Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

EINE VERALLGEMEINERUNG DER LAGUERRE-TRANSFORMATION

HANS-JÜRGEN GLAESKE

In dieser Arbeit wird die von Mc Cully eingeführte Laguerre-Transformation, bei der die Bildfunktion nur für nichtnegative ganze Zahlen definiert ist, auf Bildfunktionen einer komplexen Veränderlichen verallgemeinert. Für diese Transformation werden Abbildungseigenschaften, ein Faltungssatz und eine Umkehrformel hergeleitet.

0. In [2] untersuchte Mc Cully die sogenannte Laguerre-Transformation $T\{f(t); n\} = \int_0^\infty e^{-t} L_n(t) f(t) dt$, wobei n ein Element der Menge N_0 der nichtnegativen ganzen Zahlen und $L_n(t)$ die durch $L_n(t) = 1/(n!)^{-1} e^t D^n (e^{-t} t^n)$, $D = d/dt$ definierten Laguerreschen Polynome sind. Der Nachteil dieser Transformation ist der, daß die Bildfunktionen nur in N_0 definiert sind und deshalb im Bildraum nicht die Methoden der komplexen Funktionentheorie zur Verfügung stehen. Durch eine Verallgemeinerung des Kerns soll dieser Nachteil beseitigt und eine Operatorenrechnung für die verallgemeinerte Transformation aufgebaut werden.

1. Statt $L_n(t)$ betrachten wir die von Pinney (s. [1, S. 213]) eingeführten Laguerre-Funktionen

$$L_{-z}(t) = {}_1F_1(z, 1; t). \tag{1.1}$$

Hier ist ${}_1F_1$ eine konfluente hypergeometrische Funktion (s. [3, S. 248]).

Für $-z = n \in N_0$ gilt $L_{-z}(t) = L_n(t)$. Wegen (1.1) lassen sich eine Reihe von Ergebnissen für konfluente hypergeometrische Funktionen (s. [3]) sofort aufschreiben.

Das Verhalten dieser Funktionen für $t \to 0$ bzw. $t \to +\infty$ ist nach [3, S. 248, (1) bzw. S. 278, (3)] gegeben durch

$$L_{-z}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z)_k}{k!} t^k, \quad |t| < \infty \tag{1.2}$$

mit $(z)_k = \Gamma(z+k)/\Gamma(z)$, $k \in N_0$ bzw.

$$L_{-z}(t) = \frac{e^t t^{z-1}}{\Gamma(z)} [1 + O(t^{-1})], \quad t \to +\infty. \tag{1.3}$$

Nach [3, S. 252, (1)] ist $L_{-z}(t)$ Lösung der Differentialgleichung

$$tx''(t) + (1-t)x'(t) - zx(t) = 0. \tag{1.4}$$

Mit $S = e^t D[e^{-t} tD]$ schreibt sich (1.4)

$$Sx(t) - zx(t) = 0. \tag{1.4'}$$

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol 5, 1979, p. 179—185.

Für den Aufbau einer Operatorenrechnung notieren wir schließlich eine Reihe wichtiger Beziehungen für sogenannte benachbarte konfluente hypergeometrische Funktionen.

Wegen [3, S. 254, (2)] gilt mit $a=z$, $c=1$, $x=t$ sofort

$$tL_{-z}(t)=(1-2z)L_{-z}(t)+(z-1)L_{1-z}(t)+zL_{-z-1}(t). \tag{1.5}$$

Analog wird nach [3, S. 254, (4)] mit $a=z$, $c=2$, $x=t$

$$(1-z)\,{}_1F_1(z,2;t)+z\,{}_1F_1(z+1,2;t)=L_{-z}(t). \tag{1.6}$$

Für die Ableitungen gilt nach [3, S. 254, (9) bzw. (13)] mit $a=z$, $c=1$, $x=t$

$$tDL_{-z}(t)=z[L_{-z-1}(t)-L_{-z}(t)] \tag{1.7}$$

bzw.

