Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБ ОЦЕНКЕ ПЕРИОДА ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

НЕКО Н. ГЕОРГИЕВ

В работе рассматривается трехмерная диссипативная система, которая имеет периодическое решение $\varphi(t, \widetilde{x})$, лежащее в определенном топологическом торе G_r. Оцениваются границы тора G_r, которые используются для определения периода решения $\varphi(t, \widetilde{x})$.

Рассмотрим систему

$$\mathring{x}_1 = x_2 - ax_1, \quad \mathring{x}_2 = x_3 - bx_1, \quad \mathring{x}_3 = -abx_1 + g(x_1), \tag{1}$$

где a и b — положительные постоянные, а функция $g(x_1)$ — непрерывно дифференцируемая на промежутке $(-\infty, \infty)$. Пусть выполняются следующие условия:

1) $g(-x_1) = -g(x_1)$;
2) $g'(x_1) < 0$ при $0 \leqq x_1 < \xi_0$, $g'(x_1) > 0$ при $\xi_0 < x_1 < \xi_1 < 1$;
3) $|g(x_1)/x_1| \leq k$, $k < \min\{ab, a\sqrt{b}(a^2+b)/2(\sqrt{b}+\sqrt{a^2+b})$
4) $g(x_1)/x_1 > 0$ при $x_1 \geq \xi_1$;
5) $\lim g(x_1)/x_1 = l$ при $x_1 \to \infty$.

Известно, что система (1) диссипативна (см. [1; 2]). В работе [3] на основании теоремы Брауэра о неподвижной точке в несколько измененной форме (см. [4]) доказывается, что система (1) имеет периодическое решение $\varphi(t, \widetilde{x})$. В данной работе оценивается период этого периодического решения.

Положим $g(x_1) = hx_1 + s(x_1)$, $h = g'(0)$ и запишем систему (1) в виде

$$x = Ax + F(x), \tag{2}$$

где векторы $x = \operatorname{colon}\{x_1, x_2, x_3\}$, $F = \operatorname{colon}\{0, 0, s(x_1)\}$, а матрица $A = (a_{ij})$. При этом $a_{11} = -a$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = -b$, $a_{23} = 1$, $a_{31} = h - ab$ и остальные элементы $a_{ij} = 0$.

В силу наложенных условий на функцию $g(x_1)$ существует однопараметрическая группа дифеоморфизмов g^t; $R^3 \to R^3$, для которой поле $v = Ax + F(x)$ является полем фазовой скорости.

В [3] доказывается, что траектории системы (2) пересекают конические поверхности

$$v = (a^2x_1 - ax_2 + x_3)^2 - (x_3 - bx_1)^2 - bx_2^2 = 0, \tag{3}$$

переходя при этом в область $v < 0$. Таким образом, оператор g^t при $t \leqq 0$ является положительным, так как существует конус, инвариантный относительно этого отображения.

Обозначим через λ_i собственные значения оператора A, а через h_i — соответствующие собственные векторы. В [3] доказывается, что $\lambda_1 < 0$,

СЕРДИКА Българско математическо списание, Том 5, 1979, с. 222—228.

$\lambda_2=\bar{\lambda}_3=\beta_1+i\beta_2$, где $\beta_1>0$ и $\beta_2\neq 0$. Направление, определяемое вектором h_1, лежит вне области $V<0$. Его будем называть главным направлением.

Существует линейное, действительное и неособенное преобразование P, такое, что матрица $P^{-1}AP=B=(b_{ij})$ имеет действительную каноническую форму Жордана. При этом $b_{11}=\lambda_1$, $b_{22}=b_{33}=\beta_1$, $-b_{23}=b_{32}=\beta_2$, а остальные элементы матрицы B равняются нулю.

Сразу видно, что матрица $P=(p_{ij})$ удовлетроряет нашему условию, если: $p_{11}=\lambda_1$, $p_{12}=2\beta_1$, $p_{13}=-2\beta_2$, $p_{21}=\lambda_1(a+\lambda_1)$, $p_{22}=2(a\beta_1+\beta_1^2-\beta_2^2)$, $p_{23}=-2(a+2\beta_1)\beta_2$, $p_{31}=h-ab$, $p_{32}=2(h-ab)$, $p_{33}=0$.

