Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ ПРОХОДНОЙ БУКВЫ

РАДОСЛАВ Д. ПАВЛОВ

При решении проблемы тождества и сопряженности в теории групп П. С. Новиков ввел и использовал т. наз. группы с правильной системой проходных букв (известные еще как HNN-группы). В настоящей работе вводятся и исследуются группы с правильной системой квазипроходных букв и группы с правильной системой квазиустойчивых букв. Для этих групп доказываются свойства, аналогичные свойствам групп с правильной системой проходных букв.

1. Введение. При решении проблемы тождества и сопряженности в теории групп П. С. Новиков [1; 2] ввел и использовал т. наз. группы с правильной системой проходных букв (известные еще как HNN-группы, так как эта конструкция впервые была введена Г. Хигменом, Б. Нейманом и Х. Нейманом [3] при исследовании вопроса о вложимости произвольной счетной группы в группу с двумя образующими). Эта конструкция оказалась весьма плодотворной, широко применялась в исследованиях по алгоритмическим проблемам теории групп [4; 5; 6], исследовалась дальше и обобщалась [5; 6; 7].

Пусть задана группа

$$\Gamma = \ll s_1, \ldots, s_n, a_1, \ldots, a_r; \quad R_1 = 1, \ldots, R_m = 1,$$
$$A_{i,1}a = a_i B_{i,1}, \ldots, \quad A_{i,k_i} a_i = a_i B_{i,k_i} (i = 1, \ldots, r) \gg,$$

где слова $R_1, \ldots, R_m, A_{i,j}, B_{i,j}$ не содержат букв $a_1^{\pm 1}, \ldots, a_r^{\pm 1}$. В этом случае говорят, что $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ является системой проходных букв в группе Γ, а группу

$$\bar{\Gamma} = \ll s_1, \ldots, s_n; R_1 = 1, \ldots, R_m = 1 \gg$$

называют основанием группы Γ по системе проходных букв A.

Система проходных букв A группы Γ называется правильной, а группа Γ — HNN-группой, если для каждого $i (i = 1, \ldots, r)$ соответствие L_{a_i}:

$$\begin{array}{ccc} A_{i,1} & \text{———} & B_{i,1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{i,k_i} & \text{———} & B_{i,k_i} \end{array}$$

осуществляет изоморфное отображение подгрупп, порожденных, соответственно, левыми и правыми частями L_{a_i} в группе $\bar{\Gamma}$.

В работах [1; 2] П. С. Новиковым доказана следующая лемма об исключении вставок правильных проходных букв.

Лемма. *Пусть в группе Γ система проходных букв A правильна. Тогда, если $X \overset{\Gamma}{=} Y$ и в слове Y не входят отрицательные буквы $a_1^{-1}, \ldots,$*

a_r^{-1}, то X можно перевести в Y последовательностью элементарных преобразований группы Γ без вставок букв $a_1, \ldots, a_r$.

Отсюда, в частности, следует результат, известный как

Лемма П. С. Новикова. *Если в группе Γ система проходных букв A правильна, то группа $\overline{\Gamma}$ является подгруппой группы Γ.*

В работах [4; 8] С. И. Адян при исследовании проблемы изоморфизма фиксированной группы построил группы $\mathfrak{A}_{q, A, B}$, среди определяющих соотношений которых содержатся следующие соотношения: $q_{n-1}q_n = q_n a_{n-1}$, $a_n q_n = q_n a_n q_n^{-1} B A^{-1}$. Букву q_n С. И. Адян назвал квазипроходной буквой и показал, что в $\mathfrak{A}_{q, A, B}$ для q_n имеет место результат, аналогичный лемме П. С. Новикова об исключении вставок правильных проходных букв.

В настоящей работе вводятся и исследуются группы с системой и с правильной системой квазипроходных букв и группы с системой и с правильной системой квазиустойчивых букв, в которых обобщаются понятие проходной буквы, введенное С. И. Адяном в [4] и [8] понятие квазипроходной буквы, а также и понятие правильной квазипроходной буквы, введенное автором в [7]. Для групп с правильной системой квазипроходных букв и для групп с правильной системой квазиустойчивых букв доказываются свойства, аналогичные свойствам групп с правильной системой проходных букв. Поскольку доказательства полученных результатов и возможности их обобщения по существу основываются на доказательстве основной леммы работы автора [7], то вариант этого доказательства полностью включен в настоящей работе.

В связи с особенностями квазипроходных и квазиустойчивых букв методы доказательства полученных результатов существенно отличаются от соответствующих методов для HNN-групп. Здесь используется весьма общий метод доказательства в комбинаторной теории групп, идущий от П. С. Новикова [1; 2] и С. И. Адяна [8], связанный с анализом поведения индивидуальностей некоторых букв в преобразованиях слов в рассматриваемой группе.

Будем придерживаться обозначений работ [7] и [8]. Все использованные понятия и обозначения, которые не определяются в настоящей работе, можно найти в указанных выше работах или в книге В. Магнуса, А. Карраса и Д. Солитера [9].

2. Группы с системой квазипроходных букв. Рассмотрим группу G следующего вида:

$$G = \ll s_1, \ldots, s_n, a_1, \ldots, a_p; \quad R_1 = 1, \ldots, R_m = 1,$$

$$E_{j,1} a_j = a_j L_{j,1}, \ldots, E_{j, r_j} a_j = a_j L_{j, r_j}, \quad K_{j,1} a_j = a_j M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, K_{j, t_j} a_j = a_j M_{j, t_j} a_j^{l_{j, t_j}} N_{j, t_j}, \quad (j = 1, \ldots, p) \gg.$$

Будем говорить, что в группе G имеется система квазипроходных букв $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$, если целые числа $l_{j,1}, \ldots, l_{j, t_j}$, $j = 1, \ldots, p$, отличны от нуля, а слова $R_1, \ldots, R_m$, $E_{j,1}$, $L_{j,1}, \ldots, E_{j, r_j}$, L_{j, r_j}, $K_{j,1}$, $M_{j,1}$, $N_{j,1}, \ldots, K_{j, t_j}$, M_{j, t_j}, N_{j, t_j}, $j = 1, \ldots, p$, не содержат букв $a_1^{\pm 1}, \ldots, a_p^{\pm 1}$.

Группу $\overline{G} = \ll s_1, \ldots, s_n; \ R_1 = 1, \ldots, R_m = 1 \gg$ будем называть основанием группы G по системе квазипроходных букв A.

Введем также несколько понятий, необходимых для анализа поведения квазипроходных букв в преобразованиях слов в группе G; в разных конкретных случаях эти понятия определялись в работах П. С. Новикова [1; 2] и С. И. Адяна [8].

Прежде всего заметим, что в нетривиальных элементарных преобразованиях группы G можно ограничиться лишь переходами ($j = 1, \ldots, p$)

$$
\begin{gathered}
a_j \longrightarrow E_{j,1}^{-1} a_j L_{j,1} \\
a_j \longrightarrow E_{j,1} a_j L_{j,1}^{-1} \\
\cdots\cdots\cdots \\
a_j \longrightarrow E_{j,r_j}^{-1} a_j L_{j,r_j} \\
a_j \longrightarrow E_{j,r_j} a_j L_{j,r_j}^{-1}
\end{gathered}
$$

(i-преобразования группы G),

$$
\begin{gathered}
a_j \longrightarrow K_{j,1}^{-1} a_j M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1} \\
a_j \longrightarrow K_{j,1} a_j N_{j,1}^{-1} a_j^{-l_{j,1}} M_{j,1}^{-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_j \longrightarrow K_{j,t_j}^{-1} a_j M_{j,t_j} a_j^{l_{j,1}} N_{j,t_j} \\
a_j \longrightarrow K_{j,t_j} a_j N_{j,t_j}^{-1} a_j^{-l_{j,t_j}} M_{j,t_j}^{-1}
\end{gathered}
$$

(ii-преобразования группы G),

$$R_1 = 1, \ldots, R_m = 1,$$

(iii-преобразования группы G).

Обратные для i- и ii-преобразований переходы легко исключаются использованием двойственного перехода и сокращений.

Поэтому в последующих преобразованиях в группе G будут употребляться только i-, ii- и iii-преобразования, вставки и сокращения.

Будем говорить, что квазипроходная буква a_j из левой части некоторого i- или ii-преобразования имеет одинаковую индивидуальность с той буквой a_j из правой части того же преобразования, которая находится левее всех букв a_j правой части. Буквы a_j одинаковой индивидуальности будем обозначать жирным шрифтом: $\boldsymbol{a}_j \longrightarrow K_{j,1}^{-1} \boldsymbol{a}_j M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}$. Об остальных буквах a_j^{σ}, $\sigma = \pm 1$ в следующих ii-преобразованиях

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{a}_j \longrightarrow K_{j,1}^{-1} \boldsymbol{a}_j M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1} \\
\boldsymbol{a}_j \longrightarrow K_{j,1} \boldsymbol{a}_j N_{j,1}^{-1} a_j^{-l_{j,1}} M_{j,1}^{-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{a}_j \longrightarrow K_{j,t_j}^{-1} \boldsymbol{a}_j M_{j,t_j} a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}
\end{gathered}
$$

$$a_j \longrightarrow K_{j,t_j} a_j N_{j,t_j}^{-1} a_j^{-l_{j,t_j}} M_{j,t_j}^{-1}$$

$(j=1, \ldots, p)$ будем говорить, что они непосредственно порождены буквой a_j из левой части соответствующего ii- преобразования, а букву a_j из левой части будем называть порождающей буквой.

Заметим, что буквы $a_1^{-1}, \ldots, a_p^{-1}$ могут быть лишь порожденными, и, что каждая порожденная буква находится правее той индивидуальности, которая ее порождает.

Последовательность $a_j^{(1)}, a_j^{(2)}, a_j^{(3)}, \ldots, a_j^{(r_0)}, a_j^{\sigma}, \sigma=\pm 1$; $(j=1, \ldots, p)$ индивидуальностей буквы a_j, появляющихся в данной последовательности элементарных преобразований группы G, называется наследственной цепочкой букв a_j, порождающей букву a_j^{σ}, если каждая буква a_j в этой цепочке непосредственно порождает следующую.

Если над индивидуальностью a_j совершаются i- и ii-преобразования, получим последовательность элементарных преобразований группы G:

$$a_j \to \cdots \to \alpha(E_{j,1}, \ldots, E_{j,r_j}, K_{j,1}, \ldots, K_{j,t_j}) a_j \alpha^{-1}(L_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots, M_{j,t_j} a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}).$$

В дальнейшем тексте слова, составленные из $E_{j,1}, \ldots, E_{j,r_j}, K_{j,1}, \ldots, K_{j,t_j}$, будем обозначать через α, ξ, $\varkappa$ (без или с индексами), а слова, составленные из $L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots, M_{j,t_j} a_{j,t_j}^{l_j} N_{j,t_j}$ — через β, φ, χ (без или с индексами). Слова, составленные только из $E_{j,1}, \ldots E_{j,r_j}$ или из $L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}$, будем обозначать через γ или γ^{-1} (без или с индексами).

Пусть задана последовательность элементарных преобразований (п. э. п.) группы G:

(1) $$P_1 \to P_2 \to P_3 \to \cdots \to P_k,$$

где P_1 содержит букву a_j. Канонической п. э. п. для (1), связанной с квазипроходной буквой a_j, будем называть п. э. п.

$$P_1 \to P_2' \to P_3' \to \cdots \to P_k,$$

в которой сначала совершаются все i- и ii-преобразования над a_j из (1) в таком же порядке, а потом все остальные элементарные преобразования из (1) в таком же порядке.