$$D[e^{-t}L_{-z}(t)]=(z-1)\,e^{-t}\,{}_1F_1(z,2;t). \tag{1.8}$$

2. Wir definieren als verallgemeinerte Laguerre-Transformation von f

$$F(z)=T\{f(t);z\}=\int_0^\infty e^{-t}L_{-z}(t)f(t)\,dt$$

falls das Integral konvergiert. Offensichtlich ist die Linearität dieser Transformation. Wir führen die folgenden Funktionenklassen ein: Mit $I=(0,\infty)$, $\bar{I}=[0,\infty)$ seien

$${}_\beta C(I)=\{f:f(t)=t^\nu\tilde{f}(t),\ t\in I,\ \tilde{f}\in C(\bar{I}),\ \nu>\beta\}$$

und

$${}_\beta P_\gamma(I)=\{f:f\in{}_\beta C(I),\ f(t)=O(t^\gamma),\ t\to\infty\}$$

wobei wie üblich $C(\bar{I})$ die Menge der in $\bar{I}$ stetigen Funktionen bezeichne.

Mit (1.2) und (1.3) haben wir dann sofort den

Satz 2.1: *Falls $f\in{}_{-1}P_\gamma(I)$ so existiert $F(z)$ für $Re\,(z)<-\gamma$ und stellt dort eine holomorphe Funktion von z dar.*

3. Bevor wir die durch (1.4′) nahegelegte Transformation des Differentialoperators S angeben, konstruieren wir einen rechtsinversen Operator R von S.

Definition 3.1: *Für $f\in{}_{-1}C(I)=:D_R$ sei $Rf(t)=\int_0^t e^u u^{-1}[\int_0^u e^{-v}f(v)dv]du$.*

Dann gilt

Satz 3.1. *D_R ist ein linearer Raum und R bildet D_R in sich ab. Weiterhin gilt $SR=E$, wo E der identische Operator ist.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ergibt sich sofort nach Definition von R und D_R. Weiter ist

$$SRf(t)=e^tD[e^{-t}tD]\int_0^t e^u u^{-1}[\int_0^u e^{-v}f(v)dv]du=e^tD\int_0^t e^{-v}f(v)dv=f(t).$$

Der Operator S hat die folgende Transformationseigenschaft:

Satz 3.2. *Für den Operator S mit dem Definitionsbereich*

$$D_S=\{f:f\in C^2(I),\ f^{(k)}\in{}_{-k}P_\gamma(I),\ k=0,1\}$$

wobei $C^m(I)$ die Menge der in I m-mal stetig differenzierbaren Funktionen sei, gilt $T\{Sf(t);z\}=zF(z)$, $\mathrm{Re}\,(z)<-\gamma$.

Beweis.

$$T\{Sf(t);z\}=e^{-t}tL_{-z}(t)Df(t)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-t}\,tD[L_{-z}(t)]f'(t)\,dt$$

$$=e^{-t}D[L_{-z}(t)]f(t)\Big|_0^\infty+\int_0^\infty S[L_{-z}(t)]\,e^{-t}f(t)dt=zF(z)$$

da die integralfreien Terme zum einen wegen der Voraussetzungen und zum anderen wegen (1.2), (1.3) und (1.7) verschwinden und da nach (1.4′) $SL_{-z}(t)=zL_{-z}(t)$ gilt.

Mittels vollständiger Induktion ergibt sich sofort

Folgerung 3.1. *Falls* $S^{k-1}f(t)\in D_S$, $k=1,2,\ldots,m$, *dann gilt* $T\{S^mf(t);z\}=z^mF(z)$, $m\in N$, $\operatorname{Re}(z)<-\gamma$; *wo* N *die Menge der positiven ganzen Zahlen ist.*

Wegen $T\{SRf(t);z\}=zT\{Rf(t);z\}=T\{f(t);z\}=F(z)$ erhält man sofort den

Satz 3.3. *Falls* $Rf\in D_S$ *dann gilt* $T\{Rf(t);z\}=z^{-1}F(z)$, $\operatorname{Re}(z)<-\gamma$.

