Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

ASYMPTOTISCHE INVARIANZ BEI HALBGRUPPEN STOCHASTISCHER KERNE I

KARL-HEINZ FICHTNER, JOHANNES KERSTAN

Bereits Doob (1953) erkannte, daß die stationären Poissonschen Punktprozesse auf den reellen Zahlen, und damit, alle ihre Mischungen, invariant gegenüber jeder räumlich homogenen Verschiebung sind. Daß diese Eigenschaft charakteristisch für die Mischungen stationärer Poissonscher Punktprozesse ist, kann man, unter Verwendung eines Konvergenzsatzes von Dobruschin (1956) für homogene Verschiebungen von Punktprozessen nachweisen. Grundlegende Voraussetzung in diesem Satz ist eine gewisse Glättungseigenschaft einer Folge von Verteilungsgesetzen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ auf den reellen Zahlen. Stone (1968) zeigte, daß die Gültigkeit dieser Eigenschaft nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die Behauptung des Konvergenzsatzes ist. Herrmann (1966) bewies, daß die Glättungsbedingung genau dann erfüllt ist, wenn die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ schwach asymptotisch gleichverteilt ist, d. h. für alle reellen Zahlen x und alle bezüglich des Lebesgueschen Maßes absolut stetigen Verteilungsgesetzes λ die Konvergenz der Variationsabstände $\| \delta_x * \lambda * \lambda_n - \lambda * \lambda_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ statt hat.

Um die Ergebnisse von Doob, Dobruschin und Stone für ortsabhängige Verschiebungen auf einem vollständigen separablen metrischen Raum E verallgemeinern zu können, muß man zunächst, statt der Faltungshalbgruppe der Verteilungsgesetze auf den reellen Zahlen, den Betrachtungen eine Halbgruppe stochastischer, oder allgemeiner, substochastischer Kerne auf E zugrunde legen. Dabei gilt es, den Begriff der schwach asymptotisch gleichverteilten Folge von Verteilungsgesetzen sachgmäß zu verallgemeinern. Erste Ansätze dazu sind in Debes et al. (1971) zu finden. Der dort entwickelte Gleichverteilungsbegriff für Folgen substochastischer Kerne, näher untersucht in Fichtner (1971), ließ jedoch nicht eine volle Verallgemeinerung des Konvergenzsatzes von Dobruschin zu. So mußten schärfere Endlichkeitsforderungen an das Intensitätsmaß des zu verschiebenden Punktprozesses gestellt werden.

Zusammen mit Fichtner et al. (1978) bildet die vorliegende Arbeit die Grundlage für die Untersuchungen in Fichtner et al. (1979), wo die bereits angesprochenen Resultate von Doob, Dobruschin und Stone verallgemeinert werden. Neben einigen allgemeinen Eigenschaften von Halbgruppen substochastischer Kerne wird speziell die Rolle sogenannter konvergenzerzeugender Folgen aus der Halbgruppe beleuchtet. Wie im 2. Abschnitt der Arbeit gezeigt wird, stellt dieser Begriff ebenfalls eine Verallgemeinerung des Begriffs der schwach asymptotisch gleichverteilten Folge von Verteilungsgesetzen dar. Eine Zusammenstellung der grundlegenden Begriffe und Resultate ist im 1. Abschnitt nachzulesen.

1. Grundbegriffe und Resultate. 1.1. Bezeichnungen. Es bezeichnen $[E, \varrho]$ einen vollständigen separablen metrischen Raum, $\mathfrak{A}$ die σ-Algebra der Borelmengen aus E und $\mathfrak{B}$ das System der beschränkten Mengen aus $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{C}$ sei die Algebra der stetigen beschränkten reellen Funktionen auf E and $\mathfrak{C}^{\circ\circ}$ die Menge der finiten Funktionen aus $\mathfrak{C}$.

Mit M bezeichnen wir die Menge aller Maße μ auf $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft $\mu(B)<\infty$; $\forall B\in\mathfrak{B}$. Offensichtlich ist das Maß O, definiert durch $O(A)=0$; $\forall\in\mathfrak{A}$ ein Element von M. M wird als topologischer Raum betrachtet, versehen mit der gröbsten Topologie, bezüglich der alle Abbildungen $\mu\to\mu*f=_{\mathrm{Def}}\int f(x)\mu(dx)$ von M in die reellen Zahlen R stetig sind, wobei f die Algebra $\mathfrak{C}^{\circ\circ}$ durchläuft.

Für ein Maß μ auf $\mathfrak{A}$ und eine nichtnegative reelle Funktion f auf E bezeichnen wir mit $\mu.f$ das durch

$$(\mu f)(A) =_{\mathrm{Def}} \int f(x) k_A(x) \mu(dx); \quad \forall \in \mathfrak{A}$$

definierte Maß auf $\mathfrak{A}$ (k_A sei die Indikatorfunktion der Menge A). Unter einem Kern auf E verstehen wir eine Abbildung P von $E \times \mathfrak{A}$ in die reellen Zahlen, dergestalt, daß für jedes $A \in \mathfrak{A}$ die Abbildung $x \to P(x, A)$ meßbar ist und für jedes $x \in E$ durch $P(x, \ )$ ein Maß auf $\mathfrak{A}$ gegeben ist. P heißt substochastisch, wenn $P(x, E) \leq 1$; $\forall x \in E$ ist. Stochastisch ist P, wenn gilt $P(x, E) = 1$; $\forall x \in E$. Für zwei substochastische Kerne P_1 und P_2 auf E ist durch

$$(P_1 * P_2)(x, A) =_{\mathrm{Def}} \int P_2(y, A) P_1(x, dy); \quad \forall x \in E, \quad \forall A \in \mathfrak{A}$$

wieder ein substochastischer Kern $P_1 * P_2$ gegeben.

Mit I bezeichnen wir den durch $I(x, A) = \delta_x(A)$; $\forall x \in E \ \forall A \in \mathfrak{A}$ charakterisierten stochastischen Kern auf E. Offensichtlich gilt für jeden Kern P auf E

$$I * P = P * I = P.$$

Für ein Maß μ auf $\mathfrak{A}$ und einen Kern P über E bezeichnen wir mit $\mu * P$ das durch $\mu * P(A) =_{\mathrm{Def}} \int P(x, A) \mu(dx)$; $\forall A \in \mathfrak{A}$ definierte Maß auf $\mathfrak{A}$. Schließlich setzen wir für jede meßbare Funktion f und $x \in E$

$$P * f(x) = \int f(y) \ P(x, dy),$$

falls der Ausdruck rechts Sinn hat.

1.2. V e r s c h i e b u n g s h a l b g r u p p e n. Als Verschiebungshalbgruppe auf E bezeichnen wir ein System $\mathfrak{P}$ substochastischer Kerne auf E mit folgenden Eigenschaften:

(V 1) Es ist $I \in \mathfrak{P}$.

(V 2) Für alle $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$ ist auch $P_1 * P_3 \in \mathfrak{P}$.

(V 3) Für alle $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$ gilt: $P_1 * P_2 = P_2 * P_1$.

Bezüglich einer Verschiebungshalbgruppe $\mathfrak{P}$ heißt ein Maß $\mu \in M$ $\mathfrak{P}$-invariant, wenn gilt $\mu * P = \mu$: $\forall P \in \mathfrak{P}$. Mit $M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{inv}}$ bezeichnen wir die Menge aller $\mathfrak{P}$-invarianten Maße. Man erkennt sofort die folgenden elementaren Eigenschaften der $\mathfrak{P}$-invarianten Maße:

(Inv 1) Es ist $O \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{inv}}$.

(Inv 2) Für alle Folgen $\mu_1, \ldots, \mu_n \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{inv}}$ und alle $c_1, \ldots, c_n \geq 0$

ist $\Sigma c_i \mu_i \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{inv}}$.

Für Überlegungen im Rahmen von Beweisen und bei bestimmten Begriffsbildungen ist es nützlich, den Begriff des $\mathfrak{P}$-beschränkten Maßes einzuführen.

Bezüglich einer Verschiebungshalbgruppe heißt ein Maß μ auf $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{P}$-beschränkt, wenn gilt: $\sup\limits_{P \in \mathfrak{P}} (\mu * P)(B) < \infty$; $\forall B \in \mathfrak{B}$. Mit $M_{\mathfrak{P}}$ bezeichnen wir die Menge aller $\mathfrak{P}$-beschränkten Maße. Man sieht leicht, daß die folgenden Beziehungen richtig sind:

(B 1) Es ist stets $M_{\mathfrak{P}}^{\text{inv}} \subseteq M_{\mathfrak{P}} \subseteq M$.

(B 2) Für alle Folgen $\mu_1, \ldots, \mu_n \in M_{\mathfrak{P}}$ und alle

$$c_1, \ldots, c_n \geqq 0 \text{ ist } \Sigma c_i \mu_i \in M_{\mathfrak{P}}.$$

(B 3) Es sei $\mu \in M_{\mathfrak{P}}$. Gilt für ein Maß λ auf $\mathfrak{A}$

$$\lambda(B) \leqq \mu(B); \quad \forall B \in \mathfrak{B}, \text{ so ist auch } \lambda \in M_{\mathfrak{P}}.$$

(B 4) Für alle $\mu \in M_{\mathfrak{P}}$ und $P \in \mathfrak{P}$ ist $\mu * P \in M_{\mathfrak{P}}$.

1.3. **Praeinvariante Maße.** Grundlegend für die Anwendung der Ergebnisse dieser Arbeit in [9] sind die praeinvarianten Maße bezüglich einer Verschiebungshalbgruppe. Damit sind anschaulich die Maße gemeint, die bei ständig wiederholter Transformation durch Verschiebungen der Halbgruppe sich immer besser an ein invariantes Maß anschmiegen. Die Präzisierung dieses Begriffs verlangt die Auswahl eines Filters auf $\mathfrak{P}$ und einer Topologie für solche Maße. Für Verschiebungshalbgruppen $\mathfrak{P}$ ist in natürlicher Weise eine Filterbasis $\Pi(\mathfrak{P})$ über $\mathfrak{P}$ erklärt, bei der anschaulich gesprochen jede Faltung (gemeint ist die Operation $*$) zu einer weiteren Annäherung an den idealen Grenzpunkt führt. $\Pi(\mathfrak{P})$ besteht aus allen Teilmengen von $\mathfrak{P}$, die sich mit Hilfe eines $P_0 \in \mathfrak{P}$ in der Form $\{P_0 * P;\ P \in \mathfrak{P}\}$ darstellen lassen. $\Pi(\mathfrak{P})$ nennen wir die natürliche Filterbasis auf $\mathfrak{P}$.

Bei der Präzisierung des Praeinvarianzbegriffes gehen wir von der Menge $M_{\mathfrak{P}}$ der $\mathfrak{P}$-beschränkten Maße aus. Wir versehen $M_{\mathfrak{P}}$ mit der Relativtopologie der in 1.1. eingeführten Topologie auf M. Da $M_{\mathfrak{P}}$ invariant gegenüber Transformationen mittels der Elemente aus $\mathfrak{P}$ ist (siehe Eigenschaft (B 4)), definiert jedes $\mu \in M_{\mathfrak{P}}$ eine Abbildung $P \to \mu * P$ von $\mathfrak{P}$ in $M_{\mathfrak{P}}$. Man kann fragen, ob diese Abbildung längs der natürlichen Filterbasis auf $\mathfrak{P}$ in der schwachen Topologie konvergiert. Insbesondere kann man diejenigen Maße auszeichnen, für die Konvergenz gegen ein $\mathfrak{P}$-invariantes Maß eintritt.