Линейное преобразование $x=Py$ приводит систему (2) к виду

$$\overset{\circ}{y}=By+cs(x_1), \tag{4}$$

где вектор $c=P^{-1}e_3=P^{-1}\operatorname{colon}\{0, 0, 1\}$.

Если обозначим через $\tilde{k}=(k_1, k_2, k_3)=p_{11}, p_{12}, p_{13})$, то

$$x_1=(\bar{k}, y)=k_1y_1+k_2y_2+k_3y_3. \tag{5}$$

Отметим, что при преобразовании $x=Py$ ось y_1 пойдет вдоль главного направления.

Через S будем обозначать поверхности конусов $v\geq 0$.

Пусть p — положительное число и $p<\varrho(h_1S)$. Положим $q=\|h_1\|$ и $\alpha_1=p\beta_1/\|c\|(q|k_1|+p\sqrt{k_2^2+k_3^2})$, где символ $\|x\|$ означает эвклидову норму вектора x. Так как $s(x_1)=o(x_1)$, то существует число $\eta>0$ такое, что

$$|s(x_1)|<\alpha_1|x_1| \tag{6}$$

при $|x_1|\leq\eta$.

Рассмотрим в пространстве R_y^3 цилиндър Z, ограниченный боковой поверхностью $y_2^2+y_3^2=(\delta p)^2$ и основаниями $y_1^2=(\delta q)^2$, где $\delta=\eta(q|k_1|+p\sqrt{k_2^2+k_3^2})^{-1}$. Так как главное направление лежит вне области $v<0$, то основания цилиндра Z лежат в множестве $v>0$.

Лемма 1. *Боковая поверхность цилиндра Z пересекается траекториями системы* (4) *изнутри наружу.*

Доказательство. На боковой поверхности Z_s цилиндра выполняется неравенство $|y_1|\leq\delta q$. Отсюда, на основании неравенства Коши — Буняковского, имеем $|x_1|\leq|k_1||y_1|+\sqrt{k_2^2+k_3^2}\sqrt{y_2^2+y_3^2}\leq\eta$. Следовательно, на Z_s выполняется неравенство (6).

С другой стороны, производная функция $u=y_2^2+y_3^2$ по времени в силу системы дифференциальных уравнений (4) равна $\overset{\circ}{u}=2\beta_1(y_2^2+y_3^2)+2(c_2y_2+c_3y_3)s(x_1)$.

В силу (6) на Z_s имеем $|(c_2y_2+c_3y_3)s(x_1)|<\beta_1(y_2^2+y_3^2)$. Отсюда получаем $\overset{\circ}{u}>0$. Таким образом, лемма доказана.

Рассмотрим теперь область G, определяемую неравенствами $v<0$, $u>(\delta p)^2$. На основании леммы 1 и положительности операторов g^t при $t\leq 0$ следует, что множество G является положительно инвариантным множеством относительно фазового потока (g^t, R^3).

В [3] доказывается, что траектория C периодического решения $\varphi(t, \tilde{x})$ лежит в топологическом торе $G_r = G \cap K_r$, где K_r — шар диссипативности системы (2) с центром в начале координат и радиусом r.

Введем обозначение $S_r = \bar{G}_r \cap S$. Так как плоскость $\mu: a^2x_1 - ax_2 + x_3 = 0$ пересекает конические поверхности $v = 0$ только в начале координат 0, то расстояние $\varrho(S_r, \mu) > 0$.

Через S_{r,d_1} будем обозначать множество точек фазового пространства R^3, удовлетворяющих неравенству $\varrho(x, S_r) < d_1$, где положительное число $d_1 < \min\{1, \varrho(S_r, \mu)\}$. Отметим, что при этом выборе d_1 начало координат $0 \notin S_{r,d_1}$ и S_{r,d_1} будет лежать в замкнутом шаре $\|x\| \leqq r+1$.

Так как отображение $v = Ax + F(x)$ непрерывно в R^3, то существует положительная постоянная M, для которой $\|Ax + F(x)\| \leqq M$ при $\|x\| \leqq r+1$. Тогда легко видно, что решение $x(t) = x(t, x_0)$ системы (2) с начальным условием $x(0, x_0) = x_0 = \operatorname{colon}\{x_{10}, x_{20}, x_{30}\}$ при $x_0 \in S_{r, d_1^*} \cap \bar{G}_r$, $d_1^* < d_1/2$ будет определено при $|t| \leqq \bar{a}$, где $\bar{a}_1 < \min\{1/2, d_1/2M\}$ и $x(t) \in S_{r, d_1}$ при $|t| \leqq \bar{a}_1$.

