi L_{B,A})(\delta,\gamma)=(\chi\gamma\supset\varphi\delta,\ \psi\delta).$$

Доказательство. Если x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{\mathfrak{d}\gamma,\mathfrak{d}\gamma}$, то в силу предложений 3.15, 3.35, 3.23 и 3.21 имеем

$$(\chi L_{A,B}\supset\varphi R_{A,B},\ \psi R_{A,B})(\gamma,\delta)x=(\chi L_{A,B}\supset\varphi R_{A,B},\ \psi R_{A,B})(\gamma x,\delta x)$$

$$=(\chi L_{A,B}\supset\varphi R_{A,B},\ \psi R_{A,B})(I_A,\delta x_A)\gamma x=(\chi\supset\varphi R_{A,B}(I_A,\delta x_A),\ \psi R_{A,B}(I_A,\delta x_A))\gamma x$$

$$=(\chi\supset\varphi\delta x_A,\ \psi\delta x_A)\gamma x=(\chi\gamma x\supset\varphi\delta x,\ \psi\delta x)=(\chi\gamma\supset\varphi\delta,\ \psi\delta)x.$$

Отсюда следует истинность первого из написанных двух равенств. Истинность второго доказывается аналогичным образом.

Закончим этот пункт рассмотрением нескольких тождеств, среди которых встречаются обобщения двух эквивалентностей из [10, с. 55].

Предложение 3.40. *Пусть* $\mathfrak{d}\chi=\mathfrak{d}\sigma=\mathfrak{d}\varrho=\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi$, $\mathfrak{r}\chi=\mathfrak{r}\sigma=\mathfrak{r}\varrho=P$, $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}\psi$. *Тогда справедливо равенство* $((\chi\supset\sigma,\varrho)\supset\varphi,\psi)=(\chi\supset(\sigma\supset\varphi,\psi),(\varrho\supset\varphi,\psi))$.

Доказательство. Если x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{\mathfrak{d}\chi,\mathfrak{d}\chi}$, то в силу предложения 3.16 имеем

$$((\chi\supset\sigma,\varrho)\supset\varphi,\psi)x=((\chi x\supset\sigma x,\ \varrho x)\supset\varphi x,\ \psi x)=(I_P\supset\varphi x_P,\ \psi x_P)(\chi x\supset\sigma x,\ \varrho x)$$

$$=(\chi x\supset(I_P\supset\varphi x_P,\ \psi x_P)\sigma x,\ (I_P\supset\varphi x_P,\ \psi x_P)\varrho x)$$

$$=(\chi x\supset(\sigma x\supset\varphi x,\ \psi x),\ (\varrho x\supset\varphi x,\ \psi x))=(\chi\supset(\sigma\supset\varphi,\ \psi),\ (\varrho\supset\varphi,\ \psi))x.$$

Предложение 3.41. *Пусть* $\mathfrak{d}\chi=\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi=A$, $\mathfrak{r}\chi=P$, $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}\psi$. *Тогда справедливы равенства*

$$((\chi\supset T_A,\ T_A)\supset\varphi,\ \psi)=(\chi\supset\varphi,\ \varphi),\quad ((\chi\supset T_A,\ F_A)\supset\varphi,\ \psi)=(\chi\supset\varphi,\ \psi),$$

$$((\chi\supset F_A,\ T_A)\supset\varphi,\ \psi)=(\chi\supset\psi,\ \varphi),\quad ((\chi\supset F_A,\ F_A)\supset\varphi,\ \psi)=(\chi\supset\psi,\ \psi).$$

Доказательство. Применяем предложения 3.40 и 3.13.

Предложение 3.42. *Пусть* $\mathfrak{d}\chi=\mathfrak{d}\varrho=\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{d}\psi=\mathfrak{d}\theta=\mathfrak{d}\tau$, $\mathfrak{r}\chi=\mathfrak{r}\varrho=P$, $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}\psi=\mathfrak{r}\theta=\mathfrak{r}\tau$. *Тогда*

$$(\chi\supset(\varrho\supset\varphi,\ \psi),\ (\varrho\supset\theta,\ \tau))=(\varrho\supset(\chi\supset\varphi,\ \theta),\ (\chi\supset\psi,\ \tau)).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{d}\chi=A$ и x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{A,A}$. Тогда при помощи предложений 3.41, 3.16 и 3.34 получаем, что

$$\begin{aligned}(\chi\supset(\varrho\supset\varphi,\ \psi),\ (\varrho\supset\theta,\ \tau))x&=(\chi x\supset(\varrho x\supset\varphi x,\ \psi x),\ (\varrho x\supset\theta x,\ \tau x))\\ &=(\chi x\supset((\varrho x\supset T_A,\ F_A)\supset\varphi x,\ \psi x),\ ((\varrho x\supset T_A,\ F_A)\supset\theta x,\ \tau x))\\ &=(\chi x\supset(I_P\supset\varphi x_P,\ \psi x_P)(\varrho x\supset T_A,\ F_A),\ (I_P\supset\theta x_P,\ \tau x_P)(\varrho x\supset T_A,\ F_A))\\ &=\delta(\varrho x\supset T_A,\ F_A)=(\varrho x\supset\delta T_A,\ \delta F_A),\end{aligned}$$

где $\delta=(\chi x_P\supset(I_P\supset\varphi x_P,\ \psi x_P),\ (I_P\supset\theta x_P,\ \tau x_P))$. Однако

$$\begin{aligned}\delta T_A&=(\chi x\supset(I_P\supset\varphi x_P,\ \psi x_P)T_A,\ (I_P\supset\theta x_P,\ \tau x_P)T_A)\\ &=(\chi x\supset(T_A\supset\varphi x,\ \psi x),\ (T_A\supset\theta x,\ \tau x))=(\chi x\supset\varphi x,\ \theta x)=(\chi\supset\varphi,\ \theta)x\end{aligned}$$

и аналогичным образом проверяется, что $\delta F_A=(\chi\supset\psi,\tau)x$. Следовательно,

$$(\chi\supset(\varrho\supset\varphi,\ \psi),\ (\varrho\supset\theta,\ \tau))x=(\varrho x\supset(\chi\supset\varphi,\theta)x,\ (\chi\supset\psi,\tau)x)=(\varrho\supset(\chi\supset\varphi,\ \theta),\ (\chi\supset\psi,\ \tau))x.$$

Теперь остается только воспользоваться произвольностью элемента x.

4. Итеративные комбинаторные структуры. В этом пункте мы дадим одно обобщение понятия итеративного комбинаторного пространства, введенного в [1]. Опять будем предполагать, что дана некоторая комбинаторная структура $\langle K,\ \leq,\ \mathfrak{C},\ \downarrow,\ \times,\ \Pi,\ \mathfrak{L},\ \mathfrak{R},\ P,\ \Sigma,\ T,\ F\rangle$ и будем использовать те же обозначения, как в п. 3.

Если $\psi: A\to B$ и $\mathfrak{M}\subseteq K(A,B)$, то будем называть морфизм ψ объединением множества $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда ψ является мажорантой этого множества и для любого x из $\mathfrak{C}_{A,A}$ и любых α и β, удовлетворяющих условиям $\mathfrak{d}\alpha=A$, $\mathfrak{d}\beta=B$, $\mathfrak{r}\alpha=\mathfrak{r}\beta$, верна импликация

$$\forall\theta(\theta\in\mathfrak{M}\to\beta\theta x\leq\alpha)\ \to\ \beta\psi x\leq\alpha.$$

Замечание. В настоящей работе введенное выше понятие объединения понадобится по существу только для частного случая, когда $A=B$.