Definition. *Bezüglich einer Verschiebungshalbgruppe $\mathfrak{P}$ heißt ein Maß μ auf $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{P}$-praeinvariant, wenn es $\mathfrak{P}$-beschränkt ist und wenn die Folge $(\mu * P)_{P \in \mathfrak{P}}$ entlang der natürlichen Filterbasis $\Pi(\mathfrak{P})$ auf $\mathfrak{P}$ gegen ein $\mathfrak{P}$-invariantes Maß konvergiert. Für jedes $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{pr}}$ bedeutet $[\mu]$ den Limes von $(\mu * P)_{P \in \mathfrak{P}}$ entlang $\Pi(\mathfrak{P})$.*

Ist μ ein $\mathfrak{P}$-praeinvariantes Maß mit $\bar{\mu} = [\mu]$, so gelten die folgenden Beziehungen:

(k) $$\inf_{P_1 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} |\bar{\mu} * f - \mu * P_1 * P_2 * f| = 0; \quad \forall f \in \mathfrak{C}^{\circ\circ}.$$

(k+) $$\bar{\mu} * f = \inf_{P_1 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} \mu * P_1 * P_2 * f; \quad \forall f \in \mathfrak{C}^{\circ\circ}.$$

(k⁻) $$\bar{\mu} * f = \sup_{P_1 \in \mathfrak{P}} \inf_{P_2 \in \mathfrak{P}} \mu * P_1 * P_2 * f; \quad \forall f \in \mathfrak{C}^{\circ\circ}.$$

Ist umgekehrt μ ein Maß aus $M_{\mathfrak{P}}$, für das ein $\mathfrak{P}$-invariantes Maß $\bar{\mu}$ existiert, so daß wenigstens eine der Beziehungen (k), (k+) oder (k⁻) erfüllt ist, so muß μ $\mathfrak{P}$-praeinvariant und $\bar{\mu} = [\mu]$ sein.

Man erkennt weiter die folgenden elementaren Eigenschaften der praeinvarianten Maße:

(p 0) Ist $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{inv}}$, dann ist auch $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{pr}}$ und wir haben $[\mu] = \mu$.

(p 1) Für alle Folgen $\mu_1, \ldots, \mu_n \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{pr}}$ und $c_1, \ldots, c_n \geq 0$

ist $\Sigma c_i \mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{pr}}$ und es gilt: $[\Sigma_{i=1}^n c_i \mu_i] = \Sigma_{i=1}^n c_i [\mu_i]$.

(p 2) Für alle $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{pr}}$ und $P \in \mathfrak{P}$ ist $\mu * P \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{pr}}$ und es gilt: $[\mu * P] = [\mu]$.

1.'. Konvergenzerzeugende Folgen. Bei einer bestimmten Abzählbarkeitsbedingung an die Verschiebungshalbgruppe läßt sich die Filterkonvergenz bei der Definition der Praeinvarianz auf Folgenkonvergenz zurückführen Das begriffliche Hilfsmittel dafür sind die konvergenzerzeugenden Folgen von Verschiebungen.

Definition. *Unter einer konvergenzerzeugenden Folge von Verschiebungen aus einer Verschiebungshalbgruppe $\mathfrak{P}$ (kurz: K-Folge über $\mathfrak{P}$) verstehen wir eine Folge $P_0, P_1, P_2, \ldots,$ von Elementen aus $\mathfrak{P}$, so daß für jedes $\mathfrak{P}$ praeinvariante Maß μ gilt:* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu * P_n = [\mu]$.

Weil für alle $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{pr}}$ und $P \in \mathfrak{P}$ stets $\mu * P \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{pr}}$ und $[\mu * P] = [\mu]$ ist, muß für jede K-Folge $P_0, P_1, \ldots,$ über $\mathfrak{P}$ und jedes $P \in \mathfrak{P}$

$$[\mu] = \lim_{n\to\infty} (\mu * P) * P_n \quad \text{und} \quad \text{damit} \quad [\mu] = \lim_{n\to\infty} \mu * (P * P_n)$$

sein. Wir haben damit die folgende elementare Eigenschaft konvergenzerzeugender Folgen:

(K_0) Ist $P_0, P_1, \ldots,$ eine K-Folge über $\mathfrak{P}$ und $P \in \mathfrak{P}$,

so ist auch $P * P_0, P * P_1, \ldots,$ eine K-Folge über $\mathfrak{P}$.

Ist ein Maß μ $\mathfrak{P}$-praeinvariant, so ist μ $\mathfrak{P}$-beschränkt und es konvergiert $\mu * P_0$, $\mu * P_1, \ldots$ für jede K-Folge über $\mathfrak{P}$ gegen ein $\mathfrak{P}$-invariantes Maß. Die Frage lautet, wann nur die $\mathfrak{P}$-praeinvarianten Maße diesen beiden Forderungen genügen. Die im folgenden formulierte Separabilitätseigenschaft für Verschiebungshalbgruppen stellt eine hinreichende Bedingung dar.

Eine Verschiebungshalbgruppe $\mathfrak{P}$ heißt separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{P}$ gibt, so daß die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(S 1) Für alle $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{pr}}$ und alle $f \in \mathfrak{C}^{\circ\circ}$ gilt:

$$\inf_{Q \in \mathfrak{Q}} \sup_{P \in \mathfrak{P}} \left| [\mu] * f - \mu * Q * P * f \right| = 0.$$

(S 2) Ein Maß $\mu \in M$ ist $\mathfrak{P}$-invariant, wenn gilt: $\mu * Q = \mu$; $\forall Q \in \mathfrak{Q}$.

Theorem 1. *Es seien $\mathfrak{P}$ eine separable Verschiebungshalbgruppe auf E und μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$.*

μ ist genau dann $\mathfrak{P}$-praeinvariant, wenn es $\mathfrak{P}$-beschränkt ist und für jede K-Folge $P_0, P_1, \ldots$, über $\mathfrak{P}$ die Folge $\mu * P_0$, $\mu * P_1, \ldots$, gegen ein $\mathfrak{P}$-invariantes Maß konvergiert.

1.5. **Mischende flüchtige separable stetige Verschiebungshalbgruppen und ihre beiden Haupteigenschaften.** Für die geplanten Anwendungen auf Punktprozesse in [9] sind einige Spezialisierungen für die Verschiebungshalbgruppen notwendig, die teils inhaltlich und teils beweistechnisch begründet sind.

Eine Verschiebungshalbgruppe $\mathfrak{P}$ auf E heißt stetig, wenn für alle $P \in \mathfrak{P}$ und $f \in \mathfrak{C}$ auch $P * f \in \mathfrak{C}$ ist.

$\mathfrak{P}$ heißt flüchtig, wenn es kein $\mathfrak{P}$-invariantes Verteilungsgesetz gibt.

Eine Verschiebungshalbgruppe $\mathfrak{P}$ heißt mischend, wenn für alle $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{inv}}$, jedes $P_0 \in \mathfrak{P}$ und alle $B \in \mathfrak{B}$ gilt:

$$\inf_{P \in \mathfrak{P}} \int \left| P(x, B) - (P * P_0)\,(x, B) \right| \mu(dx) = 0.$$

Ist eine Verschiebungshalbgruppe $\mathfrak{P}$ konvex, d. h. wir haben $\Sigma c_i P_i \in \mathfrak{P}$ für alle Folgen $P_1, \ldots, P_n \in \mathfrak{P}$ und alle $c_1, \ldots, c_n \geq 0$ mit $\Sigma c_i = 1$, dann ist für alle $P_0 \in \mathfrak{P}$ stets $\frac{1}{n} \Sigma_0^k \in \mathfrak{P}$. Dabei ist für jedes $P \in \mathfrak{P}$ die Folge $P^1, P^2, \ldots$ definiert durch

$$P^1 = F, \quad P^{n+1} = P^n * P; \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Wir haben dann für alle $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{inv}}$ und $B \in \mathfrak{B}$

$$\begin{aligned}
&\inf_{P \in \mathfrak{P}} \int \left| P(x, B) - (P * P_0)\,(x, B) \right| \mu(dx) \\
&\leq \overline{\lim_{n \to \infty}} \int \left| \frac{1}{n} \Sigma F_0^k (x, B) - \left(\left(\frac{1}{n} \Sigma P_0^k \right) * P_0 \right) (x, B) \right| \mu(dx) \\
&= \overline{\lim_{n \to \infty}} \int \frac{1}{n} \left| P_0(x, B) - P_0^{n+1} (x, B) \right| (dx) \\
&\leq \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{2}{n} \mu(B) = 0
\end{aligned}$$

Wir erhalten also die Gültigkeit folgender Beziehung:

1.5.1. *Jede konvexe Verschiebungshalbgruppe ist mischend.*

Für die Anwendung auf Punktprozesse ist das folgende Theorem grundlegend:

Theorem 2. *Für jede flüchtige mischend separable stetige Verschiebungshalbgruppe auf E gelten folgende Aussagen:*

(I) *Für alle $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{pr}}$, alle $B \in \mathfrak{B}$ und alle K-Folgen $P_0, P_1, \ldots$, über $\mathfrak{P}$ ist*

$$\lim_{n\to\infty} \int (P_n(x, B))^2 \mu(dx) = 0.$$

(II) *Eine Folge von Verschiebungen $P_0, P_1, \ldots,$ aus $\mathfrak{P}$ ist genau dann eine K-Folge über $\mathfrak{P}$, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \int |P_n(x, B) - (P * P_n)(x, B)| \mu(dx) = 0$$

ist für alle $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$, alle $P \in \mathfrak{P}$ und alle $[\mu]$-Stetigkeitsmengen $B \in \mathfrak{B}$.

(Ein $B \in \mathfrak{B}$ heißt Stetigkeitsmenge zu einem vorgegebenen Maß λ, wenn der Rand von B bezüglich λ das Maß 0 hat.)

In Ergänzung zu Theorem 2 zeigen wir später noch:

1.5.2. *Es sei $\mathfrak{P}$ eine separable stetige Verschiebungshalbgruppe auf E. Sind die Aussagen* (I) *und* (II) *unter Theorem 2 richtig, so ist $\mathfrak{P}$ flüchtig und mischend.*

Im Falle flüchtiger separabler stetiger Verschiebungshalbgruppen ist die Mischungseigenschaft gleichbedeutend mit einer Vollständigkeitseigenschaft der Menge der praeinvarianten Maße. Wir haben nämlich die folgende Charakterisierung des Begriffs „mischend“:

Theorem 3. *Es sei $\mathfrak{P}$ eine flüchtige separable stetige Verschiebungshalbgruppe auf E.*

$\mathfrak{P}$ ist genau dann mischend, wenn für alle $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{inv}}$, alle $P \in \mathfrak{P}$ und alle $A \in \mathfrak{A}$ das Maß $\mu k_{\overline{A}} + (\mu k_A) * P \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$ ist und es gilt: $\mu = [\mu k_{\overline{A}} + (\mu k_A) * P]$.