Первое приближение $x^{(1)}$ нашего решения $x(t) = x(t, x_0)$ имеет вид

(7) $x_1^{(1)} = x_{10} + (x_{20} - ax_{10})t,\ x_2^{(1)} = x_{20} + (x_{30} - bx_{10})t,\ x_3^{(1)} = x_{30} + (-abx_{10} + g(x_{10}))t$

при $|t| \leqq \bar{a}_1$.

Из теоремы существования Пикара — Линделёфа (см. [5]) следует, что при $|t| \leqq \bar{a}_1$ имеет место неравенство

$$\|x - x^{(1)}\| \leqq MLt^2/2, \tag{8}$$

где L — постоянная Липшица для $v = Ax + F(x)$ в замкнутом шаре $\|x\| \leqq r+1$

Теперь рассмотрим функцию $\varphi(x) = a(a^2x_1 - ax_2 + x_3)^2 - g(x_1)[(a^2+b)x_1 - ax_2]$. Докажем, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Функция $\varphi(x)$ положительна на множестве $S \setminus \{0\}$.*

Доказательство. При линейном отображении $z = Bx$, где $B = (b_{ij})$ при $b_{11} = a^2$, $b_{12} = -a$, $b_{13} = 1$, $b_{21} = -b$, $b_{23} = 1$, $b_{32} = \sqrt{b}$ и остальные элементы $b_{ij} = 0$, получаем

$$\varphi(B^{-1}z) = az_1^2 - (z_1 - z_2)\,g(x_1). \tag{9}$$

При этом

$$x_1 = (z_1 - z_2 + az_3/\sqrt{b})/(a^2+b). \tag{10}$$

Поверхность (3) в новых координатах записывается в виде

$$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = 0. \tag{11}$$

На основании неравенства Коши — Буняковского из (9), (10) и (11) получаем

$$-\varphi(B^{-1}z) \leq -az_1^2 + (|z_1| + |z_2|)\,|g(x_1)| \leqq -az_1^2 + (|z_1| + |z_2|)\,k\,|x_1|$$

$$\leqq -az_1^2 + (|z_1| + |z_2|)\,k\,[|z_1| + \sqrt{a^2+b}\,\sqrt{z_2^2+z_3^2}/\sqrt{b}]/(a^2+b)$$

$$\leqq -az_1^2 + (|z_1| + |z_2|)\,k\,|z_1|\,(1 + \sqrt{a^2+b}/\sqrt{b})/(a^2+b)$$

С другой стороны, на поверхности S имеем $|z_2|\leqq|z_1|$. Отсюда в силу условия 3) следует, что при $x\neq 0$ выполняется неравенство

$$-\varphi(B^{-1}z)\leqq[-a+2k(\sqrt{b}+\sqrt{a^2+b})/(a^2+b)\sqrt{b}]\,z_1^2<0.$$

Это и доказывает лемму.

Так как множество S_r компактно и $0\overline{\in} S_r$, то в силу леммы 2 существует $\min\varphi(x)=2m_1>0$ при $x\in S_r$.

Положим

$$k^*=M^2L^2(b+b_1^2)+(b+k)^2r_1^2+bb_1^2r_1^2+MLr_1(a_1^2+aa_1+a_1k+b_1^2+2bb_1+b_1k+b),$$

где $a_1=1+a+a^2$, $r_1=1+r$ и $b_1=1+b$.

Пусть положительное число $\sigma_1<\overline{\alpha}_1$ удовлетворяет неравенствам

$$k^*\sigma_1\leqq m_1 \tag{12}$$

и

$$[2r_1(aa_1+k)+a_1ML]\,\sigma_1<d_1\sqrt{1+a^2+a^4}. \tag{13}$$

Выберем положительное число $d_1^*<d_1/2$ таким образом, чтобы при $x\in S_{r,\,d_1^*}\cap\overline{G}_r$ выполнялись неравенства

$$\varphi(x)\geqq m_1 \tag{14}$$

и

$$v(x)>-m_1\sigma_1. \tag{15}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Решение $x(t)=x(t,x_0)$ системы* (2) *с начальным условием* $0, x_0$, *где* $x_0\in S_{r,\,d_1^*}\cap\overline{G}_r$ *пересекает поверхность S в моменте $\overline{t}$, для которого* $-1/2<\overline{t}\leqq 0$.