Предложение 4.1. *Пусть* $\psi: A\to B$, $\mathfrak{M}\subseteq K(A,\ B)$ *и* ψ *является объединением множества* $\mathfrak{M}$. *Пусть* $\mathfrak{d}\xi=\mathfrak{d}\alpha$, $\mathfrak{r}\xi=A$, $\mathfrak{d}\beta=B$, $\mathfrak{r}\alpha=\mathfrak{r}\beta$ *и морфизм* ξ *является совершенным. Тогда верна импликация*

$$\forall\theta(\theta\in\mathfrak{M}\to\beta\theta\xi\leq\alpha)\ \to\ \beta\psi\xi\leq\alpha.$$

Доказательство. Предположим, что антецедент написанной импликации истинен. Пусть x — произвольный элемент множества $\mathfrak{C}_{A,\mathfrak{d}\xi}$. Тогда $\forall\theta(\theta\in\mathfrak{M}\to\beta\theta\xi x\leq\alpha x)$, причем $\xi x\in\mathfrak{C}_{A,A}$. Поэтому $\beta\psi\xi x\leq\alpha x$. Используя предложение 3.11 и произвольность элемента x, заключаем, что $\beta\psi\xi\leq\alpha$.

Предложение 4.2. *Пусть* $\psi: A\to B$, $\mathfrak{M}\subseteq K(A,B)$ *и* ψ *является объединением множества* $\mathfrak{M}$. *Тогда* ψ *является наименьшим среди элементов множества* $K(A,B)$, *которые мажорируют* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Применяем предложение 4.1, взяв в качестве α произвольный элемент множества $K(A, B)$, мажорирующий $\mathfrak{M}$, а в качестве β и ξ — соответственно морфизмы I_B и I_A.

Из предложения 4.2 видно, что если $\mathfrak{M} \subseteq K(A, B)$, то существует не более одного элемента множества $K(A, B)$, который является объединением множества $\mathfrak{M}$. Заметим, что объекты A и B определяются однозначно из условия $\mathfrak{M} \subseteq K(A, B)$ в случае, когда $\mathfrak{M}$ имеет по крайней мере один элемент, но они могут выбираться произвольно, если $\mathfrak{M} = \varnothing$ — поэтому у пустого множества могут быть много различных объединений, принадлежащих различным множествам $K(A, B)$.

Определим теперь основное для дальнейшего понятие итерации. Пусть морфизмы φ и χ удовлетворяют условиям $\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{r}\varphi = \mathfrak{d}\chi$, $\mathfrak{r}\chi = P$. Итерацией морфизма φ, управляемой морфизмом χ, будем называть каждый элемент ι множества $K(\mathfrak{d}\chi, \mathfrak{d}\chi)$, который удовлетворяет условию $\iota = (\chi \supset I_{\mathfrak{d}\chi}, \iota\varphi)$ и принадлежит любому подмножеству множества $K(\mathfrak{d}\chi, \mathfrak{d}\chi)$, замкнутому относительно отображения $\lambda\theta . (\chi \supset I_{\mathfrak{d}\chi}, \theta\varphi)$ и относительно образования объединений подмножеств (имеются в виду объединения в $K(\mathfrak{d}\chi, \mathfrak{d}\chi)$).

Если рассматриваемая комбинаторная структура имеет вид, указанный в примере 3 п. 3, то введенное понятие итерации эквивалентно понятию итерации в комбинаторном пространстве $\langle \mathfrak{F}, \mathfrak{C}, \Pi, L, R, \Sigma, T, F, \leqq \rangle$ (см. предложение 2 из [3]). Поэтому понятие итерации в комбинаторных структурах может рассматриваться как обобщение понятия итерации в комбинаторных пространствах.

Предложение 4.3. *Пусть $\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{r}\varphi = \mathfrak{d}\chi$, $\mathfrak{r}\chi = P$, а ι — итерация морфизма φ, управляемая морфизмом χ. Тогда ι является наименьшим среди элементов τ множества $K(\mathfrak{d}\chi, \mathfrak{d}\chi)$, удовлетворяющих условию $(\chi \supset I_{\mathfrak{d}\chi}, \tau\varphi) \leqq \tau$.*

Доказательство. Пусть τ — произвольный элемент множества $K(\mathfrak{d}\chi, \mathfrak{d}\chi)$, удовлетворяющий условию $(\chi \supset I_{\mathfrak{d}\chi}, \tau\varphi) \leqq \tau$. Тогда $\iota \leqq \tau$, так как множество $\{\theta : \theta \leqq \tau\}$ замкнуто относительно отображения $\lambda\theta . (\chi \supset I_{\mathfrak{d}\chi}, \theta\varphi)$ и относительно образования объединений подмножеств.

Из предложения 4.3 вытекает единственность итерации морфизма φ, управляемой морфизмом χ, в случае, когда эта итерация существует. Если эта итерация существует, то будем обозначать ее через $[\varphi, \chi]$.

Рассматриваемую комбинаторную структуру будем называть итеративной, если $[\varphi, \chi]$ существует для любых φ и χ, удовлетворяющих условиям $\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{r}\varphi = \mathfrak{d}\chi$, $\mathfrak{r}\chi = P$.

В качестве примеров итеративных комбинаторных структур укажем комбинаторные структуры из примеров 1 и 2 п. 3, а также комбинаторную структуру из примера 3 п. 3 при условии, что комбинаторное пространство $\langle F, \mathfrak{C}, \Pi, L, R, \Sigma, T, F, \leqq \rangle$ итеративно.

Начиная с этого места, мы будем предполагать, что комбинаторная структура $\langle K, \leqq, \mathfrak{C}, \downarrow, \times, \Pi, \mathfrak{L}, \mathfrak{R}, P, \Sigma, T, F \rangle$, которую рассматриваем, является итеративной. Кроме того, будем предполагать, что для любых A и B выбран некоторый элемент $u_{A,B}$ множества $\mathfrak{C}_{A,B}$.

Предложение 4.4. *Для любого x и любого A справедливо равенство $x_A = xu_{A, \mathfrak{d}x}$.*

Доказательство. Применяем предложение 3.4.

Предложение 4.5. *Для любого A справедливо равенство* $I_A = [u_{A,A}, T_A]$.

Доказательство. В силу определения понятия итерации и предложения 3.13 имеем

$$[u_{A,A}, T_A] = (T_A \supset I_A, [u_{A,A}, T_A]u_{A,A}) = I_A.$$

Из предложений 4.4 и 4.5 вытекает, что для любого A морфизм I_A выразим через морфизмы T, $u_{A,A}$ и $u_{A,P}$ при помощи композиции и итерации.

Покажем теперь, что для любых A и B сужение операции Σ на декартовом произведении $K(A, P) \times K(A, B) \times K(A, B)$ выразимо при помощи композиции, Π и итерации через аргументы операции, морфизмы T и F и некоторые морфизмы видов $L_{C,D}$, $R_{C,D}$ и $u_{C,D}$.

