Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

ОДНА ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

ХРИСТО В. ПАВЛОВ

Рассматривается система $GI/M/n/0$. В случае, когда для этой системы верны формулы Эрланга, найдена зависящая от x, клонящая к нулю при $n\to\infty$ оценка сверху для $|1-e^{-\lambda x}-F(x)|$, где $F(x)$ — функция распределения, определяющая рекуррентный поток, а λ^{-1} — среднее время между двумя последовательными приходами требований в систему. В случае, когда λ^{-1} равно среднему времени обслуживания одной непотерянной заявки, найдена независящая от x оценка сверху для $|1-e^{-\lambda x}-F(x)|$ порядка $2\pi/n$.

Еще Эрлангом были доказаны его знаменитые формулы для системы $M/M/n/0$. Намного позже Севастьянов [2] доказал, что эти формулы верны для системы $M/G/n/0$. Результат Севастьянова показывает, что простые формулы Эрланга имеют довольно широкий круг применения. Представляет интерес обратная задача — что можно сказать об основных характеристиках систем массового обслуживания, если для них верны формулы Эрланга.

Обозначения; Пусть t_k — момент прихода k-ого требования в систему $GI/M/n/0$; η_k — время обслуживания k-ого, поступившего в систему требования;

$$F(x)=P\{t_{k+1}-t_k<x\};\quad \int_0^\infty[1-F(x)]dx=\frac{1}{\lambda};\quad f(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dF(x);$$

$$P\{\eta_k<x\}=\begin{cases}0, & x\leq 0;\\ 1-e^{-\nu x}, & x>0;\end{cases}\qquad \lambda/\nu=\varrho;\quad s_j=\varrho/\varrho+j.$$

Постановка задачи. В своей диссертации [3] автор доказал, что для выполнения формул Эрланга для систем $GI/M/n/0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f(\nu)=\lambda/(\lambda+\nu),\quad f(2\nu)=\lambda/(\lambda+2\nu),\ \dots,\quad f(n\nu)=\lambda/(\lambda+n\nu). \tag{1}$$

Также было доказано, что, если $f(i\nu)=\lambda/(\lambda+i\nu)$, $i=\overline{1,\infty}$, то $F(x)=1-e^{-\lambda x}$, поэтому вполне естественно ожидать, что $F(x)$ мало будет отличаться от $1-e^{-\lambda x}$, если только (1) выполняется для большого n. Задача этой работы доказать следующую теорему.

Теорема. *Если для систем* $GI/M/n/0$ ($\varrho=1$, $n=4m$ *или* $n=4m+2$) *верны формулы Эрланга, то*

$$\sup_{x\in[0,\infty)}|1-e^{-\lambda x}-F(x)|\leq 2\left[\frac{(2m+1)!}{2^{2m}\,m!\,m!}\right]^{-2}\underset{m\to\infty}{\sim}\frac{\pi}{2m}.$$

Чтобы найти оценку сверху для $\sup_{x\in(0,\infty)}|1-e^{-\lambda x}-F(x)|$, рассмотрим случай, когда $n=2k$. Имеют место соотношения (1), т. е.

$$\frac{\lambda}{\lambda+j\nu}=\int_0^\infty (e^{-\nu x})^j dF(x),\quad j=0,\ 1,\ldots,\ 2k. \tag{2}$$

Если в (2) сделаем замену $e^{-\nu x}=y$, получим

$$\frac{\sigma}{\varrho+j}=\int_0^1 y^j d\Big[1-F\Big(-\frac{1}{\nu}\ln y\Big)\Big],\quad j=0,\ 1,\ldots,\ 2k, \tag{3}$$

где $\varrho=\lambda/\nu$.

Положим $\sigma(y)=1-F\Big(-\frac{1}{\nu}\ln y\Big)$. Заметим, что $\sigma(y)$ не убывает на $(0,1]$. Если $F(x)=1-e^{-\lambda x}$, то $\sigma(y)=y^\varrho$.

Если воспользоваться следствием 2.5.4 из [1] и фактом, что y^ϱ — непрерывная функция, получим, что если только s_j, $j=\overline{0,2k}$ — позитивная последовательность, что при любых $y\in(0,1]$

$$|\sigma(y)-y^\varrho|\leq\varrho_k(y), \tag{4}$$

где $\varrho_k^{-1}(y)=-D_{2k}(y)/D_{2k}$;

$$D_{2k}(y)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & y & \ldots y^k\\ 1 & s_0 & s_1 & \ldots s_k\\ y & s_1 & s_2 & \ldots s_{k+1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y & s_k & s_{k+1} & \ldots s_{2k}\end{vmatrix};\quad D_{2k}=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots s_k\\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots s_{k+1}\\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots s_{k+2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ s_k & s_{k+1} & s_{k+2} & \ldots s_{2k}\end{vmatrix};$$

$$s_j=\int_0^1 y^j d\sigma(y)=\int_0^1 y^j dy^p=\frac{\varrho}{\varrho+j},\ j=\overline{0,2k}.$$

Заметим, что позитивность последовательности s_j, $j=\overline{0,2k}$ следует из факта, что $s_j=\int_0^1 y^j dy^\varrho$, $j=\overline{0,\infty}$.