Каноническая п. э. п. для (1), связанная с квазипроходной буквой a_j, выглядит следующим образом:

$$P_1 \overline{\underline{\circ}} P_1' a_j P_1'' \to \cdots \to P_1' \alpha(E_{j,1}, \ldots, E_{j,r_j}, K_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, K_{j,t_j}) a_j \alpha^{-1}(L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, M_{j,t_j} a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}) P_1'' \to \cdots \to P_k.$$

Во второй части этой п. э. п. буква a_j может участвовать лишь в сокращении.

Пусть в п. э. п. (1) имеется наследственная цепочка индивидуальностей квазипроходной буквы a_j:

(2) $$a_j^{(1)},\ a_j^{(2)},\ a_j^{(3)},\ \ldots,\ a_j^{(r_0)},\ a_j^{\sigma},\ \sigma=\pm 1,$$

и пусть буква $a_j^{(1)}$ входит в P_1. П. э. п. группы G

$$P_1 \to P_2'' \to P_3'' \to \cdots \to P_k,$$

в которой сначала над $a_j^{(1)}$ совершаются все i- и ii-преобразования из (1), в которых $a_j^{(1)}$ участвует и в таком же порядке, потом совершаются все i- и ii-преобразования из (1), в которых $a_j^{(2)}$ участвует и в таком же порядке и т. д., наконец, совершаются все остальные преобразования из (1) и в таком же порядке, как и в (1), называется канонической последовательностью элементарных преобразований (каноническая п. э. п.) для (1), связанной с наследственной цепочкой (2).

Следующие две леммы утверждают существование канонической п. э. п., связанной с данной индивидуальностью буквы a_j или с данной наследственной цепочкой индивидуальностей буквы a_j.

Лемма 1. *Для любой п. э. п. (1) группы G и любой индивидуальности квазипроходной буквы a_j из P_1 существует каноническая п. э. п., связанная с этой индивидуальностью буквы a_j.*

Лемма 2. *Для любой п. э. п. (1) группы G без вставок буквы a_j и любой индивидуальности квазипроходной буквы a_j^{σ}, $\sigma=\pm 1$, которая порождается в (1), существует каноническая п. э. п., связанная с наследственной цепочкой, порождающей в (1) букву a_j^{σ}.*

Эти две леммы по существу доказаны в работе [7].

Введем следующие обозначения:

$$X_{j,i} \underline{\circ} \begin{cases} M_{j,i}, & \text{если } l_{j,i}>0 \\ N_{j,i}^{-1}, & \text{если } l_{j,i}<0 \end{cases}; \qquad Y_{j,i} \underline{\circ} \begin{cases} N_{j,i}, & \text{если } l_{j,i}>0 \\ M_{j,i}^{-1}, & \text{если } l_{j,i}<0 \end{cases},$$

где $l_{i,j}$ — степенный показатель буквы a_j из определяющего соотношения $K_{j,i}a_j = a_j M_{j,i} a_j^{l_{j,i}} N_{j,i}$ группы G. Если в группе G имеется всего одно соотношение вида $Ka = aMa^lN$, то, обозначив $X_{1,1}$ и $Y_{1,1}$ соответственно через X и Y, имеем

$$X \underline{\circ} \begin{cases} M, & \text{если } l>0 \\ N^{-1}, & \text{если } l<0 \end{cases}; \qquad Y \underline{\circ} \begin{cases} N, & \text{если } l>0 \\ M^{-1}, & \text{если } l<0. \end{cases}$$

Каноническая п. э. п. для 1., связанная с наследственной цепочкой 2., выглядит следующим образом:

$$\sigma=1.\quad P_1 \circ P_1' a_j^{(1)} P_1'' \to \cdots \to P_1' \alpha_1(E_{j,1}, \ldots, E_{j,r_j}, K_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, K_{j,t_j})\, a_j^{(1)} \beta_1(L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots, M_{j,t_j} a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}) P_1''$$

$$\circ\ P_1' \alpha_1 (E_{j,1}, \ldots, E_{i,r_j}, K_{j,1}, \ldots, K_{j,t_j})\, a_j^{(1)} \beta_1'(L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, M_{j,t_j} a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j})\, X_{j,i_1} a_j^{l_1'} a_j^{(2)} a_j^{l_1''} Y_{j,i_1} \beta_1'' (L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, M_{j,t_j}\, a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}) P_2'' \to \cdots \to P_1' \alpha_1 (E_{j,1}, \ldots, E_{j,r_j}, K_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, K_{j,t_j})\, a_j^{(1)}\, \beta_1' (L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1}\, a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, M_{j,t_j}\, a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}) X_{l_{j,i_1}}\, a_j^{l_1'}\, \alpha_2 (E_{j,1}, \ldots, E_{j,r_j}, K_{j,1}, \ldots, K_{j,t_j})\, a_j^{(2)} \ldots \beta_{r_0}' (L_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1}\, a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots, M_{j,t_j}\, a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}) X_{j,i_{r_0}}\, a_j^{l_{r_0}'}\, \alpha_{r_0+1} (E_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, E_{j,r_j}, K_{j,1}, \ldots, K_{j,t_j})\, a_j\, \beta_{r_0+1} (L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1}\, a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, M_{j,t_j}\, a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}) a_j^{l_{r_0}''}\, Y_{j,i_{r_0}} \ldots \beta_2'' (L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1}\, a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, M_{j,t_j}\, a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}) a_j^{l_1''}\, Y_{j,i_1}\, \beta_1'' (L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1}\, a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, M_{j,t_j}\, a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}) P_1'' \to \cdots \to P_k;$$

$$\sigma = -1.\ P_1 \circ P_1' a_j^{(1)} P_1'' \to \cdots \to P_1' \alpha_1 (E_{j,1}, \ldots, E_{j,r_j}, K_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, K_{j,t_j}) a_j^{(1)}\, \beta_1' (L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1}\, a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, M_{j,t_j}\, a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}) X_{j,i_1}\, a_j^{l_1'} \ldots \alpha_{r_0-1} (E_{j,1}, \ldots, E_{j,r_j}, K_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, K_{j,t_j}) a_j^{(r_0-1)} \beta_{r_0-1}' (L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1}\, a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, M_{j,t_j}\, a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j})\, X_{j,i_{r_0-1}}\, a_j^{l_{r_0-1}'}\, \alpha_{r_0} (E_{j,1}, \ldots, E_{j,r_j}, K_{j,1} \ldots, K_{j,t_j})\, a_j^{(r_0)} \beta_{r_0}' (L_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1}\, a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots, M_{j,t_j}\, a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}) Y_{j,i_{r_0}}^{-1}\, a_j^{l_{r_0}'}\, a_j^{-1}\, a_j^{l_{r_0}''} X_{j,i_{r_0}}^{-1}\, \beta_{r_0}'' (L_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1}\, a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots, M_{j,t_j}\, a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}) a_j^{l_{r_0-1}''}\, Y_{j,i_{r_0-1}} \ldots \beta_1'' (L_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots, M_{j,t_j} a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}) P_1'' \to \cdots \to P_k.$$

Отмеченные в этих канонических п. э. п. слова

$$\alpha_{r_0+1} (E_{j,1}, \ldots, E_{j,r_j}, K_{j,1}, \ldots, K_{j,t_j}) \quad \text{и} \quad \beta_{r_0+1}^{-1} (L_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots, M_{j,t_j}\, a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j});$$

$$\alpha_k (E_{j,1}, \ldots, E_{j,r_j}, K_{j,1}, \ldots, K_{j,t_j}) \quad \text{и} \quad [\beta_k' (L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1}\, a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, M_{j,t_j}\, a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}) X_{j,i_k}\, a_j^{l_k'}\, a_j\, a_j^{l_k''}\, Y_{j,i_k} \beta_k'' (L_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots, M_{j,t_j}\, a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j})]^{-1}, \quad (k = 1, \ldots, r_0);$$

$$\alpha_{r_0} (E_{j,1}, \ldots, E_{j,r_j}, K_{j,1}, \ldots, K_{j,t_j}) \quad \text{и} \quad [\beta_{r_0}' (L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1}\, a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, M_{j,t_j} a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}) Y_{j,i_{r_0}}^{-1} a_j^{l'_{r_0}} a_j^{-1} a_j^{l''_{r_0}} X_{j,i_{r_0}}^{-1} \beta''_{r_0}(L_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots, M_{j,t_j} a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j})]^{-1} \quad (\text{при } \sigma = -1),$$

находятся в соответствии L_{a_j}.

Введем следующее понятие индекса произвольной последовательности элементарных преобразований группы G.

Пусть в п. э. п. (1) группы G число всех ii-преобразований

$$a_j \to K_{j,i}^{-1} a_j M_{j,i} a_j^{l_{j,i}} N_{j,i} \quad \text{и} \quad a_j \to K_{j,i} a_j N_{j,i}^{-1} a_j^{-l_{j,i}} M_{j,i}$$

равно $\nu_{j,i}$, а число всех вставок букв $a_1, \ldots, a_p$ равно σ. Тогда индекс п. э. п. (1) равен

$$\sigma + \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{t_j} \nu_{j,i} \cdot | l_{j,i} | \right).$$

Будем пользоваться также следующими двумя леммами.

Лемма 3. *Если $\beta(L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots, M_{j,t_j} a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}) = 1$ в группе $\bar{G} * \langle\langle a_1, \ldots, a_p \rangle\rangle$, где β — произвольное слово, составленное из указанных элементов, то переход*

$$1 \to \cdots \to \beta(L_{j,1}, \ldots, L_{j,r_j}, M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots, M_{j,t_j} a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j})$$

может быть получен лишь элементарными преобразованиями группы $\bar{G}$ и вставками квазипроходных букв $a_1, \ldots, a_p$.

Доказательство этой леммы вполне аналогично доказательству леммы 3 работы [7].

Лемма 4. *Пусть P_1 и P_2 — слова в группе G и пусть в G: $P_1 P_2 \to \cdots \to 1$ с индексом λ и без вставок квазипроходных букв $a_1, \ldots, a_p$. Тогда в группе G можно построить п. э. п.: $P_2 P_1 \to \cdots \to 1$ с индексом λ и без вставок букв $a_1, \ldots, a_p$.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3 § 2, работы [8], хотя в этой работе другое определение индекса п. э. п.

3. Группы с правильной системой квазипроходных букв. Пусть задана группа

$$G = \langle\langle s_1, \ldots, s_n, a_1, \ldots, a_p;\ R_1 = 1, \ldots, R_m = 1,\ E_{j,1} a_j = a_j L_{j,1}, \ldots$$

$$\ldots, E_{j,r_j} a_j = a_j L_{j,r_j},\ K_{j,1} a_j = a_j M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}, \ldots,$$

$$\ldots, K_{j,t_j} a_j = a_j M_{j,t_j} a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j} \quad (j = 1, \ldots, p) \rangle\rangle$$

с системой квазипроходных букв $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$. Определим следующее соответствие L_j слов в свободном произведении $\bar{G} * \langle\langle a_1, \ldots, a_p \rangle\rangle$ группы $\bar{G}$ и свободной группы p-го ранга $\langle\langle a_1, \ldots, a_p \rangle\rangle$:

$$E_{j,1} \text{ ———— } L_{j,1}$$

$$\cdots\cdots$$

$$E_{j,r_j} \text{ ———— } L_{j,r_j}$$

$$K_{j,1} \text{———} M_{j,1} a_j^{l_{j,1}} N_{j,1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_{j,t_j} \text{———} M_{j,t_j} a_j^{l_{j,t_j}} N_{j,t_j}$$

$(j=1,\ldots,p)$.