Предложение 4.6. *Пусть* $\mathfrak{d}\chi = \mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\psi = A$, $\mathfrak{r}\chi = P$, $\mathfrak{r}\varphi = \mathfrak{r}\psi = B$. *Тогда справедливо равенство*

$$(\chi \supset \varphi, \psi) = R_{A,B} R_{P,A\times B}\, \gamma R_{P,C}\, \delta(\tau\chi, \zeta),$$

где

$$C = P \times (A \times B),$$

$$\gamma = [(T_C, (I_A, \varphi) L_{A,B} R_{P,A\times B}), L_{P,A\times B}],$$

$$\delta = [(T_{P\times C}, (T_{P\times C}, (I_A, \psi) L_{A,B} R_{P,A\times B} R_{P,C})), L_{P,C}],$$

$$\tau = R_{P,P}[(T_{P\times P}, F_{P\times P}), L_{P,P}](I_P, T),$$

$$\zeta = (F_A, (I_A, u_{A,B})).$$

Доказательство. Сперва докажем, что $\tau = (I_P \supset T, F)$. Пусть $\alpha = [(T_{P\times P}, F_{P\times P}), L_{P,P}]$. Тогда $\alpha = (L_{P,P} \supset I_{P\times P}, \alpha(T_{P\times P}, F_{P\times P}))$. Отсюда получаем, что

$$\alpha(T_{P\times P}, F_{P\times P}) = (T_{P\times P} \supset (T_{P\times P}, F_{P\times P}), \alpha(T_{P\times P}, F_{P\times P})^2) = (T_{P\times P}, F_{P\times P}).$$

Следовательно, $\alpha = (L_{P,P} \supset I_{P\times P}, (T_{P\times P}, F_{P\times P}))$ и, значит (в силу предложений 3.24, 3.28, 3.23, 3.26 и 3.6),

$$\tau = R_{P,P}\alpha(I_P, T) = (L_{P,P} \supset R_{P,P}, F_{P\times P})(I_P, T) = (I_P \supset T, F).$$

Из доказанного равенства следует, что $\tau\chi = (\chi \supset T_A, F_A)$. Применяя предложение 3.33, находим, что $(\tau\chi, \zeta) = (\chi \supset (T_A, \zeta), (F_A, \zeta))$. Поэтому

$$R_{A,B} R_{P,A\times B}\, \gamma R_{P,C}\, \delta(\tau\chi, \zeta)$$

$$= (\chi \supset R_{A,B} R_{P,A\times B}\, \gamma R_{P,C}\, \delta(T_A, \zeta), R_{A,B} R_{P,A\times B}\, \gamma R_{P,C}\, \delta(F_A, \zeta))$$

и дело сводится к доказательству равенств

$$R_{A,B} R_{P,A\times B}\, \gamma R_{P,C}\, \delta(T_A, \zeta) = \varphi, \quad R_{A,B} R_{P,A\times B}\, \gamma R_{P,C}\, \delta(F_A, \zeta) = \psi.$$

Положим

$$\varrho = (T_C, (I_A, \varphi) L_{A,B} R_{P,A\times B}), \quad \sigma = (T_{P\times C}, (T_{P\times C}, (I_A, \psi) L_{A,B} R_{P,A\times B} R_{P,C})),$$

так что $\gamma = [\varrho, L_{P,A\times B}]$, $\delta = [\sigma, L_{P,C}]$. На основании определения понятия итерации имеем

$$\gamma=(L_{P,\,A\times B}\supset I_C,\ \gamma\varrho),\quad \delta=(L_{P,C}\supset I_{P\times C},\ \delta\sigma).$$

Однако из предложений 3.14 и 3.10 следует, что

$$\varrho=(T_{A\times B},\ I_{A\times B})(I_A,\ \varphi)L_{A,B}R_{P,\,A\times B},\quad \sigma=(T_C,\ I_C)(T_{P\times C},\ (I_A,\ \psi)L_{A,B}R_{P,\,A\times B}R_{P,C}),$$

а из написанных выше равенств для γ и δ при помощи предложений 3.24, 3.28, 3.23 и 3.13 получаем

$$\gamma(T_{A\times B},\ I_{A\times B})=(T_{A\times B}\supset(T_{A\times B},\ I_{A\times B}),\ \gamma\varrho(T_{A\times B},\ I_{A\times B}))=(T_{A\times B},\ I_{A\times B}),$$

$$\delta(T_C,\ I_C)=(T_C\supset(T_C,\ I_C),\ \delta\sigma(T_C,\ I_C))=(T_C,\ I_C).$$

Следовательно, $\gamma\varrho=\varrho$ и $\delta\sigma=\sigma$, так что $\gamma=(L_{P,\,A\times B}\supset I_C,\ \varrho)$, $\delta=(L_{P,C}\supset I_{P\times C},\sigma)$. Отсюда вытекает, что

$$\gamma(F_{A\times B},\ I_{A\times B})=(F_{A\times B}\supset(F_{A\times B},\ I_{A\times B}),\ \varrho(F_{A\times B},\ I_{A\times B}))$$
$$=\varrho(F_{A\times B},\ I_{A\times B})=(T_{A\times B},\ I_{A\times B})(I_A,\varphi)L_{A,B},$$
$$\delta(F_C,\ I_C)=(F_C\supset(F_C,\ I_C),\ \sigma(F_C,\ I_C))=\sigma(F_C,\ I_C)$$
$$=(T_C,\ I_C)(T_C,\ (I_A,\ \psi)L_{A,B}R_{P,\,A\times B}).$$

Используя доказанные равенства, получаем

$$R_{A,B}R_{P,\,A\times B}\,\gamma P_{P,C}\,\delta(T_A,\ \zeta)=R_{A,B}R_{P,\,A\times B}\,\gamma R_{P,C}\,\delta(T_C,\ I_C)\zeta$$
$$=R_{A,B}R_{P,\,A\times B}\,\gamma R_{P,C}(T_C,\ I_C)\zeta=R_{A,B}R_{P,\,A\times B}\,\gamma\zeta$$
$$=R_{A,B}R_{P,\,A\times B}\,\gamma(F_{A\times B},\ I_{A\times B})(I_A,\ u_{A,B})$$
$$=R_{A,B}R_{P,\,A\times B}(T_{A\times B},\ I_{A\times B})(I_A,\ \varphi)L_{A,B}(I_A,\ u_{A,B})=R_{A,B}(I_A,\ \varphi)=\varphi,$$
$$R_{A,B}R_{P,\,A\times B}\,\gamma R_{P,C}\,\delta(F_A,\ \zeta)=R_{A,B}R_{P,\,A\times B}\,\gamma R_{P,C}\,\delta(F_C,\ I_C)\zeta$$
$$=R_{A,B}R_{P,\,A\times B}\,\gamma R_{P,C}(T_C,\ I_C)(T_C,\ (I_A,\ \psi)L_{A,B}R_{P,\,A\times B})\zeta$$
$$=R_{A,B}R_{P,\,A\times B}\,\gamma(T_A,\ (I_A,\ \psi)L_{A,B}(I_A,\ u_{A,B}))=R_{A,B}R_{P,\,A\times B}\,\gamma(T_A,\ (I_A,\ \psi))$$
$$=R_{A,B}R_{P,\,A\times B}\,\gamma(T_{A\times B},\ I_{A\times B})(I_A,\ \psi)=R_{A,B}R_{P,\,A\times B}(T_{A\times B},\ I_{A\times B})(I_A,\psi)$$
$$=R_{A,B}(I_A,\psi)=\psi.$$

Предложение 4.6 доказано.

Докажем еще, что итерация сводится к своему частному случаю, когда второй из ее аргументов имеет вид $L_{C,D}$ (заметим, что и в найденном выше выражении для Σ участвуют итерации только этого специального вида).