Доказательство. Покажем, что $v(x(-\sigma_1))>0$. Отсюда, так как $v(x_0)\leqq 0$, будет следовать утверждение леммы 3.

Из (7) и (8) нетрудно получить оценку

$$\begin{aligned} z_{10}+[-az_{10}+g(x_{10})]\,t-a_1MLt^2/2<a^2x_1-ax_2+x_3\\ <z_{10}+[-az_{10}+g(x_{10})]\,t+a_1MLt^2/2,\end{aligned} \tag{16}$$

где $z_{10}=a^2x_{10}-ax_{20}+x_{30}$. Отсюда на основании неравенства (13) и $x_0\in S_{r,\,d_1^*}\cap\overline{G}_r$ при $t=-\sigma_1$ имеем

$$(a^2x_1-ax_2+x_3)^2\geqq z_{10}^2+2\,[az_{10}^2-g(x_{10})z_{10}]\,\sigma_1-a_1r_1ML\,(a_1+aa_1+k)\,\sigma_1^2. \tag{16}$$

Из (7) и (8) после соответствующих вычислений следует, что

$$\begin{aligned}(x_3-bx_1)^2\,|_{t=-\sigma_1}<z_{20}^2+2z_{20}\,[bx_{20}-g(x_{10})]\sigma_1\\ +[(b+k)^2r_1^2+b_1^2M^2L^2+b_1^2ML+b_1(b+k)r_1ML]\,\sigma_1^2\end{aligned} \tag{17}$$

и

$$bx_2^2\,|_{t=-\sigma_1}<bx_{20}^2+2bx_{20}\,(bx_{10}-x_{30})\,\sigma_1+b\,[b_1^2r_1^2+M^2L^2+r_1ML+b_1r_1ML]\,\sigma_1^2, \tag{18}$$

где $z_{20}=x_{30}-bx_{10}$.

Из (16), (17) и (18) получаем неравенство $v(x(-\sigma_1))>v(x_0)+2\varphi(x_0)\sigma_1-k^*\sigma_1^2$. Отсюда на основании (14) следует, что $v(x(-\sigma_1))>v(x_0)+(2m_1-k^*\sigma_1)\sigma_1$. Но тогда, используя (12) и (15), находим $v(x(-\sigma_1))>v(x_0)+m_1\sigma_1>0$. Лемма доказана.

Пусть D_1 — сечение области G полуплоскостью $x_1=0$, $x_2>0$; D_2 — полуплоскостью $x_1=0$, $x_2<0$. Очевидно сечения D_1 и D_2 не имеют контакта с полем направлений системы (2). При этом траектории системы (2) пересекают сечение D_1, переходя из полупространства $x_1<0$ в полупространство $x_1>0$; сечение D_2 пересекается траекториями в обратном направлении.

Обозначим через R множество точек $x\in G_r$, удовлетворяющих условию $\varrho(x, S_r)\geq d_1^*$. Через Z_{i,d_2} будем обозначать множество точек $x\in G_r$, удовлетворяющих неравенству $\varrho(x, D_i^*)<d_2$, где $D_i^*=R\cap D_i$ и $d_2<\min\{d_1^*, \varrho(0, D_i)\}$.

Нетрудно видеть, что решение $x(t)=x(t, x_0)$ системы (2) с начальным условием $0, x_0$ при $x_0\in Z_{i,d_2^*}$ и $0<d_2^*<d_2/2$ определено на интервале $|t|\leq\bar{a}_2$, где $\bar{a}_2<\min\{1/2, d_2/2M\}$ и $x(t)\in Z_{i,d_2}$ при $|t|\leq\bar{a}_2$. Первое приближение $x^{(1)}$ нашего решения $x(t)$ определяется соотношением (7) и при $|t|\leq\bar{a}_2$ удовлетворяет неравенству (8).