Систему квазипроходных букв A группы G назовем правильной, если для каждого $j, (j=1,\ldots,p)$ соответствие L_j осуществляет изоморфное отображение подгрупп, порожденных, соответственно, левыми и правыми частями этого соответствия в группе $G*\langle\langle a_1,\ldots,a_p\rangle\rangle$.

Будем говорить, что в группе G выполняется условие свободы для слов $M_{j,1}, N_{j,1},\ldots, M_{j,t_j}, N_{j,t_j}$ $(j=1,\ldots,p)$, если для каждого j $(j=1,\ldots,p)$:

1. $M_{j,1}, N_{j,1},\ldots, M_{j,t_j}, N_{j,t_j}$ — слова бесконечного порядка в группе $\bar{G}$

2. $\langle E_{j,1}, L_{j,1},\ldots, E_{j,r_j}, L_{j,r_j}, K_{j,1}, M_{j,1}, N_{j,1},\ldots, K_{j,t_j}, M_{j,t_j}, N_{j,t_j}\rangle_{\bar{G}} = \langle E_{j,1}, L_{j,1},\ldots, E_{j,r_j}, L_{j,r_j}, K_{j,1},\ldots, K_{j,t_j}\rangle_G * \langle M_{j,1}\rangle_{\bar{G}} * \langle N_{j,1}\rangle_{\bar{G}} * \cdots * \langle M_{j,t_j}\rangle_{\bar{G}} * \langle N_{j,t_j}\rangle_{\bar{G}}$, где через $\langle X_1,\ldots,X_q\rangle_\Gamma$ обозначена подгруппа группы Γ, порожденная словами $X_1,\ldots,X_q$ группы Γ.

Теорема 1. *Пусть в группе G система квазипроходных букв $A=\{a_1,\ldots,a_p\}$ правильна, а в группе $\bar{G}$ выполняется условие свободы для слов $M_{j,1}, N_{j,1},\ldots, M_{j,t_j}, N_{j,t_j}$ $(j=1,\ldots,p)$. Тогда, если $V\overset{G}{=}W$ и в слово W не входят отрицательные буквы $a_1^{-1},\ldots,a_p^{-1}$, то V можно перевести в W последовательностью элементарных преобразований группы G без вставок букв $a_1,\ldots,a_p$.*

Теорему 1 будем доказывать индукцией по индексу λ данного перехода

$$V\rightarrow\cdots\rightarrow W \tag{3}$$

в группе G.

Если $\lambda=0$, утверждение теоремы очевидно, ибо тогда в (3) нет вставок букв $a_1,\ldots,a_p$.

Пусть индекс п. э. п. (3) равен $\lambda=\lambda_0+1$ и допустим, что утверждение теоремы выполнено для всех п. э. п. в группе G с индексом, меньшим или равным λ_0 и удовлетворяющих условия теоремы.

В последующем доказательстве, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что в группе G имеется лишь одна квазипроходная буква a и одно определяющее соотношение вида $Ka=aMa^lN$. Это существенно снизит громоздкость обозначений и доказательства. Если переход от одной квазипроходной буквы a и одного соотношения вида $Ka=aMa^lN$ к нескольким не является очевидным, то такие случаи будем рассматривать отдельно.

Можно считать, что в п. э. п. (3) имеется хотя бы одна вставка букв a. Пусть переход $V_t\rightarrow V_{t+1}$ в п. э. п. (3) есть последняя из вставок букв a.

Возможны следующие два случая: последняя вставка букв a в п. э. п. (3) является правосторонней вставкой (случай А); последняя вставка букв a п. э. п. (3) является левосторонней вставкой (случай Б). Рассмотрим эти два случая.

Случай А (правосторонняя вставка). В этом случае (3) выглядит так:

$$V \to \cdots \to V_i' V_i'' \to V_i' a^{-1} a V_i'' \to \cdots \to W. \tag{4}$$

Буква a^{-1} в слове W не содержится, ибо в W нет отрицательных букв a^{-1}. Так как a^{-1} может участвовать лишь в сокращении, то a^{-1} должна сократиться. Возможны следующие сокращения буквы a^{-1} в п. э. п. 4.: a^{-1} сокращается в (4) с буквой a, которая появляется в (4) слева от нее (случай А.1); a^{-1} сокращается в (4) с той же буквой a, с которой она вставлена в (4) (случай А.2); a^{-1} сокращается в (4) с буквой a, появляющейся в (4) справа от нее и отличной по индивидуальности от той буквы a, с которой буква a^{-1} вставлена (случай А.3). Рассмотрим эти случаи.

Случай А.1. (a^{-1} сокращается в (4) с буквой a, появляющейся в (4) слева от нее).

Последовательность (4) выглядит так:

$$V \to \cdots \to V_i' V_i'' \to V_i' a^{-1} a V_i'' \to \cdots \to V_j' a a^{-1} V_j'' \to V_j' V_j'' \to \cdots \to W.$$

Поскольку буква a^{-1} затрагивается лишь сокращением, получаем следующие независимые переходы в группе G:

$$V \to \cdots \to V_i' V_i''; \; V_i' \to \cdots \to V_j' a; \; a V_i'' \to \cdots \to V_j''; \; V_j' V_j'' \to \cdots \to W.$$

Из них строим новую п. э. п. с индексом λ_0, ибо нет вставки $a^{-1}a$:

$$V \to \cdots \to V_i' V_i'' \to \cdots \to V_j' a V_i'' \to \cdots \to V_j' V_j'' \to \cdots \to W.$$

К этой п. э. п. применяем индуктивное предположение.

Случай А.2. (a^{-1} сокращается в (4) с буквой a, с которой она вставлена в (4)).

В п. э. п. (4) содержится следующая последовательность без вставок букв a:

$$V_i' a^{-1} a V_i'' \to \cdots \to V_j' a^{-1} a V_j'' \to V_j' V_j'' \to \cdots \to W.$$

По лемме 1 для этой п. э. п. существует каноническая п. э. п., связанная с буквой a:

$$V_i' a^{-1} a V_i'' \to \cdots \to V_i' a^{-1} a(E_1, \ldots, E_r, K) a a^{-1}(L_1, \ldots,$$
$$\ldots, L_r, M a^l N) V_i'' \to \cdots \to V_k' a^{-1} a V_k'' \to V_k' V_k'' \to \cdots \to W.$$

В этой п. э. п. буква a^{-1} может участвовать лишь в сокращении. Буква a после канонизации также не участвует ни в каких других элементарных преобразований и может лишь сократиться. Поэтому в группе G имеются следующие независимые переходы без вставок букв a:

$$a \to \cdots \to a(E_1, \ldots, E_r, K) a a^{-1}(L_1, \ldots, L_r, M a^l N);$$
$$a(E_1, \ldots, E_r, K) \to \cdots \to 1;$$
$$a^{-1}(L_1, \ldots, L_r, M a^l N) V_i'' \to \cdots \to V_k'';$$
$$V_i' \to \cdots \to V_k';$$
$$V_k' V_k'' \to \cdots \to W.$$

В начальном слове второго перехода нет букв a и в этом переходе нет вставок букв a. Поэтому $a(E_1, \ldots, E_r, K) \overset{G}{=} 1$. Но буква a — правильная квазипроходная, поэтому, на основании изоморфизма, получаем: $\alpha^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN) = 1$ в $\bar{G} * \langle\langle a \rangle\rangle$. По лемме 3 существует п. э. п.:

$$(5) \qquad 1 \to \cdots \to \alpha^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN),$$

состоящая из элементарных преобразований группы $\bar{G}$ и вставок букв a.

Из определения индекса следует, что индекс п. э. п. (5) не превосходит индекс последовательности $a \to \cdots \to \alpha(E_1, \ldots, E_r, K)a\alpha^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN)$. Используя (5), можно построить новую п. э. п. с индексом не больше λ_0:

$$V \to \cdots \to V_i'V_i'' \to \cdots \to V_i'\alpha^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN)V_i'' \to \cdots$$
$$\cdots \to V_i'V_k'' \to \cdots \to V_k'V_k'' \to \cdots \to W.$$

К этой последовательности применяем индуктивное предположение.

Случай А.3. (a^{-1} сокращается в (4) с буквой a, появляющейся в (4) справа от нее и отличной по индивидуальности от буквы a, с которой a^{-1} вставлена в (4)).

Имеются следующие две возможности: буква a, с которой сокращается a^{-1}, порождается той буквой a, которая вставлена вместе с a^{-1} (случай А.3.1); буква a, с которой сокращается a^{-1}, порождается некоторой буквой a из V_i'' или сама содержится в слове V_i'' (случай А.3.2). Рассмотрим эти случаи.

Случай А.3.1. (буква a, с которой сокращается a^{-1}, порождается той буквой a, с которой a^{-1} вставлена). В п. э. п.: $V_i'a^{-1}aV_i'' \to \cdots \to W$ нет вставок букв a, поэтому для нее можно построить каноническую п. э. п., связанную с наследственной цепочкой, порождающей букву a:

$$V_i'a^{-1}a\,V_i'' \to \cdots \to V_i'a^{-1}\alpha_1 a\beta_1'Xa^{l_1'}\alpha_2 a\beta_2'Xa^{l_2'}\ldots$$
$$\ldots\alpha_{r_1+1}\,a\,\beta_{r_1+1}\,a^{l_{r_1}''}Y\beta_{r_1}''\,a^{l_{r_1}''-1}Y\ldots\beta_1''V_i'' \to \cdots$$
$$\cdots \to V_k'a^{-1}a\,V_k'' \to V_k'V_k'' \to \cdots \to W.$$

После канонизации буква a может лишь сократиться, буква a^{-1} участвует лишь в сокращении, поэтому слово между a^{-1} и a независимо и без вставок букв a переходит в 1, т. е.

$$(6) \qquad \alpha_1 a\beta_1'Xa^{l_1'}\alpha_2 a\beta_2'Xa^{l_2''}\ldots\alpha_{r_1}a\beta_{r_1}'Xa^{l_{r_1}'}\alpha_{r_1+1} \to \cdots \to 1.$$

Заметим, что в начальном слове п. э. п. (6) имеется хотя одна буква a и индекс п. э. п.:

$$(7) \qquad a \to \cdots \to \alpha_1 a\,\beta_1'Xa^{l_1'}\alpha_2\,a\,\beta_2'\,Xa^{l_2'}\ldots\alpha_{r_1+1}a\beta_{r_1+1}a^{l_{r_1}''}\,Y\beta_{r_1}''a^{l_{r_1}''-1}Y\ldots\beta_1''$$

отличен от нуля (иначе a не будет порожденной буквой).

Рассмотрим первое сокращение букв a в п. э. п. (6). Возможны следующие случаи: буква a^{-1}, которая сокращается первой в п. э. п. (6), порождается буквой a, входящей в некотором множителе β_i' начального слова п. э. п. (6) (случай А.3.1.1); буква a^{-1}, которая сокращается первой в (6), порождается буквой a, не входящей в множитель типа β_i' начального слова п. э. п. (6) (случай А.3.1.2); буква a^{-1}, которая сокращается первой в (6), содержится в начальном слове п. э. п. (6). В этом случае она входит в некоторое β'_i, ибо вне слов β'_i все буквы a — положительные (случай A.3.1.3). Рассмотрим эти случаи.