Предложение 4.7. *Пусть* $\mathfrak{d}\varphi=\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{d}\chi=A$ *и* $\mathfrak{r}\chi=P$. *Тогда*

$$[\varphi,\ \chi]=R_{P,A}[(\chi,\ I_A)\varphi R_{P,A},\ L_{P,A}](\chi,\ I_A).$$

Доказательство. Положим $\sigma=(\chi,\ I_A)\varphi R_{P,A}$. Пусть

$$\mathfrak{G}_1=\{\varrho:\varrho\leq R_{P,A}[\sigma,\ L_{P,A}](\chi,\ I_A)\}.$$

Докажем, что $[\varphi,\ \chi]\in\mathfrak{G}_1$. В силу предложения 4.2 множество $\mathfrak{G}_1$ замкнуто относительно образования объединений подмножеств. Поэтому для доказательства того, что $[\varphi, \chi] \in \mathfrak{S}_1$, достаточно доказать, что $(\chi \supset I_A, \varrho\varphi) \in \mathfrak{S}_1$ для любого ϱ из $\mathfrak{S}_1$. Пусть $\varrho \in \mathfrak{S}_1$. Используя предложения 3.18 и 3.39, получаем, что

$$(\chi \supset I_A, \varrho\varphi) \leq (\chi \supset I_A, R_{P,A}[\sigma, L_{P,A}](\chi, I_A)\varphi)$$
$$= (L_{P,A} \supset R_{P,A}, R_{P,A}[\sigma, L_{P,A}](\chi, I_A)\varphi R_{P,A})(\chi, I_A)$$
$$= R_{P,A}(L_{P,A} \supset I_{P\times A}, [\sigma, L_{P,A}]\sigma)(\chi, I_A) = R_{P,A}[\sigma, L_{P,A}](\chi, I_A),$$

т. е. $(\chi \supset I_A, \varrho\varphi) \in \mathfrak{S}_1$. Принадлежность морфизма $[\varphi, \chi]$ множеству $\mathfrak{S}_1$ означает, что

$$[\varphi, \chi] \leq R_{P,A}[\sigma, L_{P,A}](\chi, I_A).$$

Для доказательства неравенства в обратную сторону положим

$$\mathfrak{S}_2 = \{\varrho : \mathfrak{r}\varrho = P \times A \;\&\; R_{P,A}\varrho \leq (L_{P,A} \supset R_{P,A}, [\varphi, \chi]\varphi R_{P,A})\}$$

и докажем, что $[\sigma, L_{P,A}] \in \mathfrak{S}_2$. Это даст нам неравенство

$$R_{P,A}[\sigma, L_{P,A}] \leq (L_{P,A} \supset R_{P,A}, [\varphi, \chi]\varphi R_{P,A}),$$

откуда получим, что

$$R_{P,A}[\sigma, L_{P,A}](\chi, I_A) \leq (L_{P,A} \supset R_{P,A}, [\varphi, \chi]\varphi R_{P,A})(\chi, I_A) = (\chi \supset I_A, [\varphi, \chi]\varphi) = [\varphi, \chi].$$

В силу предложения 4.1 множество $\mathfrak{S}_2$ замкнуто относительно образования объединений подмножеств. Поэтому утверждение, что $[\sigma, L_{P,A}] \in \mathfrak{S}_2$, будет доказано, если мы докажем, что $(L_{P,A} \supset I_{P\times A}, \varrho\sigma) \in \mathfrak{S}_2$ для любого ϱ из $\mathfrak{S}_2$. Пусть $\varrho \in \mathfrak{S}_2$. Тогда

$$R_{P,A}\varrho\sigma \leq (L_{P,A} \supset R_{P,A}, [\varphi, \chi]\varphi R_{P,A})(\chi, I_A)\varphi R_{P,A} = (\chi \supset I_A, [\varphi, \chi]\varphi)\varphi R_{P,A} = [\varphi, \chi]\varphi R_{P,A}.$$

Поэтому

$$R_{P,A}(L_{P,A} \supset I_{P\times A}, \varrho\sigma) = (L_{P,A} \supset R_{P,A}, R_{P,A}\varrho\sigma) \leq (L_{P,A} \supset R_{P,A}, [\varphi, \chi]\varphi R_{P,A}),$$

т. е. $(L_{P,A} \supset I_{P\times A}, \varrho\sigma) \in \mathfrak{S}_2$.

Для дальнейшего будет полезно следующее утверждение:

Предложение. 4.8. *Пусть* $\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\chi = \mathfrak{r}\xi$, $\mathfrak{r}\psi = \mathfrak{d}\xi$, $\mathfrak{r}\chi = P$ *и* $\varphi\xi = \xi\psi$, *причем морфизм* ξ — *совершенный. Тогда справедливо равенство* $[\varphi, \chi]\xi = \xi[\psi, \chi\xi]$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{d}\xi = A$, $\mathfrak{r}\xi = B$. Из равенства $\varphi\xi = \xi\psi$ вытекает, что $\mathfrak{r}\varphi = B$ и $\mathfrak{d}\psi = A$. Поэтому $\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{r}\varphi = \mathfrak{d}\chi = B$ и $\mathfrak{d}\psi = \mathfrak{r}\psi = \mathfrak{d}(\chi\xi) = A$. Так как $\mathfrak{r}\chi = \mathfrak{r}(\chi\xi) = P$, это обеспечивает осмысленность обеих сторон доказываемого равенства. Положим $\mathfrak{S}_1 = \{\varrho : \mathfrak{d}\varrho = B \;\&\; \varrho\xi \leq \xi[\psi, \chi\xi]\}$, $\mathfrak{S}_2 = \{\varrho : \mathfrak{r}\varrho = A \;\&\; \xi\varrho \leq [\varphi, \chi]\xi\}$. Предложение 4.8 будет доказано, если мы докажем, что $[\varphi, \chi] \in \mathfrak{S}_1$ и $[\psi, \chi\xi] \in \mathfrak{S}_2$. Однако в силу предложения 4.1 множества $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ замкнуты относительно образования объединений подмножеств. Поэтому наша цель достигнута, если мы докажем, что $(\chi \supset I_B, \varrho\varphi) \in \mathfrak{S}_1$ для любого ϱ из $\mathfrak{S}_1$ и $(\chi\xi \supset I_A, \varrho\psi) \in \mathfrak{S}_2$ для любого ϱ из $\mathfrak{S}_2$. Пусть сперва $\varrho \in \mathfrak{S}_1$. Тогда в силу предложений 3.28 и 3.18 имеем

$$(\chi \supset I_B, \varrho\varphi)\xi = (\chi\xi \supset \xi, \varrho\varphi\xi) = (\chi\xi \supset \xi, \varrho\xi\psi)$$
$$\leq (\chi\xi \supset \xi, \xi[\psi, \chi\xi]\psi) = \xi(\chi\xi \supset I_A, [\psi, \chi\xi]\psi) = \xi[\psi, \chi\xi],$$

т. е. $(\chi \supset I_B, \varrho\varphi) \in \mathfrak{S}_1$. Предложим теперь, что $\varrho \in \mathfrak{S}_2$. Тогда

$$(\chi\xi\supset I_A, \varrho\psi) = (\chi\xi\supset\xi, \xi\varrho\psi) \leqq (\chi\xi\supset\xi, [\varphi, \chi]\xi\psi)$$

$$= (\chi\xi\supset\xi, [\varphi, \chi]\varphi\xi) = (\chi\supset I_B, [\varphi, \chi]\varphi)\xi = [\varphi, \chi]\xi,$$

т. е. $(\chi\xi\supset I_A, \varrho\psi)\in\mathfrak{E}_2$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторый подкласс класса $\mathrm{Mor}\,K$. Будем называть квази-полиномиальным относительно $\mathfrak{A}$ каждый морфизм, который может быть получен из морфизмов T и F, конечного числа морфизмов видов I_C, $L_{C,D}$, $R_{C,D}$, $u_{C,D}$ и конечного числа элементов класса $\mathfrak{A}$ при помощи конечного числа применений композиции и операций Π и Σ. Будем называть рекурсивным относительно $\mathfrak{A}$ кажды морфизм, который может быть получен из морфизмов T и F, конечного числа морфизмов видов $L_{C,D}$, $R_{C,D}$, $u_{C,D}$ и конечного числа элементов класса $\mathfrak{A}$ при помощи конечного числа применений следующих операций: композиция, Π и итерация (из предложений 4.5 и 4.6 следует, что добавление морфизмов вида I_C к исходным морфизмам и операции Σ к списку допустимых операций не привело бы к изменению объема понятия рекурсивности).

