Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ASYMPTOTISCHE INVARIANZ BEI HALBGRUPPEN STOCHASTISCHER KERNE II

JOHANNES KERSTAN, KARL-HEINZ FICHTNER

Im ersten Teil der Arbeit unter diesem Titel wird eine Mischungseigenschaft für Halbgruppen substochastischer Kerne untersucht, die in engem Zusammenhang mit der Gültigkeit bestimmter Konvergenzaussagen für Verschiebungen zufälliger Punktfolgen und von Strukturaussagen über die Menge der verschiebungsinvarianten zufälligen Punktfolgen steht. Konvexe Halbgruppen besitzen stets diese Mischungseigenschaft. Von Interesse sind jedoch auch nichtkonvexe Halbgruppen, wie etwa die Halbgruppe der Faltungspotenzen eines einzigen substochastischen Kerns. Bei solchen Halbgruppen ist es im allgemeinen sehr schwierig zu überprüfen, ob sie mischend sind. Wir werden das am Beispiel einer einfachen Klasse substochastischer Kerne demonstrieren.

1. Die Mischungseigenschaft. Es bezeichne Γ die Menge der ganzen Zahlen und N die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null. Wir betrachten die Halbgruppe $\mathfrak{P}=(P^n)_{n\in N}$ der Potenzen einer substochastischen Matrix $P=((P(x, y)))_{x,y\in\Gamma}$ über Γ.

M sei die Menge aller auf endlichen Teilmengen von Γ endlichen Maße. Für alle $\pi\in M$ und $x\in\Gamma$ schreiben wir der Kürze halber $\pi(x)$ anstatt $\pi(\{x\})$. Für alle $n\in N$ und alle $y\in\Gamma$ setzen wir

$$\pi*P^n(y)=\sum_{x\in\Gamma}\pi(x)\,P^n(x, y).$$

π ist $\mathfrak{P}$-invariant, wenn gilt: $\pi=\pi*P$.

Nach [3] heißt die Halbgruppe $\mathfrak{P}$ flüchtig, wenn keine $\mathfrak{P}$-invarianten Verteilungsgesetze existieren. Dafür ist hinreichend, daß alle $y\in\Gamma$ transient sind, d. h. $\Sigma_{n\in N}P^n(y, y)<\infty$; $\forall\, y\in\Gamma$ ist. $\mathfrak{P}$ heißt mischend, wenn für alle $\mathfrak{P}$-invarianten Maße π, alle $m\in N$ und alle $y\in\Gamma$ gilt:

$$\inf_{n\in N}\sum_{x\in\Gamma}\pi(x)\,|R^{m+n}(x, y)-R^n(x, y)|=0.$$

Für alle $\mathfrak{P}$-invarianten Maße π ist nun stets

$$\sum_{x\in\Gamma}\pi(x)\,|R^{m+n}(x, y)-R^n(x, y)|\geq\sum_{x\in\Gamma}\pi(x)\,|R^{m+n+1}(x, y)-R^{n+1}(x, y)|.$$

$\mathfrak{P}$ ist deshalb genau dann mischend, wenn für alle $\mathfrak{P}$-invarianten Maße π und alle $y\in\Gamma$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{x\in\Gamma}\pi(x)\,|R^{n+1}(x, y)-R^n(x, y)|=0.$$

Eine Folge $(\pi_i)_{i\in\Gamma}$ von Maßen aus M nennen wir $\mathfrak{P}$-invariant, wenn $\pi_i*P=\pi_{i+1}$ für alle $i\in\Gamma$ ist. Wir erhalten nun folgende Beziehung.

Theorem 1. *Es seien alle $x\in\Gamma$ transient. Existiert eine $\mathfrak{P}$-invariante Folge von Verteilungsgesetzen, so ist $\mathfrak{P}$ nicht mischend.*

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol 5, 1979, 310—315.

Beweis. Es sei $(\pi_i)_{i\in\Gamma}$ eine $\mathfrak{P}$-invariante Folge von Verteilungsgesetzen auf Γ. Für alle $i\in\Gamma$ und $k\in N$ ist dann $\pi_{i+k}=\pi_i * P^k$. Für alle $y, i\in\Gamma$ gilt deshalb:

$$\sum_{n=i}^{\infty} \pi_n(y)=\sum_{x\in\Gamma} \pi_i(x) \sum_{n\in N} P^n(x, y).$$

Da andererseits stets

$$\sum_{n\in N} P^n(x, y)\leqq \sum_{n\in N} P^n(y, y); \quad \forall\, x, y\in\Gamma$$

und alle $y\in\Gamma$ transient sind, können wir daraus schließen, daß durch

$$\pi(x)=_{\mathrm{Def}} \sum_{i\in\Gamma} \pi_i(x); \quad \forall\, x\in\Gamma$$

ein Maß aus M definiert ist. Man überprüft leicht, daß π auch $\mathfrak{P}$-invariant ist.