Обозначим через D_{2k}^{ij} определитель, который получается, зачеркнув $(i+1)$-ый ряд и $(j+1)$-ый столбец определителя D_{2k}.
Тогда из (4) получим

$$\varrho_k^{-1}(y)=\sum_{m=0}^{2k}(-1)^m\Big(\sum_{i+j=m}\frac{D_{2k}^{ij}}{D_{2k}}\Big)y^m. \tag{5}$$

Можно показать, что $D_{2k}^{ij}/D_{2k}=\beta_i\beta_j/(\varrho(\varrho+i+j))$ $i=\overline{0,k}$, $j=\overline{0,k}$, где $\beta_j=(\varrho+i)(\varrho+i+1)\ldots(\varrho+i+k)/(i!\,(n-i)!)$, $i=\overline{0,k}$, $\beta_i=0$ при $i<0$ и $i>k$.

Из верхного равенства и из (5) получаем

$$\varrho_k^{-1}(y)=\sum_{m=0}^{2k}(-1)^m\frac{1}{\varrho(\varrho+m)}\Big(\sum_{i+j=m}\beta_i\beta_j\Big)y^m. \tag{6}$$

Если в (4) заменим y на $e^{-\nu x}$, при помощи (6) получим

$$(7)\qquad |1-e^{-\lambda x}-F(x)|\leq\left[\sum_{m=0}^{2k}\frac{(-1)^m}{\varrho(\varrho+m)}\left(\sum_{i+j=m}\beta_i\beta_j\right)e^{-m\nu x}\right]^{-1}.$$

Хотя (7) дает возможность оценить $|1-e^{-\lambda x}-F(x)|$ сверху для любого положительного x, эта оценка практически бесполезна из-за своей сложности. Дальше мы будем искать сходящуюся к нулю оценку сверху для правой части неравенства (7).

Помножим (6) на y^ϱ и продифференцируем

$$(8)\qquad [\varrho_k^{-1}(y)y^\varrho]'=\frac{1}{\varrho}\sum_{m=0}^{2k}\left(\sum_{i+j=m}\beta_i\beta_j\right)(-y)^m=\frac{1}{\varrho}\left[\sum_{m=0}^{k}\beta_m(-y)^m\right]^2\geqq 0.$$

Из (8) следует, что $\varrho_k^{-1}(y)y^\varrho$ не убывает.

А теперь разложим $\varrho_k^{-1}(y)$ по степеням $(1-y)$. С этой целью помножим все нечетные (начиная с третьего) ряды и столбцы $D_{2k}(y)$ на -1. Потом помножим i-тый столбец $(i=\overline{2,\,k+1})$ на $\binom{k}{i-2}$ и прибавим к $(k+2)$-ым, потом помножим i-тый столбец $(i=\overline{2,k})$ на $\binom{k-1}{i-2}$ и прибавим к $(k+1)$-ым и так далее. Затем проведем те же операции с рядами. Тогда $D_{2k}(y)$ запишется так

$$(9)\qquad D_{2k}(y)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & (1-y) & \dots & (1-y)^k\\ 1 & s_0' & s_1' & \dots & s_k'\\ (1-y) & s_1' & s_2' & \dots & s_{k+1}'\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ (1-y)^k & s_k' & s_{k+1}' & \dots & s_{2k}'\end{vmatrix},$$

где

$$s_i'=\int_0^1(1-x)^i\,dx^\varrho=\varrho\int_0^1(1-x)^i x^{\varrho-1}dx=\frac{\varrho\Gamma(i+1)\Gamma(\varrho)}{\Gamma(i+\varrho+1)}$$

$$=\frac{i!\,\varrho\Gamma(\varrho)}{(i+\varrho)\dots(1+\varrho)\varrho\Gamma(\varrho)}=\frac{i!}{(\varrho+1)(\varrho+2)\dots(\varrho+i)}.$$

Из (4) и (9) следует

$$(10)\qquad \varrho_k^{-1}(y)=-\frac{1}{D_{2k}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & (1-y) & \dots & (1-y)^k\\ 1 & s_0' & s_1' & \dots & s_k'\\ (1-y) & s_1' & s_2' & \dots & s_{k+1}'\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ (1-y)^k & s_k' & s_{k+1}' & \dots & s_{2k}'\end{vmatrix},$$

где $s_0'=1$, $s_i'=\dfrac{i!}{(\varrho+1)(\varrho+2)\dots(\varrho+i)}$, $i=\overline{1,\,2k}$.