Основной результат, который мы докажем, может быть сформулирован следующим образом:

Теорема о нормальной форме рекурсивных морфизмов. Пусть $\mathfrak{A}\subseteq\mathrm{Mor}\,K$, а φ — морфизм, рекурсивный относительно $\mathfrak{A}$. Тогда φ может быть представлен в виде $\varphi=\gamma[\pi, \chi]\zeta$, где π — морфизм, квази-полиномиальный относительно $\mathfrak{A}$, γ, χ и ζ — морфизмы, квази-полиномиальные относительно $\emptyset$, причем морфизм ζ является совершенным (конечно, подразумеваются равенства $\mathfrak{r}\zeta=\mathfrak{d}\chi=\mathfrak{d}\pi=\mathfrak{r}\pi=\mathfrak{d}\gamma$, $\mathfrak{r}\chi=P$).

Истинность этой теоремы будет следовать непосредственно из истинности доказываемых ниже предложений 4.10, 4.11, 4.13 и 4.15. Интуитивное истолкование морфизмов γ, π, χ и ζ, о которых идет речь в теореме, следующее: ζ описывает ввод данных в некоторое перерабатывающее устройство, π и χ описывают соответственно преобразование, осуществляемое устройством за один шаг, и условие остановки устройства, а γ описывает вывод результата из устройства.

Для доказательства некоторых из упомянутых выше предложений удобно ввести понятия базисной последовательности морфизмов. Этим именем будем называть любую конечную последовательность совершенных морфизмов $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, обладающую следующими двумя свойствами:

а) $\mathfrak{r}\varepsilon_0=\mathfrak{r}\varepsilon_1=\ldots=\mathfrak{r}\varepsilon_m$;

б) для любой последовательности морфизмов $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_m$, удовлетворяющей условиям $\mathfrak{r}\theta_0=\mathfrak{r}\theta_1=\ldots=\mathfrak{r}\theta_m$, $\mathfrak{d}\theta_0=\mathfrak{d}\varepsilon_0$, $\mathfrak{d}\theta_1=\mathfrak{d}\varepsilon_1, \ldots, \mathfrak{d}\theta_m=\mathfrak{d}\varepsilon_m$, существует морфизм θ, квази-полиномиальный относительно $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_m$, для которого верны равенства $\mathfrak{d}\theta=\mathfrak{r}\varepsilon_0=\ldots=\mathfrak{r}\varepsilon_m$, $\theta\varepsilon_0=\theta_0$, $\theta\varepsilon_1=\theta_1, \ldots, \theta\varepsilon_m=\theta_m$.

Если $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ — базисная последовательность морфизмов, причем $\mathfrak{d}\varepsilon_i=A_i$, $i=0, \ldots, m$, и $\mathfrak{r}\varepsilon_0=\ldots=\mathfrak{r}\varepsilon_m=C$, то с интуитивной точки зрения можно считать, что морфизмы $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ описывают кодирование данных типов $A_0, A_1, \ldots, A_m$, где данные берутся вместе с соответствующими метками $0, 1, \ldots, m$, при помощи данных одного и того же типа C. Существование достаточно хороших базисных последовательностей произвольной длины видно из следующего предложения:

Предложение 4.9 *Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_m$ — произвольные элементы класса* $\mathrm{Ob}\,K$. *Тогда существует такая базисная последовательность* *морфизмов* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, *квази-полиномиальных относительно* $\varnothing$, *что* $\mathfrak{d}\varepsilon_0 = A_0$, $\mathfrak{d}\varepsilon_1 = A_1, \ldots, \mathfrak{d}\varepsilon_m = A_m$.

Доказательство. Рассуждаем по индукции. При $m=0$ утверждение тривиально: можем взять $\varepsilon_0 = I_{A_0}$. Допустим, что для некоторого m утверждение верно, и пусть $A_0, \ldots, A_m, A_{m+1}$ — произвольные элементы класса $\mathrm{Ob}\,K$. На основании сделанного допущения находим базисную последовательность $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m$ со свойствами, сформулированными в доказываемом предложении. Пусть $\mathfrak{r}\varepsilon_0 = \ldots = \mathfrak{r}\varepsilon_m = C$. Рассмотрим теперь последовательность $\varepsilon'_0, \ldots, \varepsilon'_m, \varepsilon'_{m+1}$, где

$$\varepsilon'_i = (T_{A_i}, (u_{A_i, A_{m+1}}, \varepsilon_i)), \quad i = 0, \ldots, m,$$

$$\varepsilon'_{m+1} = (F_{A_{m+1}}, (I_{A_{m+1}}, u_{A_{m+1}, C})).$$

Она состоит из совершенных морфизмов, квази-полиномиальных относительно $\varnothing$. При этом $\mathfrak{d}\varepsilon'_i = A_i$, $\mathfrak{r}\varepsilon'_i = P\times(A_{m+1}\times C)$, $i=0, \ldots, m, m+1$. Наконец, пусть $\theta_0, \ldots, \theta_m, \theta_{m+1}$ — произвольные морфизмы, удовлетворяющие условиям $\mathfrak{r}\theta_0 = \ldots = \mathfrak{r}\theta_m = \mathfrak{r}\theta_{m+1}$, $\mathfrak{d}\theta_0 = A_0, \ldots, \mathfrak{d}\theta_m = A_m$, $\mathfrak{d}\theta_{m+1} = A_{m+1}$. В силу свойств последовательности $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m$ находим морфизм τ, квази-полиномиальный относительно $\theta_0, \ldots, \theta_m$, для которого верны равенства $\mathfrak{d}\tau = C$, $\tau\varepsilon_0 = \theta_0, \ldots, \tau\varepsilon_m = \theta_m$. Рассмотрим морфизм

$$\theta = (L_{P, A_{m+1}\times C} \supset \tau R_{A_{m+1}, C} R_{P, A_{m+1}\times C}, \ \theta_{m+1} L_{A_{m+1}, C} R_{P, A_{m+1}\times C}).$$

Он является квази-полиномиальным относительно $\theta_0, \ldots, \theta_m, \theta_{m+1}$ и имеют место равенства $\mathfrak{d}\theta = P\times(A_{m+1}\times C)$, $\theta\varepsilon'_0 = \theta_0, \ldots, \theta\varepsilon'_m = \theta_m$, $\theta\varepsilon'_{m+1} = \theta_{m+1}$.

Замечание. Предложение 4.9 понадобится нам только при $m=2$.

В дальнейшем будем предполагать, что дан некоторый фиксированный подкласс $\mathfrak{A}$ класса $\mathrm{Mor}\,K$. Через $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ будем обозначать класс всех морфизмов φ, представимых в виде $\varphi = \gamma[\pi, \chi]\zeta$, где γ, π, χ и ζ удовлетворяют условиям, сформулированным в теореме о нормальной форме. Нашей целью будет доказательство того, что каждый морфизм, рекурсивный относительно $\mathfrak{A}$, принадлежит классу $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$. Эта цель будет достигнута путем доказательства ряда вспомогательных предложений.

Предложение 4.10. *Все морфизмы, квази-полиномиальные относительно* $\mathfrak{A}$, *принадлежат классу* $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$.