Теперь рассмотрим функцию $\varphi_1(x)=x_2-ax_1$. Очевидно функция $|\varphi_1(x)|$ положительна на компактном множестве D_i^*. Следовательно, существует $\min|\varphi_1(x)|=4m_2>0$ при $x\in D_i^*$. Пусть положительное число $\sigma_2<\bar{a}_2$ удовлетворяет неравенству

$$\sigma_2<2m_2/ML. \tag{19}$$

В дальнейшем будем предполагать, что число $d_2^*>\min\{d_2/2, m_2\sigma_2\}$ настолько малое, что при $x\in G_r$ и $\varrho(x, D_i^*)<d_2^*$ выполняется соотношение

$$|\varphi_1(x)|\geq 2m_2. \tag{20}$$

Лемма 4. *Решение* $x(t)=x(t, x_0)$ *системы* (2) *с начальным условием* $0, x_0$ *при* $x_0\in Z_{i,d_2^*}$ *и* $x_{10}>0$ *пересекает* D_i *в моменте* $\bar{t}$, *для которого* $|\bar{t}|<1/2$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $x_0\in Z_{1,d_2^*}$ и $x_{10}>0$. Покажем, что $x_1(\sigma_2)<0$. В самом деле, из (7) и (8) при $|t|\leq\bar{a}_2$ имеем $x_1(t)<x_{10}+(x_{20}-ax_{10})t+MLt^2/2$. Отсюда при $t=-\sigma_2$ находим $x_1(-\sigma_2)<x_{10}-(x_{20}-ax_{10})\sigma_2+ML\sigma_2^2/2$. Очевидно, из (20) следует в этом случае, что $x_{20}-ax_{10}\geq 2m_2$ и $x_1(-\sigma_2)<x_{10}+(-2m_2+ML\sigma_2/2)\sigma_2$. Из последнего неравенства на основании (19) заключаем, что $x_1(-\sigma_2)<x_{10}-m_2\sigma_2<0$.

Пусть теперь $x_0\in Z_{2,d_2^*}$ и $x_{10}>0$. Тогда, как и выше, имеем $x_1(\sigma_2)<x_{10}+(x_{20}-ax_{10})\sigma_2+ML\sigma_2^2/2$. И так как из (20) следует $x_{20}-ax_{10}\leq-2m_2$, то опять $x_1(\sigma_2)<0$. Полученные соотношения и доказывают лемму.

Обозначим через ω период нашего периодического решения $\varphi(t, \bar{x})$. Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Для периода* ω *периодического решения* $\varphi(t, \tilde{x})$ *систеты* (2) *справедлива оценка*

$$\omega\leq 4r/(ab-k)d+3, \tag{21}$$

где $d=\min\{d_1^*, d_2^*\}$.

Доказательство. Очевидно вдоль траектории периодического решения $\varphi(t, \widetilde{x})$ имеем

$$|\varphi_3(t, \widetilde{x})| \leqq r. \tag{22}$$

Предположим, что $\varphi(t, \widetilde{x})$ при $0 \leqq t \leqq 1$ лежит в области $x_1 > 0$. Тогда возможно одно из двух предположений:

$$\text{или } \varrho(\varphi(t, \widetilde{x}), D_2) < d \text{ при } t = 1, \tag{23}$$

или

$$\varrho(\varphi(t, \widetilde{x}), D_2) \geqq d \text{ при } t = 1. \tag{24}$$

Если выполняется соотношение (23), то можно считать, что $\varrho(\varphi(t, \widetilde{x}), S_r) \geqq d$ при $t = 1$. Действительно, при $\varrho(\varphi(t, \widetilde{x}), S_r) < d$ траектория решения $\varphi(t, \widetilde{x})$ в силу леммы 3 пересекает S в моменте $t \geqq 1/2$, что невозможно в силу положительной инвариантности множества G_r относительно фазового потока $\{g^t, R^3\}$. Отсюда следует, что $\varrho(\varphi(1, \widetilde{x}), D_2^*) < d_2$ и, следовательно, в силу леммы 4 $\varphi(t, \widetilde{x})$ пересекает D_2 в моменте $t \leqq 3/2$.

Пусть теперь выполняется вторая возможность (24). Возьмем произвольное число γ и рассмотрим момент времени $t_3 = 2r/(ab-k)d + 1 + \gamma$.