Случай A.3.1.1. (буква a^{-1}, которая сокращается первой в (6), порождается буквой a из некоторого множителя β'_i начального слова (6)). В п. э. п. (6) нет вставок букв a, поэтому для п. э. п. (6) по лемме 2 можно построить каноническую п. э. п., связанную с наследственной цепочкой, порождающей a^{-1}. Пусть начальная буква этой цепочки входит в β'_i. Тогда $\beta'_i \,\underline{\circ}\, \beta' X a^{l'} a a^{l''} Y \beta''$. Каноническая п. э. п. для (6), связанная с наследственной цепочкой, порождающей $\boldsymbol{a}^{-1}$, выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad & \alpha_1 a \beta'_1 X a^{l'_1} \alpha_2 a \beta'_2 X a^{l'_2} \ldots \alpha_i a \beta' X a^{l'} a a^{l''} Y \beta'' X a^{l'_i} \ldots \\
& \ldots \alpha_{r_1} a \beta'_{r_1} X a^{l'_{r_1}} \alpha_{r_1+1} \to \cdots \to \alpha_1 a \beta'_1 X a^{l'_1} \alpha_2 a \beta'_2 X a^{l'_2} \ldots \\
& \ldots \alpha_i a \beta' X a^{l'} \xi_1 a \zeta'_1 X a^{n'_1} \xi_2 a \zeta'_2 X a^{n'_2} \ldots \\
& \ldots \xi''_s K^{\varepsilon} \xi'_s a \zeta'_s Y^{-1} a^{n'_s} \boldsymbol{a}^{-1} a^{n''_s} X^{-1} \zeta''_s a^{n''_{s-1}} Y \ldots \\
& \ldots \zeta''_1 a^{l''} Y \beta'' X a^{l'_i} \alpha_{i+1} a \ldots \beta'_{r_1} X a^{l'_{r_1}} \alpha_{r_1+1} \to \cdots \to 1,
\end{aligned}
$$

где $\varepsilon = -\operatorname{sgn}(l)$, $l \neq 0$.

Рассмотрим все возможные сокращения буквы $\boldsymbol{a}^{-1}$, которая сокращается первой в п. э. п. (6). Возможны следующие сокращения буквы $\boldsymbol{a}^{-1}$: буква $\boldsymbol{a}^{-1}$ сокращается с буквой $\boldsymbol{a}$, находящейся слева от нее (случай A.3.1.1а); буква $\boldsymbol{a}^{-1}$ сокращается с буквой $\boldsymbol{a}$, находящейся справа от нее (случай A.3.1.1б); буква $\boldsymbol{a}^{-1}$ сокращается с буквой $\boldsymbol{a}$, которая порождается буквой a из множителя $\zeta'_s Y^{-1} a^{n'_s}$ (случай A.3.1.1в); буква $\boldsymbol{a}^{-1}$, сокращается с буквой $\boldsymbol{a}$, которая порождается некоторой буквой a, находящейся слева от $\zeta'_s Y^{-1} a^{n'}_s$ (случай A.3.1.1г). Заметим, что буква $\boldsymbol{a}^{-1}$ не может сократиться с буквой $\boldsymbol{a}$ порожденной некоторой буквой $\boldsymbol{a}$, находящейся справа от $\boldsymbol{a}^{-1}$, поскольку между $\boldsymbol{a}^{-1}$ и $\boldsymbol{a}$ появятся новые буквы a и сокращение не будет первым. Рассмотрим эти случаи.

Случай A.3.1.1а. ($\boldsymbol{a}^{-1}$ сокращается с буквой $\boldsymbol{a}$, находящейся левее буквы $\boldsymbol{a}^{-1}$). Рассматриваемое сокращение является первым, поэтому буква a должна быть правее всех букв a из левой стороны и над $\boldsymbol{a}$ могут совершаться лишь i-преобразования (иначе между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}^{-1}$ появятся новые буквы a).

Пусть $\boldsymbol{a}$ входит в ζ'_s. Тогда $\zeta'_s Y^{-1} a^{n'_s} \,\underline{\circ}\, \zeta'_0 X a^{t_1} a Y \gamma^{-1}(L_1, \ldots, L_r) Y^{-1}$. Заменим вторую часть (8) (после порождения $\boldsymbol{a}^{-1}$) канонической п. э. п., связанной с буквой a. В этой п. э. п.: $\boldsymbol{a} \to \cdots \to \gamma_1(E_1, \ldots, E_r) \boldsymbol{a} \gamma_1^{-1}(L_1, \ldots, L_r)$. Учитывая еще, что после канонизации по $\boldsymbol{a}$ буквы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}^{-1}$ могут лишь сократиться, получаем, что слово между ними независимо и без вставок букв a переходит в 1, т. е.

$$\gamma_1^{-1}(L_1, \ldots, L_r)Y\gamma^{-1}(L_1, \ldots, L_r)Y^{-1} \to \cdots \to 1 \tag{9}$$

в группе $\overline{G}$.

На основании условия свободы, имея в виду, что Y — это N или M^{-1}, получаем $\gamma_1^{-1}(L_1, \ldots, L_r) \overset{\overline{G}}{=} 1$ и $\gamma^{-1}(L_1, \ldots, L_r) \overset{G}{=} 1$. В п. э. п. (9) не могут участвовать разные Y, так как иначе переход (9) невозможен на основании условия свободы. Следовательно, $t_1 = -n''_s$.

Но a — правильная квазипроходная буква, и на основании изоморфизма L_a: $\gamma_1(E_1, \ldots, E_r) \overset{G}{=} 1$ и $\gamma(E_1, \ldots, E_r) \overset{\overline{G}}{=} 1$. Используя эти переходы, строим следующие п. э. п.:

$$1 \to \cdots \to K^{\varepsilon}\gamma(E_1, \ldots, E_r)K^{-\varepsilon} \tag{10}$$

с индексом 0 и

$$1 \to \cdots \to Xa^{t_1}\gamma_1(E_1, \ldots, E_r)\, a^{n''_s}X^{-1} \tag{11}$$

с индексом $|t_1| = |l| - 1$.

Учитывая вид слова ζ'_s и соответствующий ему вид слова ξ'_s, получаем, что каноническая п. э. п. для второй части (8), связанная с буквой a, выглядит так:

$$\alpha_1 a\beta'_1 Xa^{l'_1} \ldots \alpha_i a\beta' Xa^{l'}\xi_1 a\zeta_1 Xa^{n'_1}\xi_2 a\zeta'_2 Xa^{n'_2} \ldots$$

$$\ldots \xi''_s K^{\varepsilon}\gamma(E_1, \ldots, E_r)K^{-\varepsilon}\xi'_0 a\zeta'_0 aXa^{t_1} aY\gamma^{-1}(L_1, \ldots, L_r)Y^{-1}a^{-1}a^{n''_s}X^{-1}\zeta''_s \ldots$$

$$\ldots \zeta''_1 a^{l'''}Y\beta''Xa^{l'_i}\alpha_{i+1}a \ldots \beta'_{r_1}Xa^{l'_{r_1}}\alpha_{r_1+1} \to \cdots \to \alpha_1 a\beta'_1 Xa^{l'_1} \ldots$$

$$\ldots \xi''_s K^{\varepsilon}\gamma(E_1, \ldots, E_r)K^{-\varepsilon}\xi'_0\, a\zeta'_0 Xa^{t_1}\gamma_1(E_1, \ldots, E_r)\, a\,\gamma_1^{-1}(L_1, \ldots$$

$$\ldots, L_r)Y\gamma^{-1}(L_1, \ldots, L_r)Y^{-1}a^{-1}a^{n''_s}X^{-1}\zeta''_s \ldots \zeta''_1 a^{l'''}Y\beta''Xa^{l'_i}\alpha_{i+1}a \ldots$$

$$\ldots \alpha_{r_1} a\beta'_{r_1} Xa^{l'_{r_1}}\alpha_{r_1+1} \to \cdots \to 1.$$

Используя вторую часть этой канонической п. э. п. после сокращения a и a^{-1} и переходы (10) и (11), можно построить новую п. э. п.:

$$\alpha_1 a\beta'_1 Xa^{l'_1} \ldots \alpha_i a\beta' Xa^{l'} aa^{l'''}Y\beta''Xa^{l'_i} \ldots \alpha_{r_1} a\beta'_{r_1} Xa^{l'_{r_1}}\alpha_{r_1+1} \to \cdots$$

$$\cdots \to \alpha_1 a\beta'_1 Xa^{l'_1} \ldots \alpha_i a\beta' Xa^{l'}\xi_1 a\zeta_1 Xa^{n'_1} \ldots \xi''_s\xi'_0 a\zeta'_0\zeta''_s a^{n''_s-1}Y \ldots$$

$$\ldots \zeta''_2 a^{n''_1}Y\zeta''_1 a^{l'''}Y\beta''Xa^{l'_i} \ldots \alpha_{r_1} a\beta'_{r_1} Xa^{l'_{r_1}}\alpha_{r_1+1} \to \cdots \to \alpha_1 a\beta'_1 Xa^{l'_1} \ldots$$

$$\ldots \alpha_i a\beta' Xa^{l'}\xi_1 a\zeta'_1 Xa^{n'_1} \ldots \xi''_s K^{\varepsilon}\gamma(E_1, \ldots, E_r)K^{-\varepsilon}\xi'_0 a\zeta'_0 Xa^{t_1}\gamma_1(E_1, \ldots,$$

$$E_r)\, a^{n''_s}X^{-1}\zeta''_s a^{n''_s-1}Y \ldots \zeta''_2 a^{n''_1}Y\zeta''_1 a^{l'''}Y\beta''Xa^{l''_i} \ldots \alpha_{r_1} a\beta'_{r_1} Xa^{l'_{r_1}}\alpha_{r_1+1} \to \cdots \to 1.$$

В этой последовательности совершается одно ii-преобразование с индексом $|l|$, меньше чем в п. э. п. (8), и это преобразование заменено двумя п. э. п. с индексами 0 и $|l|-1$. Следовательно, эта п. э. п. имеет индекс на 1 меньше, чем (8). Заменяя в (3) последовательность (8) новопостроенной последовательностью, получим п. э. п. с индексом λ_0, к которой уже применимо индуктивное предположение. (Заметим, что в п. э. п. (8) имеются ii-преобразования, иначе $\boldsymbol{a}^{-1}$ не будет порождаться).

Пусть $\boldsymbol{a}$ не входит в ζ'_s. Рассматриваемое сокращение является первым, поэтому буквой $\boldsymbol{a}$ может быть лишь буква a, которая находится между ξ'_s и ζ'_s. При этом слово ζ'_s не содержит букв a, т. е. $\zeta'_s \,\overline{\circ}\, \gamma_s^{-1}(L_1, \ldots, L_r)$, и буква $\boldsymbol{a}$ участвует только в i-преобразованиях.

Для второй части (8) построим каноническую п. э. п., связанную с буквой $\boldsymbol{a}$. После канонизации слово между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}^{-1}$ независимо и без вставок букв a переходит в 1, т. е.

$$\gamma^{-1}(L_1, \ldots, L_r)\,\gamma_s^{-1}(L_1, \ldots, L_r)\,Y^{-1} \overset{\overline{G}}{=} 1,$$

где $\gamma^{-1}(L_1, \ldots, L_r)$ — слово, получающееся при канонизации a. По условию свободы $Y^{-1} \overset{\overline{G}}{=} 1$, что невозможно, ибо M и N — элементы бесконечного порядка в $\overline{G}$.

Случай А. 3. 1. 1б. ($\boldsymbol{a}^{-1}$ сокращается с буквой $\boldsymbol{a}$, находящейся справа от буквы $\boldsymbol{a}^{-1}$).

Рассматриваемое сокращение букв a является первым, поэтому $n''_s = 0$ и буква $\boldsymbol{a}$ должна быть левее всех букв a из правой стороны.