2. Räumlich homogene Verschiebungshalbgruppen. Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Folgen homogen verschobener Punktprozesse gegen Mischungen Poissonscher Punktprozesse und gewissen Gleichverteilungseigenschaften für Folgen von Verteilungsgesetzen (siehe etwa [10]), wie sie in [5] und [6] untersucht wurden. Wir wollen in diesem Abschnitt darstellen, inwieweit sich die Theorie dieser Gleichverteilungseigenschaften in das im 1. Abschnitt dargestellte Begriffssystem einordnet. Dabei wollen wir uns auf den Fall $E = R^s$ $(s \geq 1)$ beschränken. Die im 1. Abschnitt eingeführten Begriffe und Bezeichnungen beziehen sich deshalb im folgenden immer auf den s-dimensionalen euklidischen Raum $E = R^s$.

Wir führen zunächst noch einige Bezeichnungen ein. Für Maße $\mu_1, \mu_2 \in M$ bezeichnen $\mu_1 * \mu_1$ deren Faltung. $\mathfrak{W}$ sei die Menge aller Verteilungsgesetze auf $[E, \mathfrak{A}]$, und $\mathfrak{W}^\delta$ die Menge aller Diracmaße δ_x $(x \in E)$. Für jedes $\alpha \in \mathfrak{W}$ definieren wir einen stochastischen Kern P_α auf $[E, \mathfrak{A}]$ durch $P_\alpha(x, A) = \delta_x * \alpha(A)$; $\forall A \in \mathfrak{A}$, $\forall x \in E$. Schließlich setzen wir $\mathfrak{P} = \{P_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{W}\}$. Für alle $\alpha, \beta \in \mathfrak{W}$ haben wir $P_\alpha * P_\beta = P_{(\alpha * \beta)}$, $P_{\delta_0} * P_\alpha = P_\alpha$.

Man sieht deshalb sofort:

2.1. *$\mathfrak{P}$ ist eine Verschiebungshalbgruppe.*

Offensichtlich gilt auch:

2.2. *$\mathfrak{P}$ ist stetig.*

Weiter ist für alle Folgen $c_1, \ldots, c_n \geq 0$ mit $\Sigma c_i = 1$ und alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i P_{\alpha_i} = P_{(\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i)}.$$

$\mathfrak{P}$ ist also konvex. Wegen 1.5.1. erhalten wir deshalb:

2.3. *$\mathfrak{P}$ ist mischend.*

Mit L bezeichnen wir im folgenden das Lebesguesche Maß auf $E = R_s$. Für ein Maß $\mu \in M$ ist genau dann $\mu * \alpha = \mu$; $\forall \alpha \in \mathfrak{W}$ wenn ein $c \geqq 0$ existiert, mit $\mu = c \cdot L$. Weil stets $\mu * P_\alpha = \mu * \alpha$ ist, erhalten wir deshalb:

2.4. *Es ist* $M_{\mathfrak{P}}^{\text{inv}} = \{c \cdot L;\ c \geqq 0\}$.

Aus 2.4. folgt sofort:

2.5. *$\mathfrak{P}$ ist flüchtig.*

Wir zeigen nun:

2.6. *Es ist genau dann $\mu \in M_{\mathfrak{P}}$, wenn gilt:*

$$\sup_{x \in E} \mu * \delta_x (B) < \infty; \quad \forall B \in \mathfrak{B}.$$

Beweis. Wie man leicht zeigt, ist für ein $\mu \in M$ genau dann

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{W}} \mu * \alpha (B) < \infty; \quad \forall B \in \mathfrak{B}$$

wenn

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{W}^\delta} \mu * \alpha (B) < \infty; \quad \forall B \in \mathfrak{B}.$$

Weiter folgt unmittelbar aus den Definitionen, daß stets gilt:

$$\sup_{P \in \mathfrak{P}} \mu * P(B) = \sup_{\alpha \in \mathfrak{W}} \mu * \alpha (B), \quad \sup_{\alpha \in \mathfrak{W}^\delta} \mu * \alpha (B) = \sup_{x \in E} \mu * \delta_x (B).$$

Daraus können wir nun die Behauptung von 2.6. ableiten.

2.7. *$\mathfrak{P}$ ist separabel.*

Beweis. Wir setzen

$$B_n = ([-n, n))^s; \quad \forall n \geqq 1.$$

$$\alpha_n = (2n)^{-s} (L k_{B_n}); \quad \forall n \geqq 1.$$

$$\mathfrak{W}_0 = \{\alpha_n;\ n \geqq 1\} \cup \{\delta_x;\ \text{alle Komponenten von } x \text{ sind rational}\}.$$

$$\mathfrak{Q} = \{P_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{W}_0\}.$$

Ist $\mu \in M$, so daß für jedes $x \in R^s$ mit rationalen Komponenten gilt $\mu * \delta_x = \mu$, so muß ein $c \geqq 0$ existieren mit $\mu = c \cdot L$. Ein $\mu \in M$ mit $\mu * P = \mu$; $\forall P \in Q$ hat also stets die Gestalt $\mu = c \cdot L$ und ist nach 2.4. demzufolge $\mathfrak{P}$-invariant. Die Bedingung (S 2) ist also für die abzählbare Menge $\mathfrak{Q}$ erfüllt.

Wir zeigen nun, daß auch (S 1) erfüllt ist. Dazu sei zunächst $\mu \in M_{\mathfrak{P}}$ und $f \in \mathfrak{C}^{\circ\circ}$. Unter Verwendung von 2.6. zeigt man leicht, daß

$$\sup_{x \in E} (\mu * \delta_x) * |f| < \infty$$

ist. Weiter gilt für alle $\alpha \in \mathfrak{W}$ und $n \geqq 1$ die folgende Abschätzung

$$\sup_{x \in E} |(\mu * \delta_x * \alpha_n) * f - (\mu * \delta_x * \alpha * \alpha_n) * f$$

$$\leqq \| \alpha_n - \alpha * \alpha_n \|_{\text{Var}} \sup_x (\mu * \delta_x) * |f| .$$

Dabei bezeichnet $\| \alpha_n - \alpha * \alpha_n \|_{\mathrm{Var}}$ den Variationsabstand der Verteilungsgesetze α_n und $\alpha * \alpha_n$. Weil stets

$$\lim_{n\to\infty} \| \alpha_n - \alpha * \alpha_n \|_{\mathrm{Var}} = 0$$

ist, können wir nun schließen, daß zu jedem $\alpha \in \mathfrak{W}$ und $\varepsilon < 0$ ein $n_{\varepsilon,\alpha}$ existiert mit

$$\sup_x |(\mu * \delta_x * \alpha_{n_{\varepsilon,\alpha}}) * f - (\mu * \delta_x * \alpha * \alpha_{n_{\varepsilon,\alpha}}) * f| < \varepsilon.$$

Weiter zeigt man leicht, daß stets

$$\sup_{x \in E} (\mu * \delta_x * \alpha_n) * f = \sup_{\beta \quad \mathfrak{W}} (\mu * \beta * \alpha_n) * f$$

ist.

Wir erhalten damit für alle $\varepsilon > 0$ und $\alpha \in \mathfrak{W}$

$$\sup_{\beta \in \mathfrak{W}} (\mu * \beta * \alpha) * f \geq \sup_{x \in E} (\mu * \delta_x * \alpha_{n_{\varepsilon,\alpha}} * \alpha) * f$$

$$\geq \sup_{x \in E} (\mu * \delta_x * \alpha_{n_{\varepsilon,\alpha}}) * f - \varepsilon = \sup_{\beta} (\mu * \beta * \alpha_{n_{\varepsilon,\alpha}}) * f - \varepsilon.$$

Für alle $\alpha \in \mathfrak{W}$ ist deshalb

$$\sup_{\beta \in \mathfrak{W}} (\mu * \beta * \alpha) * f \geq \inf_{n \geq 1} \sup_{\beta \in \mathfrak{W}} (\mu * \beta * \alpha_n) * f$$

daraus folgt

$$\inf_{\alpha \in \mathfrak{W}} \sup_{\beta \in \mathfrak{W}} (\mu * \beta * \alpha) * f = \inf_{\alpha \in \mathfrak{W}} \sup_{\beta \in \mathfrak{W}} (\mu * \beta * \alpha) * f.$$

Letzteres ist identisch mit

$$\inf_{Q \in \mathfrak{P}} \sup_{P \in \mathfrak{P}} \mu * Q * P * f = \inf_{Q \in \mathfrak{Q}} \sup_{P \in \mathfrak{P}} \mu * Q * P * f.$$

Ist $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$, so folgt daraus

$$\inf_{Q \in \mathfrak{Q}} \sup_{P \in \mathfrak{P}} |[\mu] * f - \mu * Q * P * f| = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß auch die Forderung (S 1) erfüllt ist.

Eine Folge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \in \mathfrak{W}$ heißt schwach asymptotisch gleichverteilt (siehe [7] Abschnitt 6.4.), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\beta_\varepsilon \in \mathfrak{W}$ mit $\beta_\varepsilon([-\varepsilon, \varepsilon]^s) = 1$ existiert, so daß gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \| \delta_x * \beta_\varepsilon * \alpha_n - \beta_\varepsilon * \alpha_n \|_{\mathrm{Var}} = 0; \quad \forall x \in R^s.$$

Wir zeigen nun:

2.8. *Es sei $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \in \mathfrak{W}$. $P_{\alpha_0}, P_{\alpha_1}, \ldots,$ ist genau dann eine K-Folge über $\mathfrak{P}$, wenn die Folge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots,$ schwach asymptotisch gleichverteilt ist.*

Beweis. Für alle $A \in \mathfrak{B}$ mit $L(A)>0$ ist durch $\lambda_A=(L(A))^{-1}$. Lk_A ein Verteilungsgesetz auf $[E, \mathfrak{A}]$ gegeben. Weiter setzen wir $A^-=\{-x;\ x \in A\}$; $\forall A \in \mathfrak{A}$, $A_\varepsilon=[-\varepsilon, \varepsilon]^s$; $\forall \varepsilon>0$. Man erkennt leicht die Gültigkeit der folgenden Beziehung.

2.8.1. *Für alle $\alpha \in \mathfrak{W}$, $n=0, 1, \ldots$, und alle $B \in \mathfrak{B}$ mit $L(B)>0$ gilt:*

$$\int |P_{\alpha_n}(x, B)-(P_\alpha * P_{\alpha_n})(x, B)|\, L(dx)=L(B)\, \|\lambda_{B^-} * \alpha_n-\lambda_{B^-} * \alpha * \alpha\|_{\mathrm{Var}}.$$

Nach 2.1, 2.2, 2.3, 2.5 und 2.7 ist $\mathfrak{P}$ eine separable, stetige, flüchtige und mischende Verschiebungshalbgruppe. Berücksichtigen wir noch 2.4, so erhalten wir aus Theorem 2:

2.8.2. *$P_{\alpha_0}, P_{\alpha_1}, \ldots,$ ist genau dann eine K-Folge, wenn für alle $\alpha \in \mathfrak{W}$, alle $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$ und alle L-Stetigkeitsmengen $B \in \mathfrak{B}$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int |P_{\alpha_n}(x, B)-(P_\alpha * P_{\alpha_n})(x, B)|\, \mu(dx)=0.$$

Es sei nun $P_{\alpha_0}, P_{\alpha_1}, \ldots,$ eine K-Folge. Unter Verwendung von 2.8.1 und 2.8.2 erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda_{A_\varepsilon} * \alpha_n-\delta_x * \lambda_{A_\varepsilon} * \alpha_n\|_{\mathrm{Var}}=0; \quad \forall \varepsilon>0, \quad \forall x \in R^s.$$

Daraus folgt sofort, daß die Folge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots,$ schwach asymptotisch gleichverteilt ist.