Рассмотрим сперва случай $\varrho=1$. Так как при $\varrho=1$, $s_i=s'_i=1/(i+1)$, будем иметь $\varrho_k^{-1}(y)=\varrho_k^{-1}(1-y)$, откуда следует, что прямая $y=1/2$ является осью симметрии для графика $\varrho_k^{-1}(y)$. Значит $\varrho_k^{-1}(y)$ имеет экстремум в точке $1/2$.

Из (8) получим $[\varrho_k^{-1}(y)]'y+\varrho_k^{-1}(y)=[\sum_{m=0}^k\beta_m(-y)^m]^2$. При $y=1/2$, учитывая, что $[\varrho_k^{-1}(y)]'|_{y=1/2}=0$, получим

$$\varrho_k^{-1}(1/2)=\left[\sum_{m=0}^{k}\beta_m(-1/2)^m\right]^2. \tag{11}$$

Из (8) следует, что $\varrho_k^{-1}(y).y$ не убывает. Так как $(1-y)\varrho_k^{-1}(y)=(1-y)\varrho_k^{-1}(1-y)$, то $(1-y)\varrho_k^{-1}(y)$ не возрастает. Очевидно, что для $y\in[0,1]$

$$\varrho_k^{-1}(y)\geq\max[(1-y)\varrho_k^{-1}(y),\ y\varrho_k^{-1}(y)]\geq\varrho_k^{-1}(1/2)/2. \tag{12}$$

Займемся нахождением $\varrho_k^{-1}(1/2)$. Из (11) получим, что

$$\varrho_k^{-1}(1/2)=[h_k(1/2)]^2, \tag{13}$$

где

$$h_k(z)=\sum_{m=0}^{k}\beta_m(-z)^m=\sum_{m=0}^{k}\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k+1)}{m!\,(k-m)!}(-z)^m$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}(m+1)(m+2)\ldots(m+k+1)(-1)^m z^m.$$

Нетрудно заметить, что

$$h_k(z)=\frac{1}{k!}\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}(1-z)^k z^{k+1}.$$

Применив формулу Лейбница—Ньютона, получим

$$h_k(z)=\frac{1}{k!}\frac{d^{k+1}(z-z^2)^k}{dz^{k+1}}.z+\frac{k+1}{k!}\frac{d^k(z-z^2)^k}{dz^k}. \tag{14}$$

Для нахождения $h_k(z)$ воспользуемся следующим результатом.

Лемма. *Если $g(z)$ — многочлен второй степени, $f(x)$ — многочлен, то*

$$\frac{d^{2m}f(g(z))}{dz^{2m}}=\sum_{i=0}^{m}B_{2m}^i f^{(2m-i)}(g(z))[g'(z)]^{2m-2i}[g''(z)]^i,$$

$$\frac{d^{2m+1}f(g(z))}{dz^{2m+1}}=\sum_{i=0}^{m}B_{2m+1}^i f^{(2m+1-i)}(g(z))[g'(z)]^{2m-2i+1}[g''(z)]^i, \tag{15}$$

где $B_n^i=n(n-1)\ldots(n-2i+2)(n-2i+1)/(2^i i!)$.

Эту лемму можно доказать по индукции. Если $k=2m$, применив (14) и лемму для $g(z)=z-z^2$, $f(x)=x^{2m}$, получим

$$h_{2m}(1/2)=[(-1)^m(2m+1)!]/(4^m m!\,m!). \tag{16}$$

Если $k=2m+1$, применив (14) и лемму для $g(z)=z-z^2$, $f(x)=x^{2m+2}$, получим

$$h_{2m+1}(1/2)=[(-1)^{m+1}(2m+1)!]/(4^m\, m!\, m!). \tag{17}$$

При помощи (12), (13), (16), (17) и формулы Стирлинга получим

$$\varrho_{2m}(y)\geq 2\left[\frac{(2m+1)!}{2^{2m}\, m!\, m!}\right. \underset{m\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2m}, \quad \varrho_{2m+1}(y)\leq 2\left[\frac{(2m+1)!}{2^{2m}\, m!\, m!}\right]^{-2} \underset{m\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2m}. \tag{18}$$

Так как $\sup_{x\in[0,\infty)}|1-e^{-\lambda x}-F(x)|=\sup_{y\in(0,1]}|y^{\varrho}-\sigma(y)|$, то из (4) и (18) следует справедливость теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. Классическая проблема моментов. Москва, 1961.
2. Б. Севастьянов. Формулы Эрланга в телефонии при произвольном законе распределения длительности разговоров. Труды III Всесоюзного математического съезда, т. 4. Москва, 1959.
3. Х. В. Павлов. Условия пуассоновости входящего потока в терминах характеристик систем с потерями. Диссертация, Москва, 1974.

Высший педагогический институт
кафедра математики
9700 Шумен

Поступила 27. 7. 1978