Пусть $\boldsymbol{a}$ входит в ζ''_s. Тогда $a^{n''_s} X^{-1} \zeta''_s \,\overline{\circ}\, X^{-1}\gamma^{-1}(L_1, \ldots, L_r)\, X\boldsymbol{a}\, a^{t_1}\, Y \zeta''_0$, а соответствующее слову ζ''_s слово ξ''_s имеет вид $\xi''_s \,\overline{\circ}\, \xi''_0 K^{-\varepsilon} \gamma(E_1, \ldots, E_r)$, где ξ''_0 находится в соответствии L_a с $(\zeta''_s)^{-1}$, $\varepsilon = -\operatorname{sgn}(l)$.

Поскольку в рассматриваемой последовательности нет вставок букв a то для второй части (8) существует каноническая п. э. п., связанная с буквой $\boldsymbol{a}$, в которой

$$\boldsymbol{a} \to \cdots \to \varkappa(E_1, \ldots, E_r, K)\,\boldsymbol{a}\,\varkappa^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^{\varepsilon}N).$$

После канонизации $\boldsymbol{a}$ буквы $\boldsymbol{a}^{-1}$ и $\boldsymbol{a}$ могут лишь сократиться, поэтому слово между ними независимо и без вставок букв a переходит в (1). Независимо и без вставок букв a переходит в 1 и оставшееся после сокращения слово, т. е.

$$X^{-1}\gamma^{-1}(L_1, \ldots, L_r)X\varkappa(E_1, \ldots, E_r, K) \to \cdots \to 1 \tag{1}$$

в группе $\overline{G}$ и

$$\begin{gathered} \alpha_1 a\beta'_1 Xa^{l'_1} \ldots \alpha_l a\beta' Xa^{l'} \xi_1 \boldsymbol{a} \zeta'_1 Xa^{n'_1} \ldots \xi''_0 K^{-\varepsilon} \gamma(E_1, \ldots, \\ E_r)K^{\varepsilon} \xi'_s a\zeta'_s Y^{-1} a^{n'_s} \varkappa^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^l N)\, a^{t_1}\, Y\zeta''_0 a^{n''_s-1} Y \ldots \\ \ldots \zeta_1 a^{l''} Y\beta'' Xa^{l'_l} \ldots \alpha_{r_1} a\beta'_{r_1} a^{l'_{r_1}} a_{r_1+1} \to \cdots \to 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Из 1), используя условие свободы, получаем: $\gamma^{-1}(L_1, \ldots, L_r) \overset{\overline{G}}{=} 1$; $\varkappa(E_1, \ldots, E_r, K) \overset{\overline{G}}{=} 1$ и что буквы X из 1) должны иметь одинаковые индексы, т. е. они будут из одного и того же определяющего соотношения. Тогда $t_1 = -n'_s$.

Но буква a — правильная квазипроходная буква в группе G, поэтому

$$\gamma(F_1, \ldots, E_r) \overset{G}{=} 1; \ \varkappa^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^tN) = 1 \text{ в } G * \langle\langle a \rangle\rangle.$$

По лемме 3 существует п. э. п. $1 \to \cdots \to \varkappa^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^t N)$, индекс которой равен индексу п. э. п.

$$a \to \cdots \to \varkappa(E_1, \ldots, E_r, K)\, a\varkappa^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^tN).$$

Дальше, действуя как и в случае А. 3. 1. 1a, получаем п. э. п. с меньшим, чем у п. э. п. (3) индексом, к которой применимо индуктивное предположение.

Пусть a не входит в ζ''_s. Имеются две возможности.

Буква a входит в некоторое ζ''_{s-i} (отлично от ζ''_s), или в слово β''. Буква a не может входить в некоторое β'_j правее β'', так как рассматриваемое сокращение не будет первым. Рассуждая как и в случае, когда a входит в ζ''_s, получим вместо п. э. п. 1) следующую п. э. п. в группе $\overline{G}$:

$$X^{-1}\gamma_s^{-1}Y\gamma_{s-1}^{-1}Y \ldots \gamma_{s-r+1}^{-1}Y\gamma_{s-r}^{-1}X\varkappa(E_1, \ldots, E_r, K) \to \cdots \to 1,$$

если a входит в ζ''_{s-r} и

$$X^{-1}\gamma_s^{-1}Y\gamma_{s-1}^{-1}Y \ldots \gamma_2^{-1}Y\gamma_1^{-1}Y\gamma_0''^{-1}X\varkappa(E_1, \ldots, E_r, K) \to \cdots \to 1,$$

если a входит в β''. Применяя условие свободы, получаем, что число слов Y равно 0, что противоречит условию о том, что a находится справа от ζ''_s.

Если в начальном слове входят буквы Y из различных определяющих соотношений, то число вхождений любого из них по условию свободы равняется 0 и снова получаем противоречие.

Буква a входит в некоторое $a^{n''_{s-i}}$, $a^{t''}$, $a^{t'_i}$ или a есть та буква a, которая находится сразу после a_{i+1}. В этом случае после канонизации, имея в виду, что сокращение a^{-1} и a является первым, получаем, что слово между a^{-1} и a независимо и без вставок букв a переходит в 1, т. е.

$$X^{-1}\gamma_s^{-1}Y\gamma_{s-1}^{-1} \ldots Y\gamma_2^{-1}Y\gamma''^{-1}Xa_{i+1}\varkappa(E_1, \ldots, E_r, K) \to \cdots \to 1$$

в группе $\overline{G}$, если a есть та буква, которая находится сразу после a_{i+1},

$$X^{-1}\gamma_s^{-1}Y\gamma_{s-1}^{-1} \ldots Y\gamma_1^{-1}Y\gamma''^{-1}X\varkappa(E_1, \ldots, E_r, K) \to \cdots \to 1$$

в группе $\overline{G}$, если a входит в $a^{t'_i}$,

$$X^{-1}\gamma_s^{-1}Y\gamma_{s-1}^{-1} \ldots Y\gamma_{s-r_1}^{-1}\varkappa(E_1, \ldots, E_r, K) \to \cdots \to 1$$

в группе $\overline{G}$, если a входит в некоторое $a^{n''_{s-r_1-1}}$ или в $a^{t''}$. Из первых двух переходов, на основании условия свободы, получаем, что число слов Y равно

0, что противоречит тем, что $\boldsymbol{a}^{-1}$ порождается. Третий переход также невозможен, ибо по условию свободы $X^{-1} \underset{G}{=} 1$, что невозможно.

Отметим, что, если в определяющих соотношениях G вида $Ka = aMa^lN$ $l = \pm 1$, то все n''_{s-i}, l'' и l'_i будут равны 0, поэтому соответствующие случаи отпадают.

Случай А. 3.1.1в. ($\boldsymbol{a}^{-1}$ сокращается с буквой a, порожденной некоторой буквой a из $\zeta'_s Y^{-1} a^{n'_s}$). Буквы a из $a^{n'_s}$ не могут быть порождающими, ибо $n'_s \leqq 0$. Поскольку рассматриваемое сокращение является первым, то $n'_s = 0$ и порождающая буква a находится правее всех остальных букв a из ζ'_s. Тогда

$$\zeta'_s Y^{-1} a^{n'_s} \overline{\circ} \zeta'_0 X, \; a^{t_1} a^{(1)} Y \gamma^{-1}(L_1, \ldots, L_r) Y^{-1}.$$

Заменим вторую часть п. э. п. (8) канонической п. э. п., связанной с наследственной цепочкой, порождающей букву $\boldsymbol{a}$. После канонизации слово между $\boldsymbol{a}^{-1}$ и a независимо и без вставок букв a переходит в 1, т. е.

$$\varkappa_{h+1}^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN) a^{l''_h} Y \varkappa_h^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN) a^{l''_{h-1}} Y \ldots$$
$$\ldots \varkappa_1^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN) Y \gamma^{-1}(L_1, \ldots, L_r) Y^{-1} \to \cdots \to 1.$$

В этой п. э. п. не должно быть сокращений букв a, ибо $\boldsymbol{a}^{-1}$ и $\boldsymbol{a}$ сокращаются первыми. Поэтому

$$\varkappa_i^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN) \overline{\circ} \gamma_i^{-1}(L_1, \ldots, L_r), \; i = 1, \ldots, h+1; \;\; l_j'' = 0, \; j = 1, \ldots, h.$$

Тогда из условия свободы следует, что число слов Y в начальном слове рассматриваемого перехода равно 0, т. е. $h = 0$. Но это противоречит условию о том, как $\boldsymbol{a}$ порождается.

Случай А. 3. 1. 1г. ($\boldsymbol{a}^{-1}$ сокращается с буквой a, порожденной некоторой буквой a слева от $\zeta'_s Y^{-1} a^{n'_s}$). Сокращение букв $\boldsymbol{a}^{-1}$ и $\boldsymbol{a}$ является первым, поэтому порождающей буквой может быть лишь буква $\boldsymbol{a}$, которая находится между ξ'_s и ζ'_s. Заменим вторую часть (8) канонической п. э. п., связанной с наследственной цепочкой, порождающей букву $\boldsymbol{a}$:

$$(12) \qquad \alpha_1 a \beta'_1 X a^{l'_1} \alpha_2 a \beta'_2 \ldots \alpha_i a \beta' X a^{l'} \xi_1 a \zeta'_1 X a^{n'_1} \xi_2 a \zeta'_2 X a^{n'_2} \ldots$$
$$\ldots \xi''_s K^s \xi'_s a \zeta'_s Y^{-1} a^{n'_s} \boldsymbol{a}^{-1} a^{n''_s} X^{-1} \zeta''_s a^{n''_s - 1} Y \ldots \zeta''_1 a^{l''} Y \beta'' X a^{l'_i} \ldots$$
$$\ldots \alpha_{r_1} a \beta'_{r_1} X a^{l'_{r_1}} \alpha_{r_1+1} \to \cdots \to \alpha_1 a \beta'_1 X a^{l'_1} \alpha_2 a \beta'_2 \ldots \alpha_i a \beta' X a^{l'} \xi_1 a \zeta'_1 X a^{n'_1} \xi_2 a \zeta'_2 X a^{n'_2} \ldots$$
$$\ldots \xi''_s K^s \xi'_s \varkappa_1 a \chi'_1 X a^{m'_1} \ldots \varkappa_{c+1} \boldsymbol{a} \chi_{c+1} a^{m''_c} Y \chi''_c a^{m''_c - 1} Y \ldots$$
$$\ldots \chi''_1 \zeta'_s Y^{-1} a^{n'_s} \boldsymbol{a}^{-1} a^{n''_s} X^{-1} \zeta''_s a^{n''_s - 1} Y \ldots \zeta''_1 a^{l''} Y \beta'' X a^{l'_i} \ldots$$
$$\ldots \alpha_{r_1} a \beta'_{r_1} X a^{l'_{r_1}} \alpha_{r_1+1} \to \cdots \to 1.$$

Во второй части этой п. э. п. буквы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}^{-1}$ могут лишь сократиться, поэтому слово между ними независимо и без вставок букв a переходит в 1. Кроме того, сокращение $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}^{-1}$ является первым и, следовательно, между ними не должно быть букв a, т. е. $n'_s=0$; $m''_i=0$, $i=1,\ldots,c$; $\zeta'_s \circ \gamma^{-1}(L_1,\ldots,L_r)$; $\chi_{c+1} \circ \gamma^{-1}_{c+1}(L_1,\ldots,L_r)$; $\chi''_i \circ \gamma^{-1}_i(L_1,\ldots,L_r)$, $i=1,\ldots,c$.

Поскольку ζ'_s и ξ'^{-1}_s находятся в соответствии L_a, то $\xi'_s \circ \gamma(E_1,\ldots,E_r)$.