Wir setzen nun voraus, daß die Folge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots,$ schwach asymptotisch gleichverteilt ist. Für alle $\alpha \in \mathfrak{W}$ und alle bezüglich L absolut stetigen Verteilungsgesetze λ muß dann

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda * \alpha_n-\lambda * \alpha * \alpha_n\|_{\mathrm{Var}}=0$$

sein (siehe [7] Abschnitt 6.4.). Wegen 2.8.1. folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} \int |P_{\alpha_u}(x, B)-(P_\alpha * P_{\alpha_n})(x, B)|\, L(dx)=0; \quad \forall B \in \mathfrak{B}, \quad \forall \alpha \in \mathfrak{W}.$$

Damit können wir auf die Gültigkeit der folgenden Beziehung schließen.

2.8.3. *Für alle $\alpha \in \mathfrak{W}$ und $f \in \mathfrak{C}^{00}$ ist*

$$\lim_{n\to\infty} |L * P_{\alpha_n} * f-P_\alpha * P_{\alpha_n} * f|=0.$$

Wie man leicht sieht, ist für alle $\mu \in M$ und $\varepsilon>0$ das Maß $\mu * \lambda_{A_\varepsilon}$ absolut stetig bezüglich L und besitzt eine Dichte $h_{\mu,\varepsilon}$ mit: $h_{\mu,\varepsilon}(x) \leq (2\varepsilon)^{-s} . \mu * \delta_x(A_\varepsilon)$ Weiter ist stets

$$\begin{aligned}&\mu * |P_{\lambda_{A_\varepsilon}} * P_{\alpha_n} * f-P_{\lambda_{A_\varepsilon}} * P_\alpha * P_{\alpha_n} * f|\\ &\leq \sup_{x \in E} h_{\mu,\varepsilon}(x) L * |P_{\alpha_n} * f-P_\alpha * P_{\alpha_n} * f|.\end{aligned}$$

Schließlich ist nach 2.6 für alle $\mu \in M_{\mathfrak{P}}$

$$\sup_x \mu * \delta_x(A_\varepsilon)<\infty; \quad \forall \varepsilon>0.$$

Wegen 2.8.3 erhalten wir deshalb

2.8.4. *Für alle* $\mu \in M_{\mathfrak{P}}$, $\alpha \in \mathfrak{W}$, $f \in \mathfrak{C}^{\circ\circ}$ *und alle* $\varepsilon > 0$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} |\mu * P_{\lambda_{A_\varepsilon}} * P_{\alpha_n} * f - P_{\lambda_{A_\varepsilon}} * P_\alpha * P_{\alpha_n} * f| = 0.$$

Es sei nun $\mu \in M_{\mathfrak{P}}$ und $f \in \mathfrak{C}^{\circ\circ}$. Bezeichnet B_f den Träger von $P_\lambda * f - f$ so erhalten wir für alle $\alpha \in \mathfrak{W}$ und $0 < \varepsilon \leqq 1$

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{W}} \mu * |P_{\lambda_{A_\varepsilon}} * P_\alpha * f - P_\alpha * f|$$

$$\leqq (\sup_{x\in E} \mu * \delta_x(B_f)) \, (\sup_{x\in E} |(\lambda_{A_\varepsilon} * \delta_x) * f - f(x)|).$$

Weil $B_f \in \mathfrak{B}$ ist, muß nach 2.6

$$\sup_{x\in E} \mu * \delta_x(B_f) < \infty$$

sein. Weiter zeigt man leicht

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in E} |(\lambda_{A_\varepsilon} * \delta_x) * f - f(x)| = 0.$$

Damit haben wir

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\alpha\in\mathfrak{W}} \mu * |P_{\lambda_{A_\varepsilon}} * P_\alpha * f - P_\alpha * f| = 0.$$

Aus 2.8.4 folgt deshalb

2.8.5. *Für alle* $\mu \in M_{\mathfrak{P}}$, $\alpha \in \mathfrak{W}$ *und* $f \in \mathfrak{C}^{\circ\circ}$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu * |P_{\alpha_n} * f - P_\alpha * P_{\alpha_n} * f| = 0.$$

Für alle $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$, $\alpha \in \mathfrak{W}$, $f \in \mathfrak{C}^{\circ\circ}$ und $n = 0, 1, \ldots,$ ist

$$|[\mu] * f - \mu * P_{\alpha_n} * f|$$

$$\leqq |[\mu] * f - \mu * P_{\alpha_n} * P_\alpha * f| + |\mu * P_{\alpha_n} * P_\alpha * f - \mu * P_{\alpha_n} * f|$$

$$\leqq \sup_{P\in\mathfrak{P}} |[\mu] * f - \mu * P * P_\alpha * f| + \mu * |P_{\alpha_n} * f - P_{\alpha_n} * P_\alpha * f|.$$

Wegen 2.8.5 können wir deshalb auf

$$\lim_{n\to\infty} |[\mu] * f - \mu * P_{\alpha_n} * f| = 0; \quad \forall \mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}, \quad \forall f \in \mathfrak{C}^{\circ\circ}$$

schließen. Mithin ist $P_{\alpha_0}, P_{\alpha_1}, \ldots,$ eine K-Folge und 2.8 ist bewiesen.

2.9. *Ein Maß* μ *auf* $\mathfrak{A}$ *ist genau dann* $\mathfrak{P}$*-praeinvariant, wenn ein* $c \geqq 0$ *existiert mit*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \left| \frac{\mu * \delta_x((-n, n]^s)}{(2n)^s} - c \right| = 0$$

Beweis. Für alle $n = 1, 2, \ldots,$ setzen wir $\lambda_n = (2n)^{-s} \, . \, Lk_{(-n,n]^s}$. Sei zunächst μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$ mit:

2.9.1. $$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \left| \frac{\mu*\delta_x([-n,n]^s)}{(2n)^s} - c \right| = 0.$$

Für alle $B\in\mathfrak{B}$ existiert ein n mit $B\subseteq[-n,n]^s$. Weiter ist wegen 2.9.1 für alle $n=1,2,\ldots,$

$$\sup_{P\in\mathfrak{P}} \mu*P([-n,n]^s) = \sup_{\alpha\in\mathfrak{P}} \mu*\alpha([-n,n]^s) = \sup_{x\in E} \mu*\delta_x([-n,n]^s) < \infty.$$

Es ist deshalb $\mu\in M_{\mathfrak{P}}$. Weiter sieht man leicht, daß für alle $n=1,2,\ldots$ das Maß $\mu*\lambda_n$ absolut stetig bezüglich L ist und die Dichte

$$d_{\mu,n}(x) = [\mu*\delta_x([-n,n]^s)]/(2n)^s; \quad \forall x\in E$$

besitzt. Für alle $f\in\mathfrak{C}^{\circ\circ}$, $n=1,2,\ldots,$ und $y\in E$ gilt deshalb

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{W}} |(\mu*\lambda_n*\alpha)*f - cL*f| \sup_{x\in E} |(\mu*\lambda_n*\delta_x)*f - cL*f|$$

$$\leq L*|f|\,.\sup_{x\in B} \left| \frac{\mu*\delta_x([-n,n]^s)}{(2n)^s} - c \right|.$$

Wegen 2.9.1. ist dann für alle $f\in\mathfrak{C}^{\circ\circ}$

$$\inf_n \sup_{\alpha\in\mathfrak{W}} |\mu*\lambda_n*\alpha)*f - cL*f| = 0$$

und damit auch

$$\inf_{Q\in\mathfrak{P}} \sup_{P\in\mathfrak{P}} |\mu*Q*P*f - cL*f| = 0.$$

Da nach 2.4 $cL\in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{inv}}$ ist, muß deshalb $\mu\in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$ sein. Wir setzen nun voraus, daß $\mu\in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$ ist. Die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ ist offensichtlich schwach asymptotisch gleichverteilt. Damit ist auch für jede Folge $x_1, x_2, \ldots,$ aus E die Folge $\lambda_1*\delta_{x_1}$, $\lambda_2*\delta_{x_2}, \ldots,$ schwach asymptotisch gleichverteilt. Wegen 2.8 ist deshalb stets $P_{(\lambda_1*\delta_{x_1})}$, $P_{(\lambda_2*\delta_{x_2})}, \ldots,$ eine K-Folge über $\mathfrak{P}$. Weil $\mu\in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$ war, muß dann auf Grund von 2.4 ein $c\geq 0$ existieren, so daß für alle $f\in\mathfrak{C}^{\circ\circ}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} |\mu*P_{(\lambda_n*\delta_{x_n})}*f - cL*f| = 0.$$

Letzteres ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{n\to\infty} |(\mu*\lambda_n*\delta_{x_n})*f - cL*f| = 0.$$

Da die Folge $x_1, x_2, \ldots,$ beliebig gewählt war, haben wir damit

2.9.2. $$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |(\alpha*\lambda_n*\delta_x)*f - cL*f| = 0; \quad \forall f\in\mathfrak{C}^{\circ\circ}.$$

Es sei nun $f\in\mathfrak{C}^{\circ\circ}$ dergestalt, daß f identisch Null außerhalb der Menge $[-1/2, 1/2]^s$, $L*f=1$ und $|f|\leq a$ ist. Für alle $x\in E$ und $n=1,2,\ldots$ muß dann gelten

$$-\frac{a}{(2n)^s}\mu*\delta_x\left(\left[-n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right]^s \setminus \left[-n+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}\right]^s\right)$$

$$+\frac{1}{(2n)^s}\,\mu*\delta_x\left(\left[-n+\frac{1}{2},\ n-\frac{1}{2}\right]^s\right)$$

$$\leq(\mu*\lambda_n*\delta_x)*f\leq\frac{a}{(2n)^s}\,\mu*\delta_x\left(\left[-n-\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2}\right]^s\setminus\left[-n+\frac{1}{2},\ n-\frac{1}{2}\right]^s\right).$$

Da $\mu\in M_{\mathfrak{P}}$ ist, erhalten wir unter Verwendung von 2.6 weiter die Beziehungen

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{x\in E}\ \frac{a}{(2n)^s}\,\mu*\delta_x\left(\left[-n-\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2}\right]^s\setminus\left[-n+\frac{1}{2},\ n-\frac{1}{2}\right]^s\right)=0$$

$$\lim_{k\to\infty}\ \sup_{x\in E}\ \left(\frac{a}{(2n)^s}\,\mu*\delta_x([-n,n]^s)-\frac{a}{(2n)^s}\,\mu*\delta_x\left(\left[-n+\frac{1}{2},\ n-\frac{1}{2}\right]^s\right)\right)=0.$$

Wegen 2.9.2 können wir deshalb auf

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{x\in E}\ \left|\frac{\mu*\delta_x([-n,n]^s)}{(2n)^s}-c\right|=0$$

schließen. Damit ist 2.9 bewiesen.

3. Beweis von Theorem 1. Wir formulieren zunächst einen Hilfssatz, den wir noch einmal im nächsten Abschnitt benötigen.

3.1. *$Q_0, Q_1, \ldots,$ seien Verschiebungen aus der Verschiebungshalbgruppe $\mathfrak{P}$, μ und $\bar{\mu}$ Maße auf $\mathfrak{A}$ und f eine meßbare reelle Funktion auf E, so daß die Bedingungen* $\bar{\mu}*f<\infty$, $\sup_{P\in\mathfrak{P}}\mu*P*|f|<\infty$ erfüllt sind.

Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

3.1.1. *Für alle $P_0, P_1, \ldots, \in\mathfrak{P}$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty}\mu*Q_n*P_n*f=\bar{\mu}*f.$$

3.1.2. *Es ist*

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{P\in\mathfrak{P}}\ |\bar{\mu}*f-\mu*Q_n*P*f|=0.$$

B e w e i s. Aus 3.1.2 folgt offensichtlich 3.1.1. Nehmen wir nun an, daß 3.1.2 nicht erfüllt ist, d. h.

$$\overline{\lim}\ \sup_{P\in\mathfrak{P}}\ |\bar{\mu}*f-\mu*Q_n*P*f|=d>0$$

gilt. Dann kann man eine Folge $P_0, P_1, \ldots, \in\mathfrak{P}$ auswählen, so daß

$$\overline{\lim}\,|\bar{\mu}*f-\mu*Q_n*P_n*f|=d>0$$

ist. 3.2.1 kann also nicht gelten. Die Beziehung 3.1 ist damit bewiesen.

Wir führen nun eine Verschärfung des Begriffes der K-Folge ein: *Eine Folge $P_0, P_1, \ldots, \in\mathfrak{P}$ heißt K^*-Folge über $\mathfrak{P}$, wenn für alle $\mu\in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$ und alle $f\in\mathfrak{C}^{oo}$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{P\in\mathfrak{P}}\ |[\mu]*f-\mu*P_n*P*f|=0.$$

Aus 3.1. ergeben sich sofort die folgenden Aussagen:

(K 0) $Q_0, Q_1, \ldots,$ ist genau dann eine K*-Folge über $\mathfrak{P}$, wenn für alle $P_0, P_1, \ldots, \in \mathfrak{P}$ stets $Q_0 * P_0, Q_1 * P_1, \ldots,$ eine K-Folge über $\mathfrak{P}$ ist.

(K 1) Ist $Q_0, Q_1, \ldots,$ eine K*-Folge über $\mathfrak{P}$, so ist für beliebige Folgen $P_0, P_1, \ldots, \in \mathfrak{P}$ auch $Q_0 * P_0, Q_1 * P_1, \ldots,$ eine K*-Folge über $\mathfrak{P}$.

Wir erhalten nun die folgende wichtige Beziehung:

3.2. Ist $\mathfrak{P}$ *eine separable Verschiebungshalbgruppe dann existiert eine* K*-*Folge über* $\mathfrak{P}$.

Beweis. *Für jedes* $Q \in \mathfrak{P}$, $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ *und* $f \in \mathfrak{C}^{00}$ *setzen* wir

$$d(Q, \mu, f) = \sup_{P \in \mathfrak{P}} |[\mu] * f - \mu * Q * P * f|.$$

Offensichtlich gilt stets $d(Q_1 * Q_2, \mu, f) \leqq d(Q_2, \mu, f)$. Ist $\mathfrak{P}$ separabel, so existiert nach Definition eine abzählbare Teilmenge $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{P}$ mit $\inf\limits_{Q \in \mathfrak{Q}} d(Q, \mu, f) = 0$ für alle $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ und $f \in \mathfrak{C}^{00}$. Es sei nun $Q_0, Q_1, \ldots,$ eine Numerierung der Elemente aus $\mathfrak{Q}$. Wir setzen $R_n = Q_0 * \cdots * Q_n$ für alle $n = 0,1, \ldots$ Es ist dann $\lim_{n\to\infty} d(R_n, \mu, f) = 0$ für alle $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ und $f \in \mathfrak{C}^{00}$. Das besagt jedoch, daß R_0 $R_1, \ldots,$ eine K*-Folge ist. Wir können nun Theorem 1 beweisen.

Nach Definition konvergiert für jede K-Folge $P_0, P_1, \ldots,$ über $\mathfrak{P}$ und alle $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ die Folge der Maße $\mu * P_0, \mu * P_1, \ldots,$ gegen ein $\mathfrak{P}$-invariantes Maß

Sei nun umgekehrt ein Maß $\mu \in M_{\mathfrak{P}}$ gegeben, so daß für alle K-Folgen $P_0, P_1, \ldots,$ die Folge $\mu * P_0, \mu * P_1, \ldots,$ gegen ein $\mathfrak{P}$-invariantes Maß konvergiert. Da mit $P'_0, P'_1, \ldots,$ und $P''_0, P''_1, \ldots,$ auch $P'_0 * P''_0, P'_1 * P''_1, \ldots,$ eine K-Folge ist, muß ein Maß $\bar{\mu}$ existieren, so das für alle K-Folgen $P_0, P_1, \ldots$. $\bar{\mu} = \lim_{n\to\infty} \mu * P_n$ ist. Nach 3.2. existiert eine K*-Folge $Q_0, Q_1, \ldots,$ über $\mathfrak{P}$. Wegen der Eigenschaft (K*0) muß für alle Folgen $P_0, P_1, \ldots, \in \mathfrak{P}$ stets $O_0 * P_0$, $Q_1 * P_1, \ldots,$ eine K-Folge und deshalb $\bar{\mu}_{n\to\infty}\ \mu * (Q_n * P_n)$ sein. Unter Verwendung von 3.1 können wir deshalb auf

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{P \in \mathfrak{P}} |\bar{\mu} * f - \mu * Q_n * P * f|$$

für alle $f \in \mathfrak{C}^{00}$ schließen. Letzteres zieht nach sich, daß μ $\mathfrak{P}$-praeinvariant und $[\mu] = \bar{\mu}$ ist. Damit ist Theorem 1 bewiesen.

4. Die Algebra $\mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$. Für den Beweis der Haupteigenschaften flüchtiger mischender separabler stetiger Verschiebungshalbgruppen sind die durch die Definition der Praeinvarianz und der K-Folge garantierten Konvergenzeigenschaften nicht scharf genug. Die für die Definition der Topologie auf M maßgebliche Funktionenalgebra $\mathfrak{C}^{00}$ ist schlecht an die Verschiebungshalbgruppe angepaßt, da $\mathfrak{C}^{00}$ im allgemeinen nicht $\mathfrak{P}$-invariant ist, und zwar auch dann nicht, wenn $\mathfrak{P}$ stetig ist. In dem letzteren Falle kann man jedoch beweisen, daß von allein stärkere und besser brauchbare Konvergenzeigenschaften erfüllt sind. Im weiteren sei stets $\mathfrak{P}$ eine separable stetige Verschiebungshalbgruppe auf E.

Mit $\mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen beschränkten Funktionen f auf E mit

$$\sup_{P \in \mathfrak{P}} \mu * P * |f| < \infty ; \qquad \forall \mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$$

und

$$\inf_{B \in \mathfrak{B}} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int |f(x)| \, k_{\overline{B}}(x) \, (\mu * P_n)(dx) = 0$$

für alle $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ und alle K-Folgen $P_0, P_1, \ldots,$ über $\mathfrak{P}$.

4.1. *Für alle* $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ *und alle* $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ *gilt:*

$$\inf_{P_1 \in \mathfrak{P}} \inf_{B \in \mathfrak{B}} \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} \int |f(x)| \, k_{\overline{B}}(x) (\mu * P_1 * P_2) \, (dx) = 0.$$

Beweis. Wir wollen annehmen, daß für ein $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$, ein $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ und ein $d > 0$ gilt:

$$\inf_{P_1 \in \mathfrak{P}} \inf_{B \in \mathfrak{B}} \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} \int |f(x)| \, k_{\overline{B}}(x) \, (\mu * P_1 * P_2) \, (dx) > d.$$

Wir können nach 3.2 eine K*-Folge $Q_0, Q_1, \ldots,$ auswählen. Auf Grund der Eigenschaft (K*0) ist für alle Folgen $P_0, P_1, \ldots, \in \mathfrak{P}$ die Folge $Q_0 * P_0, Q_1 * P_1, \ldots,$ eine K-Folge. Unsere Annahme erlaubt es uns nun, zu jeder Folge $B_0, B_1, \ldots, \in \mathfrak{B}$ eine Folge $P_0, P_1, \ldots, \in \mathfrak{P}$ auszuwählen, so daß

$$\int |f(x)| \, k_{\overline{B}_n}(x) \, (\mu * Q_n * P_n) \, (dx) > d$$

für alle $n = 0,1, \ldots,$ ist. Es ist möglich, die Folge $B_0, B_1, \ldots,$ so zu wählen, daß stets $B_n \subseteq B_{n+1}$ ist, weiter zu jedem $B \in \mathfrak{B}$ ein n existiert mit $B \subseteq B_n$ und schließlich $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = E$ ist. Es ist dann

$$\inf_{B \in \mathfrak{B}} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int |f(x)| \, k_{\overline{B}}(x) \, (\mu * Q_n * P_n) \, (dx) \geq d > 0.$$

Letzteres steht jedoch im Widerspruch dazu, daß $Q_0 * P_0, \ Q_1 * P_1, \ldots,$ eine K-Folge ist. 4.1 ist damit bewiesen.

Man sieht leicht, daß die folgenden elementaren Beziehungen gelten:

4.2. *Es ist* $\mathfrak{C}^{00} \subseteq \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}} \subseteq \mathfrak{C}$.

4.3. *Für alle* $f_1, f_2, \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ *und* $c_1, c_2 \in R$ *ist* $c_1 . f_1 + c_2 . f_2 \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$.

4.4. *Es sei* $f \in \mathfrak{C}$ *und* $h \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$. *Ist* $|f(x)| \leq |h(x)|$; $\forall x \in E$ *so ist auch* $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$.

Neben diesen Eigenschaften benötigen wir noch die folgenden beiden Beziehungen:

4.5. *Für alle* $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ *und* $P \in \mathfrak{P}$ *ist* $Pf * \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$.

4.6. *Für alle* $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ *und jede K-Folge* $P_0, P_1, \ldots,$ *über* $\mathfrak{P}$ *gilt:*

$$[\mu] * f = \lim_{n\to\infty} \mu * P_n * f ; \qquad \forall f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}.$$

Unmittelbar aus 3.1 und 4.6 erhalten wir die Gültigkeit der folgenden Aussage:

4.7. *Für alle* $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$ *und alle* $f \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{P}}^{0}$ *gilt:*

$$\inf_{P_1 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} |[\mu] * f - \mu * P_1 * P_2 * f| = 0.$$

Zum Beweis von 4.5 und 4.6 benötigen wir die folgende Beziehung:

4.8. *Es seien* $P_0, P_1, \ldots,$ *eine K-Folge über* $\mathfrak{P}$, $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$ *und* f *eine nicht-negative Funktion aus* $\mathfrak{C}$, *so daß gilt:*

$$\sup_{P \in \mathfrak{P}} \mu * P * f < \infty, \; [\mu] * f < \infty, \; \lim_{n \to \infty} \mu * P_n * f = [\mu] * f.$$

Dann ist

$$\inf_{B \in \mathfrak{B}} \overline{\lim} \int f(x) k_{\overline{B}}(x) (\mu * P_n)(dx) = 0.$$

Beweis. Es sei $B_0 \in \mathfrak{B}$. Wir wählen ein $g \in \mathfrak{C}^{00}$ und ein $B \in \mathfrak{B}$ mit $k_{B_0}(x) \leq g(x) \leq k_B(x)$; $\forall x \in E$. Es ist dann $g.f \, \mathfrak{C}^{00}$ und wir haben

$$\overline{\lim} \int f(x) k_{\overline{B}}(x) (\mu * P_n)\, dx) \leq \overline{\lim} \int (1 - g(x)) f(x) (\mu * P_n)(dx)$$

$$= [\mu] * ((1-g)f) \leq \int f(x) k_{\overline{B}_0}(x) [\mu](dx).$$

Wegen $\int f(x) [\mu](dx) < \infty$ können wir deshalb auf die Behauptung von 4.8 schließen. Wir zeigen nun

4.9. *Es seien* $P_0, P_1, \ldots,$ *eine K-Folge über* $\mathfrak{P}$, $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$ *und* $f \in \mathfrak{C}$, *so daß gilt:*

$$\sup_{P \in \mathfrak{P}} \mu * P * |f| < \infty, \; [\mu] * |f| < \infty, \; \inf_{B \in \mathfrak{B}} \overline{\lim_{n \to \infty}} \int |f(x)| k_{\overline{B}}(x) (\mu * P_n)(dx) = 0.$$

Dann ist $\lim_{n \to \infty} \mu * P_n * f = [\mu] * f$.