Mittels vollständiger Induktion ergibt sich sofort wieder

Folgerung 3.2. *Falls* $R^kf\in D_S$, $k=1,2,\ldots,m$ *dann gilt* $T\{R^mf(t);z\}=z^{-m}F(z)$, $m\in N$, $\operatorname{Re}(z)<-\gamma$.

4. Schließlich leiten wir einige Formeln für die Transformation der Ableitung und des unbestimmten Integrals einer Funktion f her.

Satz 4.1. *Wenn* $f\in{}_{-1}P_\gamma(I)$, $\gamma<-1$ *und* $\varphi(t)=\int_0^t f(x)\,dx$ *dann gilt* $\Phi(z)=F(z)-F(z+1)$, $\operatorname{Re}(z)<0$.

Beweis. Für $\operatorname{Re}(z)<1$ wird nach (1.3) und (1.8)

$$F(z)=\int_0^\infty e^{-t}L_{-z}(t)\varphi'(t)dt=e^{-t}L_{-z}(t)\varphi(t)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty D[e^{-t}L_{-z}(t)]\,\varphi(t)\,dt$$

$$=(1-z)\int_0^\infty e^{-t}{}_1F_1(z,2;t)\,\varphi(t)dt$$

Damit folgt für $\operatorname{Re}(z)<0$

$$F(z)-F(z+1)=\int_0^\infty e^{-t}[(1-z){}_1F_1(z,2;t)+z\,{}_1F_1(z+1,2;t)]\,\varphi(t)dt=\Phi(z)$$

wegen (1.6).

Für die Transformierte der Ableitung gilt der

Satz 4.2. *Wenn* $f^{(k)}\in{}_{-k}P_\gamma(I)$, $k=0,1$ *dann gilt für* $\operatorname{Re}(z)<-\gamma-1$

$$T\{f'(t);z\}-T\{f'(t);z+1\}=F(z).$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $f'\in{}_{-1}P_\gamma(I)$ und $f(0)=0$. Deshalb erhält man mit Satz 4.1 und $f(t)=\int_0^t f'(\tau)d\tau$ sofort das Ergebnis.

Weiterhin geben wir die Transformationsformeln für einige Differentialausdrücke an:

Satz 4.3. *Für* $f^{(k)}\in{}_{-k-1}P_{\gamma-k}(I)$, $k=0,1$, *gilt*

$$T\{tDf(t);z\}=(z-1)F(z-1)-zF(z),\quad \operatorname{Re}(z)<-\gamma.$$

Für $f^{(k)}\in{}_{-k}P_{\gamma-k}(I)$, $k=0,1,2$, *gelten*

$$T\{DtDf(t);z\}=(z-1)F(z-1),\quad \operatorname{Re}(z)<-\gamma+1,$$

und $\quad T\{te^{-t}D[te^tDf(t)];z\}=2(z-1)F(z-1)-zF(z),\quad \operatorname{Re}(z)<-\gamma.$

Diese Ergebnisse ergeben sich wie oben mittels partieller Integration und Verwendung von (1.7) sowie (1.5) im ersten und Satz 4.2 in den letzten beiden Fällen.

5. Grundlegend für die Herleitung einer Faltung ist die nachfolgende Verallgemeinerung eines für Laguerresche Polynome in [5] hergeleiteten Ergebnisses von Watson.

Lemma 5.1.

$$L_{-z}(x)L_{-z}(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \exp[-\sqrt{xy}\cos\vartheta]\, L_{-z}(x+y+2\sqrt{xy}\cos v)\cos(\sqrt{xy}\sin\vartheta)\,d\vartheta.$$

Beweis. Ausgangspunkt ist die Formel (s. [1, S. 158, (5)])