Тогда в п. э. п. (12) имеются следующие независимые переходы без вставок букв a:

$$\gamma^{-1}_{c+1}(L_1,\ldots,L_r)\,Y\,\gamma^{-1}_c(L_1,\ldots,L_r)\,Y\ldots \tag{13}$$

$$\ldots\gamma^{-1}_1(L_1,\ldots,L_r)\,\gamma^{-1}(L_1,\ldots,L_r)\,Y^{-1}\to\cdots\to 1$$

(слово между a и $\boldsymbol{a}^{-1}$),

$$\alpha_1 a\beta'_1 Xa^{l'_1}\ldots\alpha_i a\beta' Xa^{l'}\xi_1\boldsymbol{a}\,\zeta'_1 X a^{n'_1}\xi_2 a\zeta'_2 Xa^{n'_2}\ldots\xi''_s K^{\varepsilon}\gamma(E_1,\ldots, \tag{14}$$

$$E_r)\varkappa_1 a\chi'_1 Xa^{m'_1}\ldots\varkappa_{c+1}a^{n''_s}X^{-1}a^{n''_s-1}Y\ldots\alpha_{r_1}a\beta'_{r_1}Xa^{l'_{r_1}}\alpha_{r_1+1}\to\cdots\to 1.$$

Применяя условие свободы к п. э. п. (13), получаем, что $c=1$,

$$\gamma^{-1}_{c+1}(L_1,\ldots,L_r)\overset{G}{=}1,\ \gamma^{-1}_c(L_1,\ldots,L_r)\,\gamma^{-1}(L_1,\ldots,L_r)\overset{G}{=}1.$$

Отсюда следует, что канонизирующая п. э. п. всех i- и ii-преобразований, которая порождает букву a, выглядит так:

$$a\to\cdots\to\varkappa_1 a\chi'_1 X a^{m'_1}\boldsymbol{a}Y\chi''_1\to\cdots\to\varkappa_1 a\chi'_1 X a^{m'_1}\varkappa_2\,\boldsymbol{a}\,\chi_2 Y\chi''_1.$$

Имея в виду, что $\varkappa_1$ находится в соответствии L_a со словом $\chi'_1 Xa^{m'_1}aY\chi''_1$ и что $\chi''_1 \circ \gamma^{-1}_1(L_1,\ldots,L_r)$, получаем, что

$$\varkappa_1 \circ \gamma_1(E_1,\ldots,E_r)\,K^{-\varepsilon}\varkappa_0,\ \varkappa_0 \circ \chi'^{-1}_1(E_1,\ldots,E_r,K).$$

Опять из п.э.п. (13), на основании условия свободы, получаем, что

$$\gamma^{-1}_2(L_1,\ldots,L_r)\overset{G}{=}1,\ \gamma^{-1}_1(L_1,\ldots,L_r)\,\gamma^{-1}(L_1,\ldots,L_r)\overset{G}{=}1\ \ (c=1),$$

а отсюда, используя, что a — правильная квазипроходная буква, получаем

$$\gamma_2(E_1,\ldots,E_r)\overset{G}{=}1,\ \gamma(E_1,\ldots,E_r)\,\gamma_1(E_1,\ldots,E_r)\overset{G}{=}1.$$

По лемме 3 существует п. э. п.:

$$1\to\cdots\to Xa^{m'_1}\gamma_2(E_1,\ldots,E_r)\,a^{n''_s}X^{-1} \tag{15}$$

в группе $G*\langle\langle a\rangle\rangle$ с индексом $|\,l\,|^{-1}$ (если $m'_1+n''_s$, то переход (13) невозможен на основании условия свободы).

Существует также и следующая п. э. п.:

$$1\to\cdots\to K^{\varepsilon}\gamma(E_1,\ldots,E_r)\,\gamma_1(E_1,\ldots,E_r)K^{-\varepsilon} \tag{16}$$

в группе G с индексом 0.

На основании (14), (15), (16), принимая во внимание сделанные уточнения относительно составляющих слов, можно построить следующую п. э. п.:

$$\begin{gathered}
\alpha_1 a \beta_1' X a^{l_1'} \ldots \alpha_i a\beta' X a^{l'} \boldsymbol{a}\, a^{l''} Y \beta'' X a^{l_i'} \ldots \alpha_{r_1} a \beta_{r_1}' X a^{l_{r_1}'} \alpha_{r_1+1} \to \cdots \\
\cdots \to \alpha_1 a \beta_1' X a^{l_1'} \ldots \alpha_i a \beta' X a^{l'} \xi_1 a \zeta_1' X a^{n_1'} \ldots \xi_s'' \varkappa_0 \boldsymbol{a} \chi_1 \zeta_s'' a^{n_s''-1} Y \ldots \\
\ldots \zeta_2'' a^{n_1''} Y \zeta_1'' \boldsymbol{a}^{l''} Y \beta'' X a^{l_i'} \ldots \alpha_{r_1} a \beta_{r_1}' X a^{l_{r_1}'} \alpha_{r_1+1} \to \cdots \to \alpha_1 a \beta_1' X a^{l_1'} \ldots \\
\ldots \alpha_i a \beta' X a^{l'} \xi_1 a \zeta_1' X a^{n_1'} \ldots \xi_s'' K^{\varepsilon} \gamma(E_1, \ldots, E_r) \gamma_1(E_1, \ldots, E_r) K^{-\varepsilon} \varkappa_0 a \chi_1 X a^{m_1'} \gamma_2(E_1, \ldots \\
\ldots, E_r) a^{n_s''} X^{-1} \zeta_s'' a^{n_s''-1} Y \ldots \zeta_2'' a^{n_1''} Y \zeta_1'' a^{l''} Y \beta'' X a^{l_i'} \ldots \alpha_{r_1} a \beta_{r_1}' X a^{l_{r_1}'} \alpha_{r_1+1} \to \cdots \to 1
\end{gathered} \tag{17}$$

В первой части п. э. п. (17) сделали одно ii-преобразование (порождающее букву $\boldsymbol{a}^{-1}$) меньше, чем в первой части п. э. п. (8), и все преобразования из первой части (12). Потом совершили все преобразования из первой части (12). Далее совершили все преобразования из (16) и (15) с общим индексом $l'-1$. В третьей части п. э. п. (17) воспользовались п. э. п. (14). Поскольку (12) имеет одинаковый индекс с второй частью (8), а (13) имеет индекс 0, то п. э. п. (17) имеет индекс на 1 меньше, чем (8). Заменяя в (3) п. э. п. (8) с последовательностью (17), получим п. э. п. с индексом λ_0, к которой применимо индуктивное предположение.

Случай А.3.1.2. (буква $\boldsymbol{a}^{-1}$, которая сокращается первой в (6), порождается буквой a, не входящей в множитель типа β_i' начального слова (6)). В анализе случая А.3.1.1 существенно пользовались тем, что порождающая буква входит в β_i', лишь в случае А.3.1.1б, поэтому остальные случаи из А.3.1.1 прямо переносятся. Если $\boldsymbol{a}$ не входит в некоторое β_i', то a входит в некоторое $a^{l_i'}$ или a находится между α_i и β_i'. Оба случая, однако, рассматриваются вполне аналогично случаю А.3.1.1б.

Случай А.3.1.3. (буква a^{-1}, которая сокращается первой в (6), содержится в начальном слове п. э. п. (6) и входит в некоторое β_i'). В этом случае: $\beta_i' \circ \beta' Y_l^{-1} a^{l'} \boldsymbol{a}^{-1} a^{l''} X^{-1} \beta''$. Возможны следующие сокращения: буква a^{-1} сокращается с буквой $\boldsymbol{a}$, находящейся слева от нее (случай А.3.1.3а); буква $\boldsymbol{a}^{-1}$ сокращается с буквой $\boldsymbol{a}$, находящейся справа от нее (случай А.3.1.3б); буква $\boldsymbol{a}^{-1}$ сокращается с буквой a, порожденной буквой a из $\beta' Y^{-1} a^{l'}$ (случай А.3.1.3в); буква $\boldsymbol{a}^{-1}$ сокращается с буквой a, порожденной буквой a, находящейся слева от $\beta' Y^{-1} a^{l'}$ (случай А.3.1.3г).

Буква $\boldsymbol{a}^{-1}$ не может сократиться с буквой a, порожденной справа от нее, поскольку $\boldsymbol{a}^{-1}$ и a сокращаются первыми.

Случай А.3.1.3а аналогичен случаю А.3.1.1а, поскольку слова слева от $\boldsymbol{a}^{-1}$ имеют в этих случаях одинаковую структуру.

Случай А.3.1.3б на самом деле уже анализировался в случае А.3.1.1б, поскольку при рассмотрении А.3.1.1б мы имели в виду и возможность выхода за пределы порождаемого слова.

Поскольку слова $\beta' Y^{-1} a^{l'}$ и $\zeta_s' Y^{-1} a^{n_s'}$ имеют одинаковую структуру, то случай А.3.1.3в рассматривается вполне аналогично случаю А.3.1.1в.

В случае А.3.1.3г порождающей буквой может быть лишь буква a, находящаяся непосредственно до β'. Между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}^{-1}$ появится слово такой же структуры, как и в случае А.3.1.1г, поэтому этот случай полностью аналогичен случаю А.3 1.1г.

Случай А.3.2. (буква a, с которой сокращается a^{-1}, порождается некоторой буквой a из V_i'' или сама содержится в слове V_i''). В этом случае $V_i'' \underline{\circ} V_{i1}'' a V_{i2}''$. Рассмотрим случай порождения, поскольку случай, когда $\boldsymbol{a}$ содержится в слове V_i'', рассматривается вполне аналогично. Построим каноническую п. э. п. для (4), связанную с наследственной цепочкой, порождающей $\boldsymbol{a}$

$$V_i' a^{-1} a V_{i1}'' a V_{i2}'' \to \cdots \to V_i' a^{-1} \boldsymbol{a} V_{i1}'' \alpha_1 \boldsymbol{a} \beta_1' X a^{l_1'} \ldots$$

$$\ldots \alpha_{r_1+1} \boldsymbol{a} \beta_{r_1+1} a^{l_{r_1}''} Y \beta_{r_1}'' \ldots a^{l_1''} Y \beta_1'' V_{i2}'' \to \cdots \to V_j' \boldsymbol{a}^{-1} \boldsymbol{a} V_j'' \to V_j' V_j'' \to \cdots \to W.$$

После канонизации a^{-1} и a могут лишь сократиться, поскольку в слове W нет отрицательных букв a^{-1}, поэтому получаем следующие независимые переходы без вставок букв a:

$$a \to \cdots \to \alpha_1 a \beta_1' X a^{l_1'} \ldots \alpha_{r_1+1} \boldsymbol{a} \beta_{r_1+1} a^{l_{r_1}''} Y \beta_{r_1}'' \ldots \boldsymbol{a}^{l_1''} Y \beta_1'';$$

$$a V_{i1}'' \alpha_1 a \beta_1' X a^{l_1'} \ldots \alpha_{r_1+1} \to \cdots \to 1; \tag{18}$$

$$\beta_{r_1+1} a^{l_{r_1}''} Y \beta_{r_1}'' \ldots a^{l_1''} Y \beta_1'' V_{i2}'' \to \cdots \to V_j'';$$

$$V_i' \to \cdots \to V_j'$$

$$V_j' V_j'' \to \cdots \to W.$$

Из п.э.п. (18) по лемме 4 получаем следующую п.э.п. с тем же индексом:

$$V_{i1}'' \alpha_1 a \beta_1' X a^{l_1'} \ldots \alpha_{r_1+1} a \to \cdots \to 1. \tag{19}$$

Из п. э. п. (19) и вышеуказанных п. э. п. строим новую п. э. п.

$$V \to \cdots \to V_i' V_{i1}'' a V_{i2}'' \to \cdots \to V_i' V_{i1}'' \alpha_1 a \beta_1' X a^{l_1'} \ldots$$

$$\ldots \alpha_{r_1+1} a \beta_{r_1+1} a^{l_{r_1}''} Y \beta_{r_1}'' \ldots a^{l_1''} Y \beta_1'' V_{i2}'' \to \cdots \to V_i' \beta_{r_1+1} a^{l_{r_1}''} Y \beta_{r_1}'' \ldots$$

$$\ldots a^{l_1''} Y \beta_1'' V_{i2}'' \to \cdots \to V_i' V_j'' \to \cdots \to V_j' V_j'' \to \cdots \to W$$

с индексом λ_0, поскольку в этой п. э. п. нет вставки $\boldsymbol{a}^{-1} a$.