Покажем, что при $1 \leqq t \leqq t_3$ не выполняется неравенство $\varrho(\varphi(t, \widetilde{x}), D_2) \geqq d$. Доказательство этого утверждения проведем из обратного предположения. Действительно, если указанное неравенство выполняется при $t \in [1, t_3]$, то и $\varrho(\varphi(t, \widetilde{x}), D_1) \geqq d$ для всех $t \in [1, t_3]$. В противном случае нетрудно видеть, что $\varrho(\varphi(t, \widetilde{x}), D_1^*) < d_2^*$ для некоторого $t \geqq 1$. Но тогда решение $\varphi(t, \widetilde{x})$ пересекает D_1 в моменте $t \geqq 1/2$, переходя из полупространства $x_1 < 0$ в полупространство $x_1 < 0$, что невозможно. Итак, $\varrho(\varphi(t, \widetilde{x}), D_i) \geqq d$ при $1 \leqq t \leqq t_3$. В таком случае вдоль траектории $\varphi(t, \widetilde{x})$ в силу системы (2) при $1 \leqq t \leqq t_3$ имеем $\mathring{x}_3 \leqq (k-ab)d$. Интегрируя последнее неравенство при $1 \leqq t \leqq t_3$, получаем $x_3(t) \leqq x_3(1) + (k-ab)d(t-1)$. Отсюда при $t = t_3$ следует, что $x_3(t_3) \leqq -r-(ab-k)d\gamma < -r$. Это неравенство противоречит соотношению (22). И, следовательно, существует момент $t^* \in (1, t_3)$, для которого $\varrho(\varphi(t^*, \widetilde{x}), D_2) < d$. Тогда в силу выбора d следует, что траектория движения $\varphi(t, \widetilde{x})$ пересекает D_2 в моменте $\widetilde{t} < 2r/(ab-k)d + 3/2 + \gamma$. Из произвольности положительного числа γ вытекает, что $\widetilde{t} \leqq 2r/(ab-k)d + 3/2$.

Пусть $t_0 > 0$ — первый момент пересечения решения $\varphi(t, \widetilde{x})$ с D_2. В силу доказанного $t_0 \leqq \widetilde{t}$. Отметим, что любая другая траектория системы (2), начинающаяся из сечения D_1 при $t = 0$ и не выходящая из тора G_r, пересекает D_2 за время, не превосходящее $\widetilde{t}$. В частности, эта оценка имеет место и для любой другой периодической траектории системы (2), если такая существует.

Так как ω — период $\varphi(t, \widetilde{x})$, то при $t_0 \leqq t \leqq \omega$ траектория решения $\varphi(t, \widetilde{x})$ будет лежать в замкнутом множестве $x_1 \leqq 0$.

Из системы (2) в силу нечетности функции $g(x_1)$ следует, что если $\varphi(t, x_0)$ — решение системы (2), то $-\varphi(t, x_0)$ является тоже решением этой системы. Иными словами, кривая, симметричная траектории относительно начала координат, сама является траекторией. Отсюда в силу того, что замкнутая дуга $\varphi([t_0, \omega], \widetilde{x})$ периодического движения $\varphi(t, \widetilde{x})$ находится в области $x_1 \leqq 0$, следует, что дуга — $\varphi([t_0, \omega], \tilde{x})$ периодического движения — $\varphi(t, x)$ системы (2) временной длины $\omega - t_0$ лежит в замкнтой области $x_1 \geqq 0$. При этом — $\varphi(t_0, \tilde{x}) \in D_1$ и — $\varphi(\omega, x_0) \in D_2$. Но тогда в силу доказанного и автономности системы (2) следует, что $\omega - t_0 \leqq \tilde{t}$. Таким образом, $\omega \leqq 2\tilde{t}$. Теорема доказана.

Отметим, что оценка (21) имеет место для любого периодического движения системы (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Плисс. Об ограниченности решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. *Доклады АН СССР*, **139**, 1961, 302—304.
2. В. А. Плисс. Нелокальные проблемы теории колебаний. Москва, 1964.
3. Н. Н. Георгиев. Исследование нелинейной дифференциальной системы третьего порядка. *Плиска*, 3, 1980 (в печати).
4. J. L. Massera. The existence of periodic solutions of sistems of differential equations. *Duke Math. J.*, **17**, 1950.
5. Ф. Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, 1970.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 1. 2. 1978