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(-\sigma)}\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+s\right)\left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)^{2s}\mathbf{M}_{K_1+s-(1+\mu)/2,\,\mu/2}(-i\xi')$$

$$\times\mathbf{M}_{K_2+s-(1+\mu)/2,\,\mu/2}(i\eta')\,ds=2^{-1}\sin\varphi\,(\xi'\eta')^{1/2}\exp[i\cos\varphi\,(\zeta'-\eta')\,|\,2]J_\mu(\sqrt{\zeta'\eta'}\sin\varphi)$$

mit $|\arc\tan\varphi/2|<\pi/2$, $|\sigma|<[1+\mathrm{Re}(\mu)]\,|\,2$, $\mathrm{Re}(\mu)>-1$. Mit $\mu=0$, $z=1/2-s$, $x=-i\xi'$, $y=i\eta'$, $K_1=K_2=1/2$, $-\sigma=\eta$, $0<\eta<1$, $\tan\ \varphi/2=\sqrt{-t}$, $|\arg(-t)|<\pi$ erhält man nach leichter Rechnung

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta)}(-t)^{-z}\Gamma(z)\Gamma(1-z)\,\mathbf{M}_{1/2-z,0}(y)\,\mathbf{M}_{1/2-z,0}(x)\,dz=\frac{\sqrt{xy}}{1-t}\exp\left[-\frac{x+y}{2}\frac{1+t}{1-t}\right]I_0\left(\frac{2\sqrt{xyt}}{1-t}\right)$$

wobei $I_0(\tau)=J_0(i\tau)$ gilt und letzteres die Besselfunktionen 1. Art sind.

Für die Funktionen $\mathbf{M}$ gilt nach [1 S. 12, (7)]

$$\mathbf{M}_{1/2-z,0}(x)=e^{-x/2}x^{1/2}{}_1F_1(z,1;x)=e^{-x/2}x^{1/2}L_{-z}(x).$$

Damit wird

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta)}(-t)^{-z}\Gamma(z)\Gamma(1-z)L_{-z}(x)L_{-z}(y)dz=\exp\left[-\frac{x+y}{1-t}t\right]I_0\left(\frac{2\sqrt{xyt}}{1-t}\right)/(1-t).$$

Nach [5, S. 20] ist

$$I_0\left(\frac{2\sqrt{xyt}}{1-t}\right)=\pi^{-1/2}\int_0^\pi\exp\left[\frac{t+1}{t-1}\sqrt{xy}\sin\vartheta\right]\left\{J_{-1/2}(\sqrt{xy}\sin\vartheta)\left(\frac{1}{2}\sqrt{xy}\sin\vartheta\right)^{1/2}\right\}d\vartheta.$$

Damit wird (falls { } den Ausdruck in der geschweiften Klammer obiger Zeile bedeutet)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta)}(-t)^{-z}\Gamma(z)\Gamma(1-z)L_{-z}(x)L_{-z}(y)dz$$

$$=\pi^{-1/2}\int_0^\pi\frac{\exp[t(x+y+2\sqrt{xy}\cos\vartheta)/(t-1)-\sqrt{xy}\cos\vartheta]}{1-t}\{\ \}d\vartheta.$$

Nun ist

$$\frac{\exp[-ut/(1-t)]}{1-t}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta)}(-t)^{-z}L_{-z}(u)\Gamma(z)\Gamma(1-z)dz;\tag{5.1}$$

denn Linksverschieben des Integrationsweges liefert sofort die (s. [4, S. 189 (17)]) bekannte Formel

$$(5.2) \qquad \frac{\exp[-ut/(1-t)]}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(u)\,t^n, \qquad |t|<1.$$

Mit $u=x+y+2\sqrt{xy}\cos\vartheta$ folgt nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta)}(-t)^{-z}\Gamma(z)\Gamma(1-z)\,[L_{-z}(x)L_{-z}(y)$$

$$-\pi^{-1/2}\int_0^{\pi} L_{-z}(x+y+2\sqrt{xy}\cos\vartheta)\exp(-\sqrt{xy}\cos\vartheta)\{\ \}d\vartheta]dz=0.$$

Das ist gleichbedeutend damit, daß die inverse Mellintransformierte $\mathfrak{M}^{-1}\{\Gamma(z)\Gamma(1-z)[\ ];\ -t\}=0$ ist. Damit muß der Ausdruck in der eckigen Klammer ver-schwin-den und wir erhalten wegen $J_{-1/2}(\tau)=\sqrt{2/\pi\tau}\cos\tau$ nach leichter Rechnung Lemma 5.1.