Доказательство. Пусть φ — произвольный морфизм, квази-полиномиальный относительно $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{d}\varphi = A$, $\mathfrak{r}\varphi = B$ и пусть $C = P\times(A\times B)$. Докажем, что $\varphi = \gamma[\pi, \chi]\zeta$, где

$$\gamma = R_{A,B}R_{P, A\times B}, \quad \pi = (T_C, (I_A, \varphi)L_{A,B}R_{P, A\times B}),$$

$$\chi = L_{P, A\times B}, \quad \zeta = (F_A, (I_A, u_{A,B})).$$

Выражение $\gamma[\pi, \chi]\zeta$ имеет смысл, так как $\mathfrak{r}\zeta = \mathfrak{d}\chi = \mathfrak{d}\pi = \mathfrak{r}\pi = \mathfrak{d}\gamma = C$, $\mathfrak{r}\chi = P$. Пусть $\iota = [\pi, \chi]$. Тогда $\iota = (\chi \supset I_C, \iota\pi)$. Из предложений 3.10 и 3.14 вытекает, что $\pi = (T_{A\times B}, I_{A\times B})(I_A, \varphi)L_{A,B}R_{P,A\times B}$, а, с другой стороны, из написанного выше равенства для ι при помощи предложений 3.24, 3.28, 3.23 и 3.13 получаем, что

$$\iota(T_{A\times B}, I_{A\times B}) = (T_{A\times B} \supset (T_{A\times B}, I_{A\times B}), \quad \iota\pi(T_{A\times B}, I_{A\times B})) = (T_{A\times B}, I_{A\times B}).$$

Отсюда следует, что $\iota\pi=\pi$ и, значит, $\iota=(\chi\supset I_C, \pi)$. Поэтому

$$\gamma\iota\zeta=\gamma(\chi\zeta\supset\zeta, \pi\zeta)=\gamma(F_A\supset\zeta, \pi\zeta)=\gamma\pi\zeta=\varphi L_{A,B}R_{P,\,A\times B}\zeta=\varphi.$$

Предложение 4.11. *Если $\varphi_0\in\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$, $\varphi_1\in\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{d}\varphi_1=\mathfrak{r}\varphi_0$, то $\varphi_1\varphi_0\in\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$.*

Доказательство. Пусть при $i=0, 1$ имеем $\varphi_i=\gamma_i[\pi_i, \chi_i]\zeta_i$, где π_i — морфизм, квази-полиномиальный относительно $\mathfrak{A}$, а γ_i, χ_i и ζ_i — морфизмы, квази-полиномиальные относительно $\varnothing$, причем морфизм ζ_i — совершенный и имеют место равенства $\mathfrak{r}\zeta_i=\mathfrak{d}\chi_i=\mathfrak{d}\pi_i=\mathfrak{r}\pi_i=\mathfrak{d}\gamma_i=C_i$, $\mathfrak{r}\chi_i=P$. На основании предложения 4.9 находим такую базисную последовательность ε, η_0, η_1 из морфизмов, квази-полиномиальных относительно $\varnothing$, что $\mathfrak{d}\varepsilon=\mathfrak{d}\eta_0=C_0$, $\mathfrak{d}\eta_1=C_1$. Пусть $\mathfrak{r}\varepsilon=\mathfrak{r}\eta_0=\mathfrak{r}\eta_1=C$. Далее, используя определение понятия базисной последовательности, находим такие морфизмы χ и γ, квази-полиномиальные относительно $\varnothing$, и такой морфизм π, квази-полиномиальный относительно $\mathfrak{A}$, что $\mathfrak{d}\chi=\mathfrak{d}\gamma=\mathfrak{d}\pi=C$, $\chi\varepsilon=\chi\eta_0=F_{C_0}$, $\chi\eta_1=\chi_1$, $\gamma\eta_1=\gamma_1$, $\pi\varepsilon=(\chi_0\supset\eta_1\zeta_1\gamma_0, \eta_0)$, $\pi\eta_0=\varepsilon\pi_0$, $\pi\eta_1=\eta_1\pi_1$. Из написанных равенств видно, что $\mathfrak{r}\pi=C$, $\mathfrak{r}\chi=P$. Пусть $\psi=\gamma[\pi, \chi]\varepsilon\zeta_0$. Очевидно, что $\psi\in\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$. Мы докажем, что $\psi=\varphi_1\varphi_0$. Для этого положим $\iota_0=[\pi_0, \chi_0]$, $\iota_1=[\pi_1, \chi_1]$, $\iota=[\pi, \chi]$. В этих обозначениях доказываемое равенство приобретает вид

$$\gamma\iota\varepsilon\zeta_0=\gamma_1\iota_1\zeta_1\gamma_0\iota_0\zeta_0.$$

Из предложения 4.8 вытекает равенство $\iota\eta_1=\eta_1\iota_1$. Кроме того, $\iota\varepsilon=\iota\pi\varepsilon$ и $\iota\eta_0=\iota\pi\eta_0$, так как $\iota\xi=(\chi\supset I_C, \iota\pi)\xi=(\chi\xi\supset\xi, \iota\pi\xi)$ и $\chi\xi=F_{C_0}$ для $\xi=\varepsilon$ и для $\xi=\eta_0$. Пусть $\mathfrak{G}_0=\{\varrho : \mathfrak{r}\varrho=C_0\ \&\ \eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0\varrho\leqq\iota\varepsilon\}$. Если $\varrho\in\mathfrak{G}_0$, то

$$\eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0(\chi_0\supset I_{C_0}, \varrho\pi_0)=(\chi_0\supset\eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0,\ \eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0\varrho\pi_0)$$

$$\leqq(\chi_0\supset\eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0,\ \iota\varepsilon\pi_0)=(\chi_0\supset\eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0,\ \iota\pi\eta_0)=(\chi_0\supset\iota\eta_1\zeta_1\gamma_0,\ \iota\eta_0)$$

$$=\iota(\chi_0\supset\eta_1\zeta_1\gamma_0, \eta_0)=\iota\pi\varepsilon=\iota\varepsilon.$$

Следовательно, $(\chi_0\supset I_{C_0}, \varrho\pi_0)\in\mathfrak{G}_0$ для любого ϱ из $\mathfrak{G}_0$. Так как множество $\mathfrak{G}_0$ замкнуто относительно образования объединений подмножеств, это позволяет утверждать, что $\iota_0\in\mathfrak{G}_0$, т. е. $\eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0\iota_0\leqq\iota\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\gamma_1\iota_1\zeta_1\gamma_0\iota_0\zeta_0=\gamma\eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0\iota_0\zeta_0\leqq\gamma\iota\varepsilon\zeta_0.$$

Для доказательства неравенства в обратную сторону положим

$$\mathfrak{G}=\{\varrho : \mathfrak{d}\varrho=C\ \&\ \varrho\varepsilon\leqq\eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0\iota_0\ \&\ \varrho\eta_0\leqq\eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0\iota_0\pi_0\ \&\ \varrho\eta_1\leqq\eta_1\iota_1\}.$$

Если $\varrho\in\mathfrak{G}$ и $\varrho'=(\chi\supset I_C, \varrho\pi)$, то

$$\varrho'\varepsilon=(\chi\varepsilon\supset\varepsilon,\ \varrho\pi\varepsilon)=(F_{C_0}\supset\varepsilon,\ \varrho\pi\varepsilon)=\varrho\pi\varepsilon=\varrho(\chi_0\supset\eta_1\zeta_1\gamma_0, \eta_0)=(\chi_0\supset\varrho\eta_1\zeta_1\gamma_0, \varrho\eta_0)$$

$$\leqq(\chi_0\supset\eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0,\ \eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0\iota_0\pi_0)=\eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0(\chi_0\supset I_{C_0}, \iota_0\pi_0)=\eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0\iota_0,$$

$$\varrho'\eta_0=(\chi\eta_0\supset\eta_0,\ \varrho\pi\eta_0)=(F_{C_0}\supset\eta_0,\ \varrho\pi\eta_0)=\varrho\pi\eta_0=\varrho\varepsilon\pi_0\leqq\eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0\iota_0\pi_0,$$

$$\varrho'\eta_1=(\chi\eta_1\supset\eta_1,\ \varrho\pi\eta_1)=(\chi_1\supset\eta_1,\ \varrho\eta_1\pi_1)\leqq(\chi_1\supset\eta_1,\ \eta_1\iota_1\pi_1)=\eta_1(\chi_1\supset I_{C_1}, \iota_1\pi_1)=\eta_1\iota_1.$$

Следовательно, $(\chi\supset I_C, \varrho\pi)\in\mathfrak{G}$ для любого ϱ из $\mathfrak{G}$. В силу замкнутости множества $\mathfrak{G}$ относительно образования объединений подмножеств этим доказано, что $\iota\in\mathfrak{G}$. Значит $\iota\varepsilon\leqq\eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0\iota_0$ и поэтому

$$\gamma\iota\varepsilon\zeta_0\leqq\gamma\eta_1\iota_1\zeta_1\gamma_0\iota_0\zeta_0=\gamma_1\iota_1\zeta_1\gamma_0\iota_0\zeta_0.$$

Предложение 4.12. *Пусть* $\varphi_0 \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$, *а* τ — *морфизм, квази-полиномиальный относительно* $\varnothing$ *и удовлетворяющий условию* $\mathfrak{d}\tau = \mathfrak{d}\gamma_0$. *Тогда* $(\tau, \varphi_0) \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$.