Es gilt nun für alle $y\in\Gamma$ und $n\in N$ die folgende Ungleichungskette.

$$\sum_{x\in\Gamma} \pi(x)\,|P^n(x, y)-P^{n+1}(x, y)|\geqq \sum_{x\in\Gamma}\sum_{i=-n}^{\infty} \pi_i(x)\,|P^n(x, y)-P^{n+1}(x, y)|$$

$$\geqq \sum_{i=-n}^{\infty} (\pi_i * P^n(y)-\pi_i * P^{n+1}(y))\geqq \pi_0(y).$$

Wegen $\pi_0(\Gamma)=1$ muß deshalb ein $y\in\Gamma$ existieren, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x\in\Gamma} \pi(x)\,|P^n(x, y)-P^{n+1}(x, y)|>0$$

ist. Theorem 1 ist damit bewiesen.

2. Ein Beispiel. Im weiteren sei stets P eine stochastische Matrix mit $P(x, x)=1-P(x, x+1)<1$; $\forall\, x\in\Gamma$. Die Mischungseigenschaft läßt sich dann in der folgenden Weise charakterisieren.

Theorem 2. *Folgende Aussagen sind gleichwertig:*

(1) *$\mathfrak{P}$ ist mischend;*

(2) *Es existiert keine $\mathfrak{P}$-invariante Folge von Verteilungsgesetzen;*

(3) *Es ist* $\sum_{n\in N} P(-n, -n)=\infty$.

Um den Beweis von Theorem 2 führen zu können, ermitteln wir zunächst die Struktur der $\mathfrak{P}$-invarianten Maße.

2.1. *Ein Maß π auf Γ ist genau dann $\mathfrak{P}$-invariant, wenn ein $c\geqq 0$ existiert, so daß gilt:* $\pi(x)=c/(1-P(x, x))$; $\forall\, x\in\Gamma$.

Beweis. Es ist genau dann $\pi * P=\pi$, wenn für alle $x\in\Gamma$ gilt:

$$\pi(x)=\pi(x)\,P(x, x)+\pi(x-1)\,(1-P(x, x)).$$

Das ist gleichbedeutend mit $\pi(x)\,(1-P(x, x))=\pi(x-1)\,(1-P(x-1, x-1))$; $\forall\, x\in\Gamma$. Berücksichtigt man, daß stets $P(x, x)<1$; $\forall\, x\in\Gamma$ ist, so kann man daraus auf 2.1. schließen.

Wegen $P(x, x)+P(x, x+1)=1$; $\forall\, x\in\Gamma$ erhalten wir nun für alle $n\in N$ und $x, y\in\Gamma$

$$P^{n+1}(x, y)=P(x, x)P^n(x, y)+(1-P(x, x))\,P^n(x+1, y)$$

und damit

$$|P^n(x, y)-P^{n+1}(x, y)|=(1-P(x, x))\,|P^n(x, y)-P^n(x+1, y)|.$$

Unter Verwendung von 2.1. können wir daraus auf die Gültigkeit folgender Aussage schließen:

2.2. *$\mathfrak{P}$ ist genau dann mischend, wenn für alle $y \in \Gamma$ die Konvergenz*

$$\sum_{x \in \Gamma} |P^n(x, y) - P^n(x+1, y)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

statt hat.

Mit Hilfe von 2.2. beweisen wir nun:

2.3. *$\mathfrak{P}$ ist genau dann mischend, wenn für alle $y \in \Gamma$ die Konvergenz*

$$\max_{x \in \Gamma} P^n(x, y) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

statt hat.

Beweis. Wir zeigen zunächst mittels vollständiger Induktion, daß für alle $n \in N$ und alle $y \in \Gamma$ die Folge $(P^n(x, y))_{x \in \Gamma}$ die nachstehende Eigenschaft besitzt:

(B) Es existiert ein $z_n^y \in \Gamma$, so daß gilt:

$$P^n(x, y) \leqq P^n(x+1, y); \qquad \forall\, x \leqq z_n^y$$

$$P^{n+1}(x+1, y) \geqq P^n(x+2, y); \quad \forall\, x \geqq z_n^y$$

$$P^n(z_n^y, y) > P^n(z_n^y+2, y).$$

Trivialerweise besitzt für alle $y \in \Gamma$ die Folge $(P^0(x, y))_{x \in \Gamma}$ die Eigenschaft (B) Nehmen wir nun an, für alle $y \in \Gamma$ würde $(P^n(x, y))_{x \in \Gamma}$ die Eigenschaft (B) besitzen. Wir zeigen, daß dann auch für alle $y \in \Gamma$ die Folge $(P^{n+1}(x, y))_{x \in \Gamma}$ die Eigenschaft (B) besitzt.