Mit Lemma 5.1 erhält man (Beweis wie in [2]) den

Satz 5.1. *Sind $f,\ g\in{}_{-1}P_\gamma(I)$, so existiert*

$$(f*g)(t)=\pi^{-1}\int_0^{\infty}e^{-x}f(x)\int_0^{\pi}\exp[-\sqrt{xt}\cos\vartheta]g(x+t-2\sqrt{xt}\cos\vartheta)\cos(xt\sin\vartheta)d\vartheta dx$$

und es gilt $T\{(f*g)(t);z\}=F(z)G(z),\ \mathrm{Re}(z)<-\gamma.$

6. Zur Herleitung der Transformierten vorgegebener Funktionen ist ein Zusammenhang mit gut tabellierten Integraltransformationen von Interesse.

Satz 6.1. *Für $f\in{}_{-1}P_\gamma(I)$ gilt in* $0<\mathrm{Re}(z)<-\gamma,\ -1<\gamma<0$

$$F(z)=\frac{\sin\pi z}{\pi}\,\mathfrak{M}\left\{\frac{1}{s+1}F^*\left(\frac{1}{s+1}\right);\ z\right\}$$

falls F^* die Laplace-Transformierte von f ***bezeichnet.***

Beweis. Wegen der Abelschen Asymptotik der Laplace-Transformation gilt für

$$f(t)=O(t^{-1+\varepsilon})\quad \text{für } t\to+0,\ \varepsilon>0;$$

$$F^*(p)=O(p^{-\varepsilon})\quad \text{für } p\to+\infty.$$

Analog ergibt sich aus

$$f(t)=O(t^{\gamma})\quad \text{für } t=\infty.$$

$$F^*(p)=O(p^{-\gamma-1})\quad \text{für } p\to+0,\ \gamma>-1.$$

Mit $p=(s+1)^{-1},\ s>-1$ gilt dann offenbar für $\varphi(s)=\frac{1}{s+1}F^*\left(\frac{1}{s+1}\right)$

$$\varphi(s)=O(1)\quad \text{für}\quad s\to+0;$$

$$\varphi(s)=O(s^{\gamma})\quad \text{für}\quad s\to+\infty.$$

Damit existiert $A:=\mathfrak{M}\{\varphi(s);\ z\}=\int_0^{\infty}z^{s-1}\varphi(s)ds$ für $0<\mathrm{Re}(z)<-\gamma,\ -1<\gamma<0.$ Folglich ist

$$\mathfrak{M}^{-1}\{A;s\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta)}z^{-s}A(z)dz,\ 0<\eta<-\gamma,$$

$$=\varphi(s)=\frac{1}{s+1}F^*\left(\frac{1}{s+1}\right)=\frac{p}{p-1}F^*\left(\frac{p}{p-1}\right)=\frac{p}{p-1}\int_0^\infty \exp\left[-t\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\right]f(t)dt$$

falls man $s=-p^{-1}$ setzt, für $p>1$ oder $p<v$.

Ersetzt man in (5.2) t durch p^{-1} und u durch t so wird für $|p|>1$

$$\frac{p}{p-1}\exp[-t/(p-1)]=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(t)p^{-n}$$

und damit bei Berücksichtigung von (5.1) mit $0<\eta'<1$

$$\mathfrak{M}^{-1}\{A;\ -p^{-1}\}=\int_0^\infty e^{-t}f(t)\,[\sum_{n=0}^{\infty}L_n(t)\,p^{-n}]dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-t}f(t)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta')}(-p)^z L_{-z}(t)\Gamma(z)\Gamma(1-z)dz\right]dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta')}(-p)^z\Gamma(z)\Gamma(z)\Gamma(1-z)\int_0^\infty e^{-t}L_{-z}(t)\,f(t)dt\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta')}(-v)^z\Gamma(z)\Gamma(1-z)F(z)dz=\mathfrak{M}^{-1}\{\Gamma(z)\Gamma(1-z)F(z);\ -p^{-1}\},$$

wobei die Vertauschung der Integrationsreihenfolgen unter unseren Voraussetzungen erlaubt ist. Damit wird $A=\Gamma(z)\Gamma(1-z)F(z)$ und das ergibt die Behauptung.