Beweis. Es seien $B \in \mathfrak{B}$ und $g \in \mathfrak{C}^{00}$ mit $k_B(x) \leq g(x) \leq 1$: $\forall x \in E$. Es ist dann $g \cdot f \in \mathfrak{C}^{00}$ und wir haben

$$\overline{\lim_{n}} |[\mu] * f - \mu * P_n * f|$$

$$\leq |[\mu] * ((1-g) f)| + \overline{\lim} |\mu * P_n * ((1-g) f)|$$

$$\leq |[\mu] * (k_{\overline{B}} |f|)|) + \overline{\lim}\, \mu * P_n * (k_{\overline{B}} \cdot |f|).$$

Auf Grund unserer Voraussetzungen können wir deshalb auf $\overline{\lim} |[\mu] * f - \mu * P_n * f| = 0$ schließen. 4.9 ist damit bewiesen.

Wir kommen nun zum Beweis von 4.6.

Dazu seien $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$ und $P_0, P_1, \ldots,$ eine K-Folge über $\mathfrak{P}$. Für alle $f \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{P}}^{0}$ ist nach Definition $\sup_{P \in \mathfrak{P}} \mu * P * |f < \infty$ und, da $[\mu] \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$ ist, auch $[\mu] * |f| < \infty$. Schließlich haben wir noch nach Definition von $\mathfrak{C}_{\mathfrak{P}}^{0}$

$$\inf_{B \in \mathfrak{B}} \overline{\lim} \int |f(x)| k_{\overline{B}}(x) (\mu * P_n)(dx) = 0$$

für alle $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$. Wegen 4.9 muß deshalb gelten: $[\mu] * f = \lim_{n\to\infty} \mu * P_n * f$; $\forall f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$. Damit ist 4.6. bewiesen.

Abschließend führen wir den Beweis von 4.5. Es sei $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$. Dann gehören auch $|f|$ und f^+, definiert durch $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$; $\forall x \in E$ zu $\mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$, d. h. für alle $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ und alle K-Folgen $P_0, P_1, \ldots$ gelten die Beziehungen

$$\sup_{P\in\mathfrak{P}} \mu * P * |f| < \infty, \quad \sup_{P\in\mathfrak{P}} \mu * P * f^+ < \infty, \quad [\mu] * |f| < \infty, \quad [\mu] * f^+ < \infty$$

$$\inf_{B\in\mathfrak{B}} \overline{\lim} \int |f(x)|\, k_{\overline{B}}(x)\, (\mu * P_n)(dx) = 0, \quad \inf_{B\in\mathfrak{B}} \overline{\lim} \int f^+(x)\, k_{\overline{B}}(x)\, (\mu * P_n)(dx) = 0.$$

Wegen 4.9 muß deshalb für alle K-Folgen und alle $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ gelten:

$$[\mu] * [f] = \lim_{n\to\infty} \mu * P_n * |f|, \quad [\mu] * f^+ = \lim_{n\to\infty} \mu * P_n * f^+.$$

Da für alle $P \in \mathfrak{P}$ mit $P_0, P_1, \ldots,$ auch $P_0 * P$, $P_1 * P, \ldots,$ eine K-Folge ist, erhalten wir auch

$$[\mu] * (P * |f|) = \lim_{n\to\infty} \mu * P_n * (P * |f|), \quad [\mu] * (P * f^+) = \lim_{n\to\infty} \mu * P_n * (P * f^+)$$

für alle K-Folgen $P_0, P_1, \ldots,$ alle $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ und alle $P \in \mathfrak{P}$. Weil außerdem für alle $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ und alle $P \in \mathfrak{P}$ gilt:

$$(*) \qquad \sup_{P'\in\mathfrak{P}} \mu * P' * (P * |f|) < \infty, \quad \sup_{P'\in\mathfrak{P}} \mu * P' * (P * f^+) < \infty,$$

$$[\mu] * (P * |f|) < \infty, \quad [\mu] * (P * f^+) < \infty$$

können wir unter Verwendung von 4.8 auf

$$\inf_{B\in\mathfrak{B}} \overline{\lim}\, \mu * P_n * ((P * |f|)\, k_{\overline{B}}) = 0, \quad \inf_{B\in\mathfrak{B}} \overline{\lim}\, \mu * P_n * ((P * f^+)\, k_{\overline{B}}) = 0$$

für alle $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$, alle K-Folgen $P_0, P_1, \ldots,$ und alle $P \in \mathfrak{P}$ schließen. Weil für alle $P \in \mathfrak{P}$, $P * f = 2\, P * f^+ - P * |f|$ ist, ergibt letzteres:

$$\inf_{B\in\mathfrak{B}} \overline{\lim}\, \mu * P_n * ((P * f)\, k_{\overline{B}}) = 0$$

für alle $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ und alle K-Folgen $P_0, P_1, \ldots,$ über $\mathfrak{P}$. Wegen $(*)$ können wir daraus schließen, daß stets $P * f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ ist. 4.5 ist damit bewiesen.

5. Beweis von Theorem 2. Wir setzen im folgenden voraus, daß $\mathfrak{P}$ eine mischende flüchtige separable stetige Verschiebungshalbgruppe auf E ist. Man erkennt leicht die Gültigkeit der folgenden Beziehung:

5.1. *Für alle* $\mu \in M^{\mathrm{inv}}_{\mathfrak{P}}$, *alle* $P_0 \in \mathfrak{P}$ *und alle* $f \in L^1_\mu$ *ist*

$$\inf_{P\in\mathfrak{P}} \mu * |P * f - P * P_0 * f| = 0.$$

Wir zeigen nun

5.2. *Es seien* $f_1, \ldots, f_n$ *nichtnegative meßbare Funktionen auf* E *mit* $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$ *für alle* $x \in E$ *und* $P_1, \ldots P_n \in \mathfrak{P}$. *Für alle* $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$ *ist auch* $(\mu f_1) * P_1 + \cdots + (\mu f_n) * P_n \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$ *und es gilt:* $[\sum_{i=1}^{n} (\mu f_i) * P_i] = [\mu]$.

Beweis. Wir setzen $\lambda = \sum_{i=1}^{n} (\mu f_i) * P_i$. Für alle $h \in \mathfrak{C}^{00}$ ist dann

$$\sup_{P \in \mathfrak{P}} \lambda * P * |h| \leq n \cdot \sup_{P \in \mathfrak{P}} \mu * P * |h| < \infty,$$

d. h. wir haben $\lambda \in M_{\mathfrak{P}}$. Weiter hat man

$$|[\mu] * x - \lambda * P * h| \leq |[\mu] * h - \mu * P * h| + \sum_{i=1}^{n} \mu * |P * h - P * P_i * h|.$$

Hieraus folgt

$$\overline{\lim_{\Pi(\mathfrak{P})}} |[\mu] * h - \lambda * P * h| \leq \sum_{i=1}^{n} \overline{\lim_{\Pi}} \mu * |P * h - P * P_1 * h|.$$

Zum Beweis von 5.2 genügt es deshalb zu zeigen, daß für alle $P_0 \in \mathfrak{P}$ und $h \in \mathfrak{C}^{00}$ gilt:

$$\lim_{\Pi(\mathfrak{P})} \mu * |P * h - P * P_0 * h| = 0.$$

Dazu erhalten wir zunächt für alle $P_1 \in \mathfrak{P}$ die folgende Abschätzung:

$$\overline{\lim_{\Pi(\mathfrak{P})}} \mu * |P * h - P * P_0 * h| = |\inf_{P_2 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_3 \in \mathfrak{P}} \mu * |P_3 * P_2 * (h - P_0 * h)|$$

$$\leq \inf_{P_2 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_3 \in \mathfrak{P}} \mu * |P_3 * P_2 * P_1 (h - P_0 * h) \leq \inf_{P_2 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_3 \in \mathfrak{P}} \mu * P_3 * P_2 |P_1 * (h - P_0 * h)|.$$

Wegen 4.2, 4.3 und 4.5 ist $|P_1 * (h - P_0 * h)| \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{P}}^{0}$. Nach 4.7 muß deshalb stets

$$\inf_{P_2 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_3 \in \mathfrak{P}} \mu * P_3 * P_2 |P_1 * (h - P_0 * h)| = [\mu] * |P_1 * (h - P_0 * h)|$$

sein. Damit haben wir

$$\overline{\lim_{\Pi(\mathfrak{P})}} \mu * |P * h - P * P_0 * h| \leq \inf [\mu] * |P * h - P * P_0 * h|.$$

Wegen 5.1 ergibt das

$$\lim_{\Pi(\mathfrak{P})} \mu * |P * h - P * P_0 * h| = 0$$

und 5.2 ist bewiesen.

5.3. *Es seien* $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$, $A \in \mathfrak{A}$, $P \in \mathfrak{P}$ *und* $f \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{P}}^{0}$. *Für alle K-Folgen* $P_0, P_1, \ldots,$ *über* $\mathfrak{P}$ *gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} (\mu k_A) * P_n * (f - P * f) = 0.$$

Beweis. Wir setzen $\lambda = \mu_{\overline{A}} + (\mu k_A) * P_0$. Nach 5.2 ist dann $\lambda \in M_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{pr}}$ und $[\lambda] = [\mu]$. Das zieht wegen 4.6

$$\lim_{n\to\infty} (\mu * P_n * f - \lambda * P_n * f) = 0$$

nach sich. Andererseits ist stets $\mu * P_n * f - \lambda * P_n * f = (\mu k_A) * P_n(f - P_0 * f)$. Damit ist 5.3 bewiesen.

5.4. *Für alle* $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ *und alle* $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ *gilt:*

$$\inf_{P_1 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} \mu * P_2 * (P_1 * f)^2 = 0.$$

Beweis. Wir wollen annehmen, daß ein $\mu \in M^{\mathrm{pr}}$, ein $h \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ und ein $d > 0$ existieren mit

$$\inf_{P_1 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} \mu * P_2 * (P_1 * f)^2 > d.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir dabei voraussetzen, daß h nichtnegativ ist. Für jedes $P \in \mathfrak{P}$ können wir dann ein $R_P \in \mathfrak{P}$ auswählen mit $\mu * R_P * (P * h)^2 > d$. Der lineare Raum $\mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ wird mit der Norm $\| \ \|_\mu$ versehen, definiert durch

$$\|f\|_\mu =_{\mathrm{Def}} \|f\| + \sup_{P \in \mathfrak{P}} \mu * P * |f|; \qquad \forall f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$$

Dabei ist $\|f\| = \sup_{x \in E} |f x)|$. Für jedes $P \in \mathfrak{P}$ stellt $L_P(f) = \mu * R_P * ((P * h)(P * f))$ $\forall f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ eine Linearform auf $\mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ dar. Wir bekommen

$$|L_P(f) \leq \|h\| \sup_{P' \in \mathfrak{P}} \mu * P' * |f| \leq \|h\| \ \|f\|_\mu$$

und sehen, daß L_P stetig ist mit

5.4.1. $\|L_P\| \leq \|h\|$; $\forall P \in \mathfrak{P}$.