Случай А.3 рассмотрен. Тем самым рассмотрен и случай А.

Случай Б. (последняя вставка букв $\boldsymbol{a}$ в п. э. п. (3) является левосторонней вставкой). Имеем следующую п. э. п.:

$$V \to \cdots \to V_i' V_i'' \to V_i' a \boldsymbol{a}^{-1} V_i'' \to \cdots \to W. \tag{20}$$

В слове W нет букв a^{-1}. Буквы a^{-1} участвуют лишь в сокращениях, поэтому буква a^{-1} должна сократиться в п. э. п. (20). Возможны следующие сокращения буквы a^{-1}: буква a^{-1} сокращается с буквой a, появляющейся в (20) справа от нее (случай Б. 1); буква a^{-1} сокращается в (20) с буквой a той индивидуальности, с которой она вставлена (случай Б.2); буква a^{-1} сокращается в (20) с буквой a, появляющейся слева от нее и отличной по индивидуальности от той буквы a, с которой она вставлена (случай Б.3).

Случай Б.1. (a^{-1} сокращается с буквой a, появляющейся в (20) справа от нее). Как и в случае А.1, из последовательности

$$V \to \cdots \to V_i'V_i'' \to V_i'aa^{-1}V_i'' \to \cdots \to V_j'a^{-1}aV_j'' \to V_j'V_j'' \to \cdots \to W$$

получаем следующие независимые переходы:

$$V \to \cdots \to V_i'V_i''; \quad V_i'a \to \cdots \to V_j'; \quad V_i'' \to \cdots \to aV_j''; \quad V_j'V_j'' \to \cdots \to W.$$

Из них строим следующую п. э. п.:

$$V \to \cdots \to V_i'V_i'' \to \cdots \to V_i'aV_j'' \to \cdots \to V_j'V_j'' \to \cdots \to W$$

с индексом λ_0, ибо нет вставки aa^{-1}. К этой п. э. п. применяем индуктивное предположение.

Случай Б. 2. (буква a^{-1} сокращается в (20) с буквой a той индивидуальности, с которой она вставлена.). В этом случае вторая часть (20) выглядит так:

$$V_i'aa^{-1}V_i'' \to \cdots \to V_j'aa^{-1}V_j'' \to V_j'V_j'' \to \cdots \to W. \tag{21}$$

Для п. э. п. (21) построим каноническую п. э. п., связанную с буквой a:

$$V_i'aa^{-1}V_i'' \to \cdots \to V_i'a(E_1, \ldots, E_r, K)aa^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN)a^{-1}V_i'' \to \cdots$$
$$\cdots \to V_{j_1}'aa^{-1}V_{j_1}'' \to V_{j_1}'V_{j_1}'' \to \cdots \to W. \tag{22}$$

Так как после канонизации a^{-1} и a могут лишь сократиться, то слово между ними независимо и без вставок букв a переходит в 1, т. е.

$$a^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN) \to \cdots \to 1. \tag{23}$$

Имеются две возможности: индекс п. э. п. (23) отличен от нуля (случай Б. 2. 1); индекс п. э. п. (23) равен нулю (случай Б. 2. 2).

Случай Б.2.1. (индекс (23) отличен от нуля). В п. э. п. (23) нет вставок букв a, поэтому в слове $a^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN)$ будут содержаться буквы a, иначе индекс (23) равен 0. Рассмотрим первое в (23) сокращение букв a. Возможны следующие случаи.

1) Буква a^{-1}, которая сокращается первой в (23), порождается некоторой буквой a из $a^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN)$. Поскольку в этом случае

$$a^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN) \mathrel{\underline{\circ}} a_1^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN)Xa^{l'}aa^{l''}Ya_2^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN),$$

то этот случай аналогичен случаю А.3.1.1, при этом не все возможности А.3.1.1б будут появляться. Индекс п. э. п. (23) отличен от нуля, поэтому (23) можно заменить последовательностью с меньшим индексом.

2) Буква a^{-1}, которая сокращается первой в (23), содержится в начальном слове п. э. п. (23). В этом случае a^{-1} входит в множитель типа β_i' и, поэтому, здесь рассуждения вполне аналогичны случаю А. 3. 1. 3 и п. э. п. (23) можно заменить в (20) последовательностью с меньшим индексом.

Случай Б. 2. 2. (индекс (23) равен нулю). Индукцией по числу η всех i-преобразований в (23) покажем, что в этом случае п. э. п. (23) можно заменить п. э. п. в группе $\bar{G}*\langle\langle a\rangle\rangle$.

Если $\eta=0$, то утверждение очевидно.

Пусть $\eta=\eta_0+1$ и $\mathbf{a}$ — первая сокращающаяся в (23) буква a, которая участвует в i-преобразованиях. Будем считать, что $\mathbf{a}$ сокращается с буквой $\mathbf{a}^{-1}$ справа от нее. Случай сокращения слева рассматривается аналогично. Получаем, что

$$\alpha^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN) \underline{\circ} \beta_1 X a^{l_1'} \mathbf{a}\, a^{l_1''} Y\beta_2 Y^{-1} a^{l_2'} \mathbf{a}^{-1} a^{l_2''} X^{-1}\beta_3,$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — слова, составленные из $L_1, \ldots, L_r, Ma^lN$.

Заменим (23) канонической п. э. п., связанной с буквой $\mathbf{a}$. Пусть в канонической последовательности $\mathbf{a} \to \cdots \to \gamma(E_1, \ldots, E_r)\, \mathbf{a}\, \gamma^{-1}(L_1, \ldots, L_r)$. Поскольку $\mathbf{a}$ — первая сокращающаяся в (23) буква a, которая участвует в i-преобразованиях, то после канонизации слово между $\mathbf{a}^{-1}$ и $\mathbf{a}$ независимо и без вставок букв a перейдет в 1 в группе $\bar{G}*\langle\langle a\rangle\rangle$, т. е. $\gamma^{-1}(L_1, \ldots, L_r) a^{l_1''} Y\beta_2 Y^{-1} a^{l_2'} \to \cdots \to 1$. Отметим, что буквы a из $a^{l_1''}$, $a^{l_2'}$ и β_2 могут участвовать лишь в сокращениях. Используя свойства свободного произведения, условие свободы и то, что в β_2 буквы a входят только посредством множителей Ma^lN, получаем, что

$$\gamma^{-1}(L_1, \ldots, L_r) \overset{\bar{G}}{=} 1, \quad a^{l_1''} Y\beta_2 Y^{-1} a^{l_2'} = 1 \text{ в } \bar{G}*\langle\langle a\rangle\rangle. \tag{25}$$

Но буква a-правильная квазипроходная и, на основании изоморфизма L_a, получаем, что

$$\gamma(E_1, \ldots, E_r) \overset{\bar{G}}{=} 1. \tag{26}$$

Тогда (23) можно заменить следующей п. э. п., в которой уже нет i-преобразований, совершаемых над буквой $\mathbf{a}$:

$$\alpha^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN) \underline{\circ} \beta_1 X a^{l_1'} \mathbf{a}\, a^{l_1''} Y\beta_2 Y^{-1} a^{l_2'} \mathbf{a}^{-1} a^{l_2''} X^{-1}\beta_2 \to \cdots$$

$$\cdots \to \beta_1 X a^{l_1'} a^{l_2''} X^{-1}\beta_3 \to \cdots \to \beta_1 X a^{l_1'} \gamma(E_1, \ldots, E_r) a^{l_2''} X^{-1}\beta_2 \to \cdots \to 1.$$

В первой части этой п. э. п. используем второй из переходов (25) (в группе $\bar{G}*\langle\langle a\rangle\rangle$), во второй части применяем (26) (переход в группе $\bar{G}$), а в третьей части полученное слово переходит в 1, ибо оно есть то слово, которое остается в канонической п. э. п., связанной с $\mathbf{a}$, после сокращения букв $\mathbf{a}^{-1}$ и $\mathbf{a}$. К этой п. э. п. применяем индуктивное предположение.

Следовательно, $\alpha^{-1}(L_1, \ldots, L_r, Ma^lN) = 1$ в группе $\bar{G}*\langle\langle a\rangle\rangle$. Но a — правильная квазипроходная буква, поэтому $\alpha(E_1, \ldots, E_r, K) \overset{\bar{G}}{=} 1$.

В п. э. п. (22) имеются еще следующие независимые переходы:

$$V'_i\alpha(E_1, \ldots, E_r, K) \to \cdots \to V'_{j1};\ V''_i \to \cdots \to V''_{j1};\ V'_{j1}V''_{j1} \to \cdots \to W.$$

Из них можно построить следующую п. э. п.:

$$V \to \cdots \to V'_iV''_i \to \cdots \to V'_i\alpha(E_1, \ldots, E_r, K)V''_i \to \cdots$$

$$\cdots \to V'_{j_1}V''_i \to \cdots \to V'_{j_1}V''_{j_1} \to \cdots \to W$$

с индексом λ_0, ибо нет вставки $\boldsymbol{a}a^{-1}$. Случай Б. 2 рассмотрен.

Случай Б.3. (буква a^{-1} сокращается в 20. с буквой $\boldsymbol{a}$, появляющейся слева от нее, и отличной по индивидуальности от буквы a, с которой $\boldsymbol{a}^{-1}$ вставлена). Имеются следующие две возможности: буква a порождается буквой a, с которой $\boldsymbol{a}^{-1}$ вставлена (случай Б. 3. 1); буква $\boldsymbol{a}$ порождается буквой a из V'_i или сама содержится в слове V'_i (случай Б. 3. 2).

Случай Б. 3. 1. (a порождается буквой a, с которой $\boldsymbol{a}^{-1}$ вставлена). В этом случае для п. э. п.: $V'_iaa^{-1}V''_i \to \cdots \to W$ строим каноническую п. э. п., связанную с наследственной цепочкой, порождающей a:

$$V'_i\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{-1}V''_i \to \cdots \to V'_ia,\ a\beta'_1Xa^{l'_1}\cdots$$

$$\cdots a_{r_1+1}\boldsymbol{a}\beta_{r_1+1}a^{l''_{r_1}}Y\beta''_{r_1}\cdots a^{l''_1}Y\beta''_1\boldsymbol{a}^{-1}V''_i \to \cdots \to W.$$

В этой п. э. п. получаем следующий независимый переход без вставок букв a: $\beta_{r_1+1}a^{l''_r}Y\beta''_{r_1}\cdots a^{l''_1}Y\beta''_1 \to \cdots \to 1$. Если в начальном слове этого перехода нет букв a, то это будет переход в группе $\bar{G}$ и, следовательно, на основании условия свободы число Y в этом слове равно 0, что противоречит тому, что $\boldsymbol{a}$ порождается. Если в начальном слове этой п. э. п. имеются буквы a, то этот случай рассматривается аналогично случаю А. 3. 1, хотя не все возможности этого случая будут появляться здесь.