Доказательство. Пусть $\varphi_0 = \gamma_0[\pi_0, \chi_0]\zeta_0$, где π_0 — морфизм, квази-полиномиальный относительно $\mathfrak{A}$, а γ_0, χ_0 и ζ_0 — морфизмы, квази-полиномиальные относительно $\varnothing$, причем морфизм ζ_0 — совершенный, $\mathfrak{r}\chi_0 = P$ и $\mathfrak{r}\zeta_0 = \mathfrak{d}\chi_0 = \mathfrak{d}\pi_0 = \mathfrak{r}\pi_0 = \mathfrak{d}\gamma_0 = C_0$. Пусть $\mathfrak{d}\gamma_0 = A_0$ и пусть $\chi = \chi_0 R_{A_0, C_0}$, $\pi = (L_{A_0, C_0}, \pi_0 R_{A_0, C_0})$, $\gamma = (\tau L_{A_0, C_0}, \gamma_0 R_{A_0, C_0})$. Положим $\psi = \gamma[\pi, \chi](I_{A_0}, \zeta_0)$. Очевидно, что $\psi \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$. Мы докажем, что $\psi = (\tau, \varphi_0)$. Пусть x — произвольный элемент множества $\mathfrak{S}_{C_0, A_0}$. Тогда

$$\chi(x, I_{C_0}) = \chi_0, \quad \pi(x, I_{C_0}) = (x, \pi_0) = (x, I_{C_0})\pi_0, \quad \gamma(x, I_{C_0}) = (\tau x, \gamma_0) = (\tau x_{\mathfrak{r}\gamma_0}, I_{\mathfrak{r}\gamma_0})\gamma_0.$$

Из второго и первого равенства и предложения 4.8 вытекает, что

$$[\pi, \chi](x, I_{C_0}) = (x, I_{C_0})[\pi_0, \chi_0].$$

Поэтому

$$\psi x = \gamma[\pi, \chi](x, \zeta_0 x) = \gamma[\pi, \chi](x, I_{C_0})\zeta_0 x$$
$$= \gamma(x, I_{C_0})[\pi_0, \chi_0]\zeta_0 x = (\tau x_{\mathfrak{r}\gamma_0}, I_{\mathfrak{r}\gamma_0})\varphi_0 x = (\tau x, \varphi_0 x) = (\tau, \varphi_0)x.$$

В силу произвольности элемента x этим равенство $\psi = (\tau, \varphi_0)$ доказано.

Предложение 4.13. *Если* $\varphi_1 \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$, $\varphi_2 \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ *и* $\mathfrak{d}\varphi_1 = \mathfrak{d}\varphi_2$, *то* $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$.

Доказательство. В силу предложения 3.31 справедливо равенство

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (R_{B,A}, \varphi_2 L_{B,A})(I_B, \varphi_1),$$

где $B = \mathfrak{d}\varphi_1$, $A = \mathfrak{r}\varphi_1$. Поэтому принадлежность морфизма (φ_1, φ_2) классу $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ вытекает из предложений 4.10, 4.11 и 4.12.

Предложение 4.14. *Пусть* $\varphi_0 \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$, *а* τ — *морфизм, квази-полиномиальный относительно* $\varnothing$, *причем имеют место равенства* $\mathfrak{d}\gamma_0 = \mathfrak{r}\varphi_0 = \mathfrak{d}\tau$, $\mathfrak{r}\tau = P$. *Тогда* $[\varphi_0, \tau] \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$.

Доказательство. Пусть $\varphi_0 = \gamma_0[\pi_0, \chi_0]\zeta_0$, где γ_0, π_0, χ_0 и ζ_0 удовлетворяют тем же самым условиям, как в доказательстве предложения 4.12. Берем такую базисную последовательность ε_0, ε_1, ε_2 из морфизмов, квази-полиномиальных относительно $\varnothing$, что $\mathfrak{d}\varepsilon_0 = \mathfrak{d}\tau$, $\mathfrak{d}\varepsilon_1 = \mathfrak{d}\varepsilon_2 = C_0$. Пусть $\mathfrak{r}\varepsilon_0 = \mathfrak{r}\varepsilon_1 = \mathfrak{r}\varepsilon_2 = C$. Далее строим такие морфизмы χ и γ, квази-полиномиальные относительно $\varnothing$, и такой морфизм π, квази-полиномиальный относительно $\mathfrak{A}$, что $\mathfrak{d}\chi = \mathfrak{d}\gamma = \mathfrak{d}\pi = C$, $\chi\varepsilon_0 = \tau$, $\chi\varepsilon_1 = \chi\varepsilon_2 = F_{C_0}$, $\gamma\varepsilon_0 = I_{\mathfrak{d}\tau}$, $\pi\varepsilon_0 = \varepsilon_1\zeta_0$, $\pi\varepsilon_1 = (\chi_0 \supset \varepsilon_0\gamma_0, \varepsilon_2)$, $\pi\varepsilon_2 = \varepsilon_1\pi_0$. Из написанных равенств видно, что $\mathfrak{r}\pi = C$, $\mathfrak{r}\chi = P$. Пусть $\psi = \gamma[\pi, \chi]\varepsilon_0$. Очевидно, что $\psi \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$. Мы докажем, что $\psi = [\varphi_0, \tau]$. Положим $\iota_0 = [\pi_0, \chi_0]$, $\iota = [\pi, \chi]$, $\bar{\iota} = [\varphi_0, \tau]$. В этих обозначениях доказываемое равенство приобретает вид $\gamma\iota\varepsilon_0 = \bar{\iota}$, причем $\varphi_0 = \gamma_0\iota_0\zeta_0$. Заметим, что $\iota\varepsilon_1 = \iota\pi\varepsilon_1$ и $\iota\varepsilon_2 = \iota\pi\varepsilon_2$, так как $\iota\varepsilon_i = (\chi \supset I_C, \iota\pi)\varepsilon_i = (\chi\varepsilon_i \supset \varepsilon_i, \iota\pi\varepsilon_i)$ и $\chi\varepsilon_i = F_{C_0}$ для $i = 1, 2$. Пусть

$$\mathfrak{S}_0 = \{\varrho : \mathfrak{r}\varrho = C_0 \;\&\; \iota\varepsilon_0\gamma_0\varrho \leq \iota\varepsilon_1\}.$$

Если $\varrho \in \mathfrak{S}_0$, то

$$\iota\varepsilon_0\gamma_0(\chi_0\supset I_{C_0},\ \varrho\pi_0)=(\chi_0\supset\iota\varepsilon_0\gamma_0,\ \iota\varepsilon_0\gamma_0\varrho\pi_0)\leqq(\chi_0\supset\iota\varepsilon_0\gamma_0,\ \iota\varepsilon_1\pi_0)=(\chi_0\supset\iota\varepsilon_0\gamma_0,\ \iota\pi\varepsilon_2)$$
$$=(\chi_0\supset\iota\varepsilon_0\gamma_0,\ \iota\varepsilon_2)=\iota(\chi_0\supset\varepsilon_0\gamma_0,\ \varepsilon_2)=\iota\pi\varepsilon_1=\iota\varepsilon_1.$$