Aus 5.4.1 folgt die Existenz einer stetigen Linearform L mit folgenden Eigenschaften:

Für jedes $P \in \mathfrak{P}$, alle $\varepsilon > 0$ und $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ existiert ein $Q \in \mathfrak{P}$ mit $|L(f_i) - L_{P * Q}(f_i)| < \infty$; $\forall i = 1, \ldots, n$. Offensichtlich gilt

5.4.2. $L(h) \geq d$, $|L(f) \leq \|f\| \sup_{P \in \mathfrak{P}} \mu * P * h$; $\forall f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$, $L(f) \geq 0$; $\forall f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ mit $f \leq Q$.

Für alle $\varepsilon > 0$ und $P_1 \in \mathfrak{P}$ existiert ein $Q_1 \in \mathfrak{P}$ mit $|L(f)| \leq \varepsilon + |L_{P_1 * Q_1}(f)|$, Weiter ist stets

$$|L_{P_1 * Q_1}(f)| = |\mu * R_{(P_1 * Q_1)} * ((P_1 * Q_1 * h)(P_1 * Q_1 * f))|$$
$$\leq \|h\| \mu * R_{(P_1 * Q_1)} * P_1 * Q_1 * |f| \leq \|h\| \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} \mu * P_2 * P_1 * |f|.$$

Es gilt deshalb

5.4.3. $|L(f)| \leq \|h\| [u] * |f|$.

Aus 5.4.2 und 5.4.3 folgt, daß ein Maß ν existiert mit $L(f) = \nu * f$; $\forall f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$. $\nu(B) \leq \mu(B)$; $\forall B \in \mathfrak{B}$, $0 < \nu(E) < \infty$.

Zum Beweis von 5.4 genügt es noch zu zeigen, daß $\nu \ni M^{\mathrm{inv}}_{\mathfrak{P}}$ ist. Wir gelangen dann nämlich zu einem Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $\mathfrak{P}$ flüchfig ist.

Es ist genau dann $\nu \in M^{\mathrm{inv}}_{\mathfrak{P}}$, wenn gilt:

5.4.4. $L(P_0 * f) = L(f);\ \forall f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}};\ \forall P_0 \in \mathfrak{P}$

Es genügt deshalb 5.4.4 zu zeigen. Dazu geben wir ein $\varepsilon > 0$ und ein $P_1 \in \mathfrak{P}$ vor und können ein $Q_1 \in \mathfrak{P}$ finden, so daß die Beziehungen $|L(f) - L_{(P_1 * Q_1)}(f)| < \varepsilon/2$, $|L(P_0 * f) - L_{(P_1 * Q_1)}(P_0 * f)| < \varepsilon/2$ gelten. Es ergibt sich

$$|L(f) - L(P_0 * f)| \leq \varepsilon + |L_{(P_1 * Q_1)}(f) - L_{P_1 * Q_1}(P_0 * f)|$$
$$\leq \varepsilon + \|h\| \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} \mu * P_2 * |P_1 * f - P_1 * P_0 * f|.$$

Da dies für alle $P_1 \in \mathfrak{P}$ und $\varepsilon > 0$ richtig ist, erhält man für alle $P \in \mathfrak{P}$

$$|L(f) - L(P_0 * f)| \leq \|h\| \inf_{P_1 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} \mu * P_2 * |P_1 * f - P_1 * P_0 * f|$$
$$\leq \|h\| \inf_{P_1 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} \mu * P_2 * |P_1 * P * f - P_1 * P * P_0 * f|$$
$$\leq \|h\| \inf_{P_1 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} \mu * P_1 * P_2 * |P * f - P * P_0 * f|.$$

Wegen 4.3, 4.4 und 4.5 ist mit f auch $|P * f - P * P_0 * f| \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$. Letzteres ergibt deshalb in Verbindung mit 4.7 $|L(f) - L(P_0 * f)| \leq \|h\| [\mu] * |P * f - P * P_0 * f|$; $\forall P \in \mathfrak{P}$. Wegen 5.1 folgt daraus $L(f) = L(P_0 * f)$. Damit ist 5.4.4 bewiesen und der Beweis von 5.4 abgeschlossen.

5.5. *Für alle* $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ *und alle meßbaren nichtnegativen Funktionen* h *mit* $\mu * h < \infty$ *ist* $\mu h \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ *und es gilt*: $[\mu h] = 0$.

Beweis. Es sei g eine meßbare beschränkte Funktion auf E mit $0 \leq g(x) \leq h(x)$: $\forall x \in E$. Dann gilt: $\mu * g^2 \leq \|g\| \mu * g \leq \|g\| \mu * h$. Für alle $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ bekommen wir wegen 5.4

$$\inf_{P_1 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} |(\mu g) * P_1 * P_2 * f| \leq \sqrt{\mu * g^2} \inf_{P_1 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} \sqrt{\mu * (P_1 * P_2 * f)^2}$$
$$\leq \sqrt{\mu * g^2} \inf_{P_1 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} \sqrt{\mu * P_2 * (P_1 * f)^2} = 0$$

Weiter haben wir deshalb für alle $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$

$$\inf_{P_1 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} |(\mu h) * P_1 * P_2 * f|$$
$$\leq \|f\| \mu * (h - g) + \inf_{P_1 \in \mathfrak{P}} \sup_{P_2 \in \mathfrak{P}} (\mu g) * P_1 * P_2 * |f| = \|f\| \mu * (h - g).$$

Wegen $\mu * h < \infty$ können wir daraus die Behauptung von 5.5 ableiten.

Aus 5.5. folgt, daß für alle $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ und $B \in \mathfrak{B}(\mu \cdot k_B) \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ und $[\mu \cdot k_B] = 0$ ist. Andererseits ist wegen 4.3, 4.4 und 4.5 mit f auch $|f - P_0 * f| \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ für alle

$P_0 \in \mathfrak{P}$. Wir erhalten deshalb unter Verwendung von 4.6 für alle $P \in \mathfrak{P}$, $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$, $B \in \mathfrak{B}, f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ und alle K-Folgen $P_0, P_1, \ldots,$ über $\mathfrak{P}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, (\mu k_B) * | P_n * (f - P * f) | \leq \lim\, (\mu k_B) * P_n * | f - P * f | = [\mu k_B] * | f - P * f | = 0.$$

Es gilt also die folgende Beziehung:

5.6. *Es seien* $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$, $B \in \mathfrak{B}$, $P \in \mathfrak{P}$ *und* $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$. *Für alle K-Folgen* $P_0, P_1, \ldots,$ *über* $\mathfrak{P}$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} (\mu k_B) * | P_n * (f - P_0 * f) | = 0.$$

Wir zeigen nun:

5.7. *Eine Folge* $P_0, P_1, \ldots, \in \mathfrak{P}$ *ist genau dann eine K-Folge, wenn für alle* $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$, $P \in \mathfrak{P}$ *und* $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu * | P_n * f - P_n * P * f | = 0$$

Beweis. Es sei zunächst $P_0, P_1, \ldots,$ eine K-Folge. Für alle $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$, $P \in \mathfrak{P}$ und $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ ist nach 5.3.

5.7.1. $$\lim_{n\to\infty} (\mu k_A) * P_n * (f - P * f) = 0; \ \forall A \in \mathfrak{A}.$$

Und nach 5.6.

5.7.2 $$\lim_{n\to\infty} (\mu k_B) * | P_n * (f - P * f) | = 0; \ \forall B \in \mathfrak{B}.$$

Nach dem Lemma aus Abschnitt 2 in [4] sind die Beziehungen 5.7.1 und 5.7.2 hinreichend für $\lim_{n\to\infty} \mu * | P_n * (f - P * f) | = 0$, d. h. wir haben:

5.7.3. $\lim_{n\to\infty} \mu * | P_n * f - P_n * P * f | = 0$ *für alle* $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$, $P \in \mathfrak{P}$ *und* $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$.

Es sei nun $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}, f \in \mathfrak{C}^{00}$ und $P_0, P_1, \ldots, \in \mathfrak{P}$. Es ist dann für alle $P \in \mathfrak{P}$ und $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} | [\mu] * f - \mu * P_n * f | &\leq | [\mu] * f - \mu * P_n * P * f | + | \mu * P_n * P * f - \mu * P_n * f | \\ &\leq \sup_{P' \in R} | [\mu] * f - \mu * P' * P * f | + \mu * | P_n * f - P_n * P * f |. \end{aligned}$$

Ist 5.7.3 erfüllt für alle $P \in \mathfrak{P}$ und $f \in \mathfrak{C}^{00}$, so erhalten wir daraus

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} | [\mu] * f - \mu * P_n * f \leq \inf_{P \in \mathfrak{P}} \sup_{P' \in \mathfrak{P}} | [\mu] * f - \mu * P' * P * f | = 0.$$

Damit ist 5.7 bewiesen.

5.8. *Es sei* $\mu \in M^{\mathrm{pr}}_{\mathfrak{P}}$ und $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$. *Für alle K-Folgen* $P_0, P_1, \ldots,$ *über* $\mathfrak{P}$ *gilt:* $\lim_{n\to\infty} \mu * (P_n * f)^2 = 0$.

Beweis. Es sei $P \in \mathfrak{P}$. Wegen 5.7 ist dann

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} | \mu * (P_n * f)^2 - \mu * (P_n * P * f)^2 | \leq 2 \| f \| \lim_{n\to\infty} \mu * | P_n * f - P_n * P * f | = 0.$$

Unter Verwendung von 4.4 und 4.5 zeigt man nun leicht, daß mit f auch $(P*f)^2 \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ ist. Wir erhalten deshalb für alle $P' \in \mathfrak{P}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu * (P_n * f)^2 = \overline{\lim}\, \mu * (P_n * P * f)^2 \leqq \lim \mu * P_n * (P*f)^2$$
$$= [\mu] * (P*f)^2 = [\mu] * P' * (P*f)^2.$$

Nach 5.4 ist jedoch stets

$$\inf_P \sup_{P'} [\mu] * P' * (P*f)^2 = 0.$$

Daraus können wir nun die Behauptung von 5.8 ableiten.

Wir kommen nun zum Beweis von Theorem 2.

Die Behauptung (I) von Theorem 2 erhält man unmittelbar aus 5.8, wenn man beachtet, daß zu jedem $B \in \mathfrak{C}$ ein $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ existiert mit $f(x) \geqq k_B(x)$; $\forall\, x \in E$ und stets gilt $(P * k_B)(x) = P(x, B)$. Um Behauptung (II) zu beweisen, betrachten wir zunächst eine K-Folge $P_0, P_1, \ldots,$ über $\mathfrak{P}$. Nach 5.7 ist dann

$$\lim_{n\to\infty} \mu * | P_n * f - P_n * P * f | = 0$$

für alle $\mu \in M^{\text{pr}}_{\mathfrak{P}}$, $P \in \mathfrak{P}$ und $f \in \mathfrak{C}^{00}$. Daraus kann man schließen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \int \mu(dx)\, | P_n(x, B) - (P_n * P)(x, B) | = 0$$

für alle $P \in \mathfrak{P}$, $\mu \in M^{\text{pr}}_{\mathfrak{P}}$ und alle $[\mu]$-Stetigkeitsmengen $B \in \mathfrak{B}$ gilt.