Случай Б. 3. 2. (a порождается буквой a из V'_i или сама содержится в слове V'_i). В этом случае, на основании леммы 4, как и в случае А. 3. 2, получаем последовательность с меньшим индексом.

Случай Б рассмотрен. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть в группе G система квазипроходных букв $A=\{a_1, \ldots, a_p\}$ правильна, а в группе $\bar{G}$ выполняется условие свободы для слов $M_{j,1}, N_{j,1}, \ldots, M_{j,t_j}, N_{j,t_j}(j=1, \ldots, p)$. Тогда группа $\bar{G}$ является подгруппой группы G.*

Для произвольного слова V группы $\bar{G}$ докажем, что $V=1$ в $\bar{G}$ тогда и только тогда, когда $V=1$ в группе G.

Поскольку все образующие и определяющие соотношения группы $\bar{G}$ являются образующими и определяющими соотношениями и в группе G, то из $V=1$ в $\bar{G}$ следует $V=1$ в G.

Пусть $V=1$ в G. По теореме 1 слово V можно перевести в 1 последовательностью элементарных преобразований группы G без вставок букв $a_1, \ldots, a_p$. Поскольку V — слово в алфавите группы $\bar{G}$, то в него не входят буквы $a_1^{\pm 1}, \ldots, \boldsymbol{a}_p^{\pm 1}$ и, следовательно, в указанной последовательности нет

ii-и i-преобразований группы G. Но это означает, что $V=1$ в группе $\overline{G}$. Следствие доказано.

Полезным является следующее ограничение теоремы 1 и следствия 1 для случая, когда в группе G $A=\{a\}$ и $l=\pm 1$.

Пусть задана группа E следующего вида:

$$E=\langle\langle S_1, \ldots, S_n, a;\ R_1=1, \ldots, R_m=1, E_1a=aL_1, \ldots, E_ra=aL_r, Ka=aMa^{\pm 1}N\rangle\rangle,$$

в которой a — квазипроходная буква.

В группе $\overline{E}$ определим следующее ограниченное условие свободы для слов M и N.

Пусть Z_1 — это M или N, а Z_2 — это, соответственно, N или M. Будем говорить, что в группе $\overline{E}$ выполняется ограниченное условие свободы для слов M и N, если из равенства $Z_1^{\varepsilon}\varphi(L_1, \ldots, L_r, Z_2)Z_1^{-\varepsilon}\varkappa \overset{\overline{E}}{=} 1$, где $\varepsilon=\pm 1$, φ — произвольное слово из $L_1, \ldots, L_r, Z_2$; $\varkappa$ — произвольное слово, составленное из $L_1, \ldots, L_r$, или из $E_1, \ldots, E_r, K$, следует

1) $\varphi(L_1, \ldots, L_r, Z_2)=1$ в $\overline{E}$,

2) сумма степенных показателей Z_2 в слове φ равна 0.

Теорема 2. *Пусть в группе E буква a — правильная квазипроходная буква, а в группе $\overline{E}$ выполняется ограниченное условие свободы для слов M и N. Тогда, если $V=W$ в E и в слово W не входят отрицательные буквы a^{-1}, то V можно перевести в W последовательностью элементарных преобразований группы E без вставок букв a.*

В доказательстве теоремы 1 условие свободы использовано в случаях A. 3. 1. 1, A. 3. 1. 2, A. 3. 1. 3, B. 2. 1, B. 2. 2, B. 3. 1. Анализ всех этих случаев показывает, что необходимость применения общего условия свободы вызвана либо тем, что в группе G могут иметься несколько соотношений вида $Ka=aMa^{l}N$, либо тем, что $|l|>1$, и, поэтому, в канонических последовательностях, связанных с наследственными цепочками, показатели l_i' и l_i'' букв a могут не равняться нулю. Во всех остальных случаях можно пользоваться ограниченным условием свободы в группе $\overline{G}$ для слов M и N. Поэтому, если в группе G имеется лишь одно определяющее соотношение вида $Ka=aMa^{\pm 1}N$, то теорема 1 остается верной при замене условия свободы ограниченным условием свободы для слов M и N.

Следствие 2. *Пусть в группе E буква a — правильная квазипроходная буква, а в группе $\overline{E}$ выполняется ограниченное условие свободы для слов M и N. Тогда группа $\overline{E}$ является погруппой группы E.*

Следствие 2 доказывается на основании теоремы 2 повторением доказательства следствия 1.

3. Группы с правильной системой квазиустойчивых букв. Как известно, понятие проходной буквы можно обобщить введением т. наз. устойчивых букв. Этот путь обобщения был отмечен еще Дж. Бриттоном в его работе [5]. При этом результаты, полученные для групп с проходными буквами, легко переносятся на группы с устойчивыми буквами.

Аналогично, понятие квазипроходной буквы обобщим введением нового понятия квазиустойчивой буквы и покажем как можно перенести результаты, полученные здесь для групп с правильными системами квазипроходных букв, на группы с правильными системами квазиустойчивых букв.

Пусть алфавиты $S=\{S_1, \ldots, S_n\}$ и $A=\{a_1, \ldots, a_p\}$ не пересекаются. Рассмотрим группу D следующего вида:

$$D=\langle\langle s_1, \ldots, s_n, a_1, \ldots, a_p;\ R_1=1, \ldots, R_m=1, E_i a_{x_i}=a_{y_i} L_i, \ldots,$$

$$(i=1, \ldots, r), K_j a_{z_j}=a_{v_j} M_j \varphi_j(a_{w_{j,1}}, \ldots, a_{w_{j,l_j}}) N_j\ (j=1, \ldots, t)\rangle\rangle,$$

где

1) $a_{x_i}, a_{y_i}, (i=1, \ldots, r), a_{z_j}, a_{v_j}, a_{w_{j,1}}, \ldots, a_{w_{j,l_j}}, (j=1, \ldots, t)$ принадлежат алфавиту A;

2) слова φ_j $(j=1, \ldots, t)$ свободно несократимые и отличные от пустого слова;

3) слова $R_1, \ldots, R_m, E_i, L_i$ $(i=1, \ldots, r), K_j, M_j N_j, (j, \ldots, t)$ не содержат букв $a_1^{\pm 1}, \ldots, a_p^{\pm 1}$.

В этом случае будем говорить, что множество $A=\{a_1, \ldots, a_p\}$ является системой квазиустойчивых букв в группе D, а группу $\bar{D}=\langle\langle s_1, \ldots, s_n;\ R_1=1, \ldots, R_m=1\rangle\rangle$ будем называть основанием группы D по системе квазиустойчивых букв A.

Будем говорить, что две буквы из A родственны, если они входят в одно и то же определяющее соотношение группы D. Будем также считать, что отношение родства транзитивно. Легко видно, что в этом случае отношение родства является отношением эквивалентности. Тем самым множество A разбивается на непересекающиеся классы родственных букв, а множество определяющих соотношений группы D, содержащих буквы из A, разбивается на непересекающиеся классы определяющих соотношений, содержащих родственные буквы из A.

Выпишем все определяющие соотношения группы D, содержащие буквы a_i из данного класса A_k родственных букв:

$$E_i a_{x_i}=a_{y_i} L_i, \quad i=i_1, \ldots, i_{k_1};\ K_j a_{z_j}=a_{v_j} M_j \varphi_j(a_{w_{j,1}}, \ldots, a_{w_{j,l_j}}) N_j,\ j=j_1, \ldots, j_{k_2}.$$

Эти соотношения определяют следующее соответствие L_{A_k} слов группы $\bar{D}*\langle\langle a_1, \ldots, a_p\rangle\rangle$:

$$E_i — L_i, \quad i=i_1, \ldots, i_{k_1},$$

$$K_j — M_j \varphi_j(a_{w_{j,1}}, \ldots, a_{w_{j,l_j}}) N_j, j=j_1, \ldots, j_{k_2}.$$

Система квазиустойчивых букв A группы D называется правильной, если для каждого класса A_k родственных букв из A рассмотренное соответствие L_{A_k} осуществляет изоморфное отображение подгрупп, порожденных, соответственно, левыми и правыми частями соответствия L_{A_k} в группе $\bar{D}*\langle\langle a_1, \ldots, a_p\rangle\rangle$.

Будем говорить, что в группе $\bar{D}$ выполняется условие свободы для слов $M_1, N_1, \ldots, M_t, N_t$, если:

1) $M_1, N_1, \ldots, M_t, N_t$ — слова бесконечного порядка в группе $\bar{D}$.

2) Для каждого класса A_k родственных букв из A:

$$\langle E_{i_1}, L_{i_1}, \ldots, E_{i_{k_1}}, L_{i_{k_1}}, K_{j_1}, M_{j_1}, N_{j_1}, \ldots, K_{j_{k_2}}, M_{j_{k_2}}, N_{j_{k_2}} \rangle_{\bar{D}}$$

$$=\langle E_{i_1}, L_{i_1}, \ldots, E_{i_{k_1}}, L_{i_{k_1}}, K_{j_1}, \ldots, K_{j_{k_2}} \rangle_{\overline{D}} * \langle M_{j_1} \rangle_{\overline{D}} * \langle N_{j_1} \rangle_{\overline{D}} * \cdots * \langle M_{j_{k_2}} \rangle_{\overline{D}} * \langle N_{j_{k_2}} \rangle_{\overline{D}}.$$

Для групп с правильными системами квазиустойчивых букв получаем следующие два результата:

Теорема 3. *Пусть в группе D система квазиустойчивых букв A правильна, а в группе $\overline{D}$ выполняется условие свободы для слов $M_1, N_1, \ldots, M_t, N_t$. Тогда, если $V=W$ в группе D и в слово W не входят отрицательные буквы $a_1^{-1}, \ldots, a_p^{-1}$, то V можно перевести в W последовательностью элементарных преобразований группы D без вставок букв из A.*

Возможность распространения теоремы 1 на группы с правильной системой квазиустойчивых букв основана на том, что каждая квазиустойчивая буква может порождать лишь родственные ей буквы. Поэтому схема доказательства теоремы 3 полностью следует схеме доказательства теоремы 1.

Из теоремы 3 получаем, как и раньше, следующее следствие.

Следствие 3. *Пусть в группе D система квазиустойчивых букв A привильна, а в группе $\overline{D}$ выполняется условие свободы для слов $M_1, N_1, \ldots, M_t, N_t$. Тогда группа $\overline{D}$ является подгруппой группы D.*

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Новиков. Неразрешимость проблемы сопряженности в теории групп. *Известия АН СССР, сер. мат.*, 18, 1954, 485—524.
2. П. С. Новиков. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп. *Труды Мат. инст. АН СССР*, 44, 1955.
3. G. Higman, B. Neumann, H. Neumann. Embedding theorems for groups. *J. London Math. Soc.*, 24, 1949, 247—254.
4. С. И. Адян. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания некоторых свойств групп. *Доклады АН СССР*, 103, 1955, 533—535.
5. I. L. Britton. The word problem. *Ann. Math.*, 77, 1963, 16—32.
6. C. F. Miller—III. On group-theoretic decision problems and their classification. Ann. *Math. Studies*, № 68, 1971.
7. Р. Д. Павлов. Подгруппы одного вида конечно определенных групп. *Годишник Соф. унив., Фак. мат. мех.* 68, 1977, 59—80.
8. С. И. Адян. Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп. *Труды Мос. мат. об-ва*, 6, 1957, 231—298.
9. В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. Комбинаторная теория групп. Москва, 1974.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 10. 12. 1977