Von der Einschränkung $0<\mathrm{Re}(z)<-\gamma$ kann man sich im konkreten Fall oft vermöge analytischer Fortsetzung befreien.

Mittels Satz 6.1 und bekannter Tabellen findet man zum Beispiel

$$T\{e^{-\lambda t};\ z\}=\lambda^{-z}(\lambda+1)^{z-1},\ \lambda>0$$

$$T\{t^\lambda;\ z\}=\Gamma(-\lambda-z)\Gamma(\lambda+1)/\Gamma(-\lambda)\Gamma(1-z),\ \lambda>-1,\ \mathrm{Re}(z)<-\lambda.$$

7. Die Betrachtungen in Abschnitt [6] geben uns die Möglichkeit eine Umkehrformel für die verallgemeinerte Laguerre-Transformation herzuleiten. Ersetzt man in Satz 6.1 $1/(s+1)$ durch s so wird mit $0<\eta<-\gamma$

$$F^*(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta)}\Gamma(z)\Gamma(1-z)F(z)\,(1-s)^{-z}\,s^{z-1}dz,\ 0<\mathrm{Re}\,(s)<1$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta)}e^{-\pi iz}\,\Gamma(z)\Gamma(1-z)F(z)\,(s-1)^{-z}s^{z-1}dz,\ \mathrm{Re}\,(s)>1.$$

Damit wird nach der Umkehrformel für die Laplace-Transformation, falls man noch die Reihenfolgen der Integrationen vertauscht und falls $\eta'>1$,

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta)}e^{-\pi iz}\,\Gamma(z)\Gamma(1-z)F(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta')}e^{st}(s-1)^{-z}\,s^{z-1}ds\right]dz.$$

Nach [3, S. 215 (7)] ist der Ausdruck in der eckigen Klammer aber identisch mit ${}_1F_1(z,\ 1;\ t)=L_{-z}(t)$. Unter Verwendung des Ergänzungssatzes der Γ-Funktion erhalten wir so den

Satz 7.1. *Falls $f\in{}_{-1}P_\gamma(\mathrm{I})$, $-1<\gamma<0$, und $F(z)$ die verallgemeinerte Laguerre-Transformation von $f(t)$ ist, so ergibt sich für $0<\eta<-\gamma$*

$$f(t) = \int_{(\eta)} \frac{L_{-z}(t)}{e^{2\pi i z}-1} F(z)dz.$$

Bemerkung. Falls die Verschiebung des Integrationsweges nach links erlaubt ist, so erhält man nach Auswertung der Residuen an den Polstellen des Integranden bei $z=-n$, $n \in N_0$, sofort die aus [2] bekannte Umkehrformel $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} F(-n)L_n(t)$. Das soll im Zusammenhang mit der Herleitung Abelscher und Tauberscher Sätze für die Laguerre-Transformation an anderer Stelle wieder aufgegriffen werden.

LITERATUR

1. H. Buchholz. Die konfluente hypergeometrische Funktion, 1. Aufl. Berlin, 1953.
2. J. Mc Cully. The Laguerre transform. *SIAM Rev.*, 2, 1960, 185—191.
3. A. Erdélyi. Higher transcendental functions I, vol. 1. New York, 1953.
4. A. Erdélyi. Higher transcendental functions II, vol. 2. New York, 1953.
5. G. N. Watson. Another note on Laguerre polynomials. *J. London Math. Soc.*, **14**, 1939, 19—22.

Sektion Mathematik der
Friedrich-Schiller-Universität
DDR 69 Jena

Eingegangen am 20. 4. 1978