Sei jetzt umgekehrt eine Folge $P_0, P_1, \ldots \in \mathfrak{P}$ gegeben, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \int \mu(dx)\, | P_n(x, B) - P_n * P(x, B) | = 0$$

für alle $\mu \in M^{\text{pr}}_{\mathfrak{P}}$, $P \in \mathfrak{P}$ und $[\mu]$-Stetigkeitsmengen ist. Man kann daraus schließen daß $\lim_{n\to\infty} \mu\, | P_n * f - P_n * P * f | = 0$ für alle $\mu \in M^{\text{pr}}_{\mathfrak{P}}$, $P \in \mathfrak{P}$ und $f \in \mathfrak{C}^{00}$ ist.

Aus dem zweiten Teil des Beweises von 5.7 geht hervor, daß letzteres hinreichend dafür ist, daß $P_0, P_1, \ldots,$ eine K-Folge ist. Damit ist Theorem 2 bewiesen.

Wir beweisen nun noch die Beziehung 1.5.2.

Dazu sei über die Verschiebungshalbgruppe $\mathfrak{P}$ nur vorausgesetzt, daß sie separabel und stetig ist.

Unmittelbar aus der Aussage (II) unter Theorem 2 folgt, daß $\mathfrak{P}$ mischend ist. Man muß nur im Auge behalten, daß nach 3.2 für separable Verschiebungshalbgruppen K*-Folgen und damit auch K-Folgen existieren.

Wir wollen nun annehmen, daß $\mathfrak{P}$ nicht flüchtig ist, d. h. ein Verteilungsgesetz $\nu \in M^{\text{inv}}_{\mathfrak{P}}$ existiert. Es gibt dann ein $B \in \mathfrak{B}$ mit $\nu(B) > 0$. Wir bekommen dann für alle $P \in \mathfrak{P}$

$$\nu(B) = \int P(x, B)\nu(dx) \leq \nu(B)/2 + \nu(\{x \in E;\ P(x, B) \geq \nu(B)/2\})$$

und damit $\nu(\{x \in E;\ P(x, B) \geq \nu(B)/2\}) \geq \nu(B)/2$; $\forall\, P \in \mathfrak{P}$. Daraus folgt nun für alle $P \in \mathfrak{P}$

$$\int \nu(dx)\,(P(x, B))^2 \geqq (\nu(B)/2)^2 \nu(\{x \in E;\ P(x, B) \geqq \nu(B)/2\}) \geqq (\nu(B)/2)^3.$$

Wegen $\nu(B) > 0$ ergibt das jedoch einen Widerspruch zu der Aussage (I) unter Theorem 2. Damit ist 1.5.2 bewiesen.

6. Beweis von Theorem 3. Im folgenden sei $\mathfrak{P}$ eine flüchtige, separable und stetige Verschiebungshalbgruppe auf E. Ist $\mathfrak{P}$ mischend, so folgt aus 5.2, daß für alle $A \in \mathfrak{A}$, alle $P \in \mathfrak{P}$ und $\mu \in M^{\text{inv}}_{\mathfrak{P}}$ das Maß $\mu k_{\overline{A}} + (\mu k_A) * P \in M^{\text{pr}}_{\mathfrak{P}}$ und $[\mu k_{\overline{A}} + (\mu k_A) * P] = \mu$ ist.

Wir setzen nun umgekehrt voraus, daß für alle $A \in \mathfrak{A}$, alle $P \in \mathfrak{P}$ und alle $\mu \in M^{\text{inv}}_{\mathfrak{P}}$ das Maß $\mu k_{\overline{A}} + (\mu k_A) * P \in M^{\text{pr}}_{\mathfrak{P}}$ und $[\mu k_{\overline{A}} + (\mu k_A) * P] = \mu$ ist. Auf die gleiche Weise wie 5.3 unter Verwendung von 5.2 bewiesen wird, erhalten wir zunächst.

6.1 *Es sei* $\mu \in M^{\text{inv}}_{\mathfrak{P}}$, $A \in \mathfrak{A}$, $P \in \mathfrak{P}$ *und* $f \in \mathfrak{C}^{00}$. *Für alle K-Folgen* $P_0, P_1, \ldots$ *über* $\mathfrak{P}$ *gilt*: $\lim (\mu k_A) * R_n * (f - P * f) = 0$.

Wir zeigen nun

6.2. *Für alle* $\mu \in M^{\text{inv}}_{\mathfrak{P}}$ *und alle* $B \in \mathfrak{B}$ *ist* $\mu k_B \in M^{\text{pr}}_{\mathfrak{P}}$ *und es gilt*: $[\mu k_B] = 0$.

Beweis. Wegen Theorem 1 genügt es zu zeigen, daß für alle K-Folgen $P_0, P_1, \ldots,$ über $\mathfrak{P}$ und alle $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ stets gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (\mu k_B) * P_n * f = 0.$$

Wir wollen annehmen, daß ein $\mu \in M^{\text{inv}}_{\mathfrak{P}}$, ein $B \in \mathfrak{B}$, ein $h \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$, ein $d > 0$ und eine K-Folge $P_0, P_1, \ldots,$ existieren mit $\overline{\lim} \,|(\mu k_B) * P_n * h| > d$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß h nichtnegativ und $\lim_{n\to\infty} (\mu k_B) * P_n * h = d$ ist. Wie beim Beweis von 5.4 wird $\mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ zu einem linearen normierten Raum gemacht. Dabei stellt für iedes $n = 0, 1, \ldots, L_n(f) = (\mu k_B) * P_n * f;\ \forall f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ eine Linearform auf $\mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ dar, die stetig ist und es gilt: $\|L_n\| \leq 1;\ \forall n = 0, 1, \ldots$ Daraus folgt, daß es eine stetige Linearform L mit folgender Eigenschaft gibt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$, jedem n_0 und $f_1, \ldots, f_k \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ existiert ein $n_1 \geq n_0$, so daß gilt: $|L(f_i) - L_{n_1}(f_i)| < \varepsilon;\ \forall i = 1, \ldots, k$.

Weiter erhält man:

6.2.1. *Es ist* $L(h) = d$.

6.2.2. *Es gelten die Beziehungen*: $|L(f)| \leq \mu(B)\,\|f\|;\ \forall f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}\ |L(f)| \leq \mu * |f|;\ \forall f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}},\ L(f) \geq 0;\ \forall f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ mit $f \geq 0$.

Sei nun $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$. Zu jedem n_0 und $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $n_1 \geq n_0$ mit $|L(f) - L_{n_1}(f)| < \varepsilon/3$, $|L(P * f)| < \varepsilon/3$. Das ergibt $|L(f) - L(P * f)| < 2\varepsilon/3 + |(\mu k_B) * P_{n_1} * (f - P * f)|$ Nach 6.1. kann man n_0 so groß wählen, daß $|(\mu k_B) * P_n * (f - P * f)| < \varepsilon/3$ ist für alle $n \geq n_0$. Wir haben damit $|L(f) - L(P * f)| > \varepsilon$. Es gilt also

6.2.3. *Für alle* $f \in \mathfrak{C}^0_{\mathfrak{P}}$ *ist* $L(f) = L(P * f)$.

Wie beim Beweis von 5.4 können wir nun aus 6.2.1, 6.2.2 und 6.2.3 auf die Existenz eines $\mathfrak{P}$-invarianten Verteilungsgesetzes schließen und erhalten somit einen Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $\mathfrak{P}$ flüchtig ist. 6.2 ist damit bewiesen.

6.3. *Es seien* $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{inv}}$, $B \in \mathfrak{B}$, $P \in \mathfrak{P}$ *und* $f \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{P}}^{0}$. *Dann gilt für alle K-Folgen* $P_0, P_1, \ldots$, *über* $\mathfrak{P}$

$$\lim_{n\to\infty} (\mu k_B) * |P_n * (f - P * f)| = 0.$$

Man beweist 6.3 unter Verwendung von 6.2 auf die gleiche Weise, wie 5.5 unter Verwendung von 5.4.

Es seien nun $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{inv}}$, $P \in \mathfrak{P}$, $f \in \mathfrak{C}^{00}$ und $P_0, P_1, \ldots$, eine K-Folge über $\mathfrak{P}$. Aus 6.1 und 6.3 erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} (\mu k_A) * P_n * (f - P * f) = 0; \quad \forall A \in \mathfrak{A}, \quad \lim_{n\to\infty} (\mu k_B) * |P_n * (f - P * f)| = 0; \quad \forall B \in \mathfrak{B}.$$

Nach dem Lemma aus Abschnitt 2 in [4] folgt daraus $\lim_{n\to\infty} \mu * |P_n * (f - P * f)| = 0$. Nach 3.2 existieren stets K*-Folgen und damit auch K-Folgen über $\mathfrak{P}$. Es muß deshalb $\inf_{P\in\mathfrak{P}} \mu * |P * f - P * P_0 * f| = 0$ für alle $P_0 \in \mathfrak{P}$, alle $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{inv}}$ und alle $f \in \mathfrak{C}^{00}$ sein. Man zeigt leicht, daß dann auch $\inf_{P\in\mathfrak{P}} \mu * |P * f - P * P_0 * f| = 0$ ür alle $P_0 \in \mathfrak{P}$, alle $\mu \in M_{\mathfrak{P}}^{\text{inv}}$ und alle $f \in L_{\mu}^{1}$ ist. Das schließt ein, daß $\mathfrak{P}$ mischend ist. Theorem 3 ist damit bewiesen.

LITERATUR

1. H. Debes, A. Liemant, J. Kerstan, K. Matthes. Verallgemeinerung eines Satzes von Dobruschin III. *Math. Nachr.*, **50**, 1971, 99—139.
2. Р. К. Добрушин. О законе Пуассона для распределения частиц в пространстве. *Укр. мат. ж.*, **8**, 1956, 127—134.
3. I. L. Doob. Stochastic Processes. New York — London, 1953.
4. K.-H., Fichtner. Gleichverteilungseigenschaften substochastischer Kerne und zufällige Punktfolgen. *Math. Nachr.*, **62**, 1974, 251—260.
5. H. Herrmann. Glättungseigenschaften den Faltung. *Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena. Math.-naturwiss. Reihe*, 14, 1966, Heft 5, 221—234.
6. J. Kerstan, K. Matthes. Gleichverteilungseigenschaften von Faltungen von Verteilungsgesetzen auf lokalkompakten abelschen Gruppen. *Math. Nachr.*, **37**, 1968, 267—312.
7. J. Kerstan, K. Matthes, J. Mecke. Unbegrenzt teilbare Punktprozesse. Berlin, 1974.
8. K.-H. Fichtner, J. Kerstan. Approximation von Mischungen Poissonscher Punktprozesse durch verschobene Punktprozesse. *Serdica*, **4**, 1978, 367—378.
9. K.-H. Fichtner, J. Kerstan. Invarianz von Punktprozessen bei zufälliger Bewegung I. *Serdica*, **6**, 1980.
10. C. Stone. On a theorem by Dobrushin. *Ann Math. Stat.*, 39, 1968, 1391—1401.

Friedrich-Schiller-Universität
Sektion Mathematik
UHH, 17.06 69 Jena

Eingegangen am 30.3.1978