Следовательно, $(\chi_0\supset I_{C_0},\ \varrho\pi_0)\in\mathfrak{G}_0$ для любого ϱ из $\mathfrak{G}_0$. Вместе с замкнутостью множества $\mathfrak{G}_0$ относительно образования объединений подмножеств это позволяет утверждать, что $\iota_0\in\mathfrak{G}_0$, т. е. $\iota\varepsilon_0\gamma_0\iota_0\leqq\iota\varepsilon_1$. Положим далее $\bar{\mathfrak{G}}=\{\varrho:\mathfrak{r}\varrho=\mathfrak{d}\tau\ \&\ \varepsilon_0\varrho\leqq\iota\varepsilon_0\}$. Множество $\bar{\mathfrak{G}}$ также замкнуто относительно образования объединений подмножеств. Если $\varrho\in\bar{\mathfrak{G}}$, то

$$\varepsilon_0(\tau\supset I_{\mathfrak{d}\tau},\ \varrho\varphi_0)=(\tau\supset\varepsilon_0,\ \varepsilon_0\varrho\varphi_0)\leqq(\tau\supset\varepsilon_0,\ \iota\varepsilon_0\varphi_0)$$
$$=(\tau\supset\varepsilon_0,\ \iota\varepsilon_0\gamma_0\iota_0\zeta_0)\leqq(\tau\supset\varepsilon_0,\ \iota\varepsilon_1\zeta_0)=(\chi\varepsilon_0\supset\varepsilon_0,\ \iota\pi\varepsilon_0)=(\chi\supset I_C,\ \iota\pi)\varepsilon_0=\iota\varepsilon_0.$$

Следовательно, $(\tau\supset I_{\mathfrak{d}\tau},\ \varrho\varphi_0)\in\bar{\mathfrak{G}}$ для любого ϱ из $\bar{\mathfrak{G}}$. Поэтому можно утверждать, что $\bar\iota\in\bar{\mathfrak{G}}$, т. е. $\varepsilon_0\bar\iota\leqq\iota\varepsilon_0$. Для доказательства неравенства в обратную сторону положим

$$\mathfrak{G}=\{\varrho:\mathfrak{d}\varrho=C\ \&\ \varrho\varepsilon_0\leqq\varepsilon_0\bar\iota\ \&\ \varrho\varepsilon_1\leqq\varepsilon_0\bar\iota\gamma_0\iota_0\ \&\ \varrho\varepsilon_2\leqq\varepsilon_0\bar\iota\gamma_0\iota_0\pi_0\}.$$

И это множество замкнуто относительно образования объединений подмножеств. Если $\varrho\in\mathfrak{G}$ и $\varrho'=(\chi\supset I_C,\ \varrho\pi)$, то

$$\varrho'\varepsilon_0=(\chi\varepsilon_0\supset\varepsilon_0,\ \varrho\pi\varepsilon_0)=(\tau\supset\varepsilon_0,\ \varrho\varepsilon_1\zeta_0)\leqq(\tau\supset\varepsilon_0,\ \varepsilon_0\bar\iota\gamma_0\iota_0\zeta_0)$$
$$=\varepsilon_0(\tau\supset I_{\mathfrak{d}\tau},\ \bar\iota\varphi_0)=\varepsilon_0\bar\iota,$$

$$\varrho'\varepsilon_1=(\chi\varepsilon_1\supset\varepsilon_1,\ \varrho\pi\varepsilon_1)=(F_{C_0}\supset\varepsilon_1,\ \varrho\pi\varepsilon_1)=\varrho\pi\varepsilon_1=\varrho(\chi_0\supset\varepsilon_0\gamma_0,\ \varepsilon_2)$$
$$=(\chi_0\supset\varrho\varepsilon_0\gamma_0,\ \varrho\varepsilon_2)\leqq(\chi_0\supset\varepsilon_0\bar\iota\gamma_0,\ \varepsilon_0\bar\iota\gamma_0\iota_0\pi_0)=\varepsilon_0\bar\iota\gamma_0(\chi_0\supset I_{C_0},\ \iota_0\pi_0)=\varepsilon_0\bar\iota\gamma_0\iota_0,$$
$$\varrho'\varepsilon_2=(\chi\varepsilon_2\supset\varepsilon_2,\ \varrho\pi\varepsilon_2)=(F_{C_0}\supset\varepsilon_2,\ \varrho\pi\varepsilon_2)=\varrho\pi\varepsilon_2=\varrho\varepsilon_1\pi_0\leqq\varepsilon_0\bar\iota\gamma_0\iota_0\pi_0.$$

Следовательно, $(\chi\supset I_C,\ \varrho\pi)\in\mathfrak{G}$ для любого ϱ из $\mathfrak{G}$. Этим доказано, что $\iota\in\mathfrak{G}$ и, значит, $\iota\varepsilon_0\leqq\varepsilon_0\bar\iota$. Таким образом мы доказали, что $\iota\varepsilon_0=\varepsilon_0\bar\iota$. Поэтому $\gamma\iota\varepsilon_0=\gamma\varepsilon_0\bar\iota=\bar\iota$.

Предложение 4.15. *Если $\varphi_1\in\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$, $\varphi_2\in\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{d}\varphi_2=\mathfrak{d}\varphi_1=\mathfrak{r}\varphi_1$ и $\mathfrak{r}\varphi_2=P$, то $[\varphi_1,\varphi_2]\in\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$.*

Доказательство. В силу предложения 4.7 справедливо равенство

$$[\varphi_1,\varphi_2]=R_{P,A}[(\varphi_2,\ I_A)\varphi_1R_{P,A},\ L_{P,A}](\varphi_2,\ I_A),$$

где $A=\mathfrak{d}\varphi_1$. Поэтому принадлежность морфизма $[\varphi_1,\varphi_2]$ классу $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ следует из предложений 4.10, 4.11, 4.13 и 4.14.

На этом доказательство теоремы о нормальной форме рекурсивных морфизмов заканчивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Skordev. Recursion theory on iterative combinatory spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 24, 1976, 23—31.
2. Д. Г. Скордев. Комбинаторные пространства и рекурсивность в них. София, 1979 (в печати).
3. D. G. Skordev. Simplification of some definitions in the theory of combinatory spaces. *Доклады БАН*, 30, 1977, 947—950.
4. Д. Г. Скордев. Нормальная форма термов в итеративных комбинаторных пространствах. *Математика и математическое образование.* (Труды Пятой весенней конференции Болг. мат. общества, Габрово, 8—10. IV. 1976 г.), София (в печати).
5. В. П. Петров. Категории пространства. Дипломная работа, Софийский университет, Факультет математики и механики, 1977.
6. Д. Г. Скордев. Некоторые топологические примеры итеративных комбинаторных пространств. *Доклады БАН*, 28, 1975, 1575—1578.
7. Д. Г. Скордев. Некоторые комбинаторные пространства, связанные со сложностью переработки данных. *Доклады БАН*, 29, 1976, 7—10.
8. Д. Г. Скордев. О частичном упорядочении множества $\mathfrak{C}$ в комбинаторных пространствах. *Доклады БАН*, 29, 1976, 151—154.
9. И. Букур, А. Делян у. Введение в теорию категорий и функторов. Москва, 1972.
10. J. McCarthy. A basis for a mathematical theory of computation. In: *Computer Programming and Formal Systems* (editors P. Braffort and D. Hirschberg), Amsterdam, 1963, 33—70.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 25. 10. 1977