Auf Grund der speziellen Struktur von P erhalten wir zunächst für alle $x \in \Gamma$:

$$P^{n+1}(x, y) - P^{n+1}(x+1, y)$$

$$= P(x, x)\,(P^n(x, y) - P^n(x+1, y)) + (1 - P(x, x))\,(P^n(x+1, y) - P^n(x+2, y)).$$

Für $x \leqq z_n^y - 1$ folgt weiter aus der Induktionsvoraussetzung $P^n(x, y) - P^n(x+1, y) \leqq 0$ und $P^n(x+1, y) - P^n(x+2, y) \leqq 0$. Mit hin erhalten wir $P^{n+1}(x, y) \leqq P^{n+1}(x+1, y)$; $\forall\, x \leqq z_n^y - 1$. Weiter war vorausgesetzt, daß $P^n(z_n^y, y) - P^n(z_n^y+2, y) > 0$ und $P^n(z_n^y+2, y) - P^n(z_n^y+3, y) \geqq 0$ ist. Wir erhalten deshalb $P^{n+1}(z_n^y+1, y) > P^{n+1}(z_n^y+2, y)$. Schließlich ist noch für alle $x > z_n^y$ $P^{n+1}(x+1, y) \geqq P^{n+1}(x+2, y)$. Damit ist gezeigt, daß auch die Folge $(P^{n+1}(x, y))_{x \in \Gamma}$ für alle $y \in \Gamma$ die Eigenschaft (B) besitzt.

Wir wissen nun, daß für alle $n \in N$ und alle $y \in \Gamma$ die Folge $(P^n(x, y))_{x \in \Gamma}$ die Eigenschaft (B) besitzt und können deshalb auf die Gültigkeit folgender Gleichungskette schließen:

$$\sum_{x \in \Gamma} |P^n(x, y) - P^n(x+1, y)|$$

$$= \sum_{x \leqq z_n^y} (P^n(x+1, y) - P^n(x, y)) + \sum_{x \geqq z_n^y} (P^n(x+1, y) - P^n(x+2, y)) = 2P^n(z_n^y+1, y).$$

Da nach Konstruktion

$$\max_{x \in \Gamma} P^n(x, y) = P^n(z_n^y+1, y)$$

ür alle $n \in N$ und $y \in \Gamma$ ist, können wir jetzt unter Verwendung von 2.2. die Behauptung von 2.3. ableiten, die damit bewiesen ist.

Wir setzen nun für alle $x, y \in \Gamma$ $Q_{x,y}(n) =_{\text{Def}} (1-P(y, y))P^{n-1}(x, y)$; $\forall n \geq 1$ und $V_x(n) = Q_{x,x}(n)$; $\forall n \geq 1$. V_x ist mithin die geometrische Verteilung mit dem Parameter $P(x, x)$. Wir bezeichnen für $x \leq y$ mit $\overset{y}{\underset{z=x}{*}} V_z$ die Faltung der Verteilungsgesetze $V_x, \ldots, V_y$ und erhalten nun folgende Beziehung:

2.4. *Für alle $x, y \in \Gamma$ mit $x \leq y$ gilt:*

$$Q_{x,y}(n) = (\overset{y}{\underset{z=x}{*}} (V_z)(n); \quad \forall n \geq 1.$$

B e w e i s: Es sei $x \in \Gamma$. Für $y = x$ folgt die Richtigkeit der Behauptung aus der Definition von V_x. Nehmen wir nun an, die Behauptung wäre für $y = x+k$ richtig. Wir erhalten dann folgende Gleichungskette:

$$(\overset{x+k+1}{\underset{z=x}{*}} V_z)(n) = \sum_{m=1}^{n-1} \Big(\overset{x+k}{\underset{z=x}{*}} V_z\Big)(m)\, V_{x+k+1}^{(n-m)}$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} (1-P(x+k, x+k))(1-P(x+k+1, x+k+1))P^{m-1}(x, x+k)(P(x+k+1, x+k+1))^{n-m-1}$$

$$= (1-P(x+k+1, x+k+1)) \sum_{m=0}^{n-2} P^m(x, x+k)P(x+k, x+k+1)P^{n-m-2}(x+k+1, x+k+1)$$

$$= (1-P(x+k+1, x+k+1))\, P^{n-1}(x, x+k+1) = Q_{x, x+k+1}(n); \quad \forall n \geq 2.$$

Da außerdem für alle $k \in N$ $\overset{x+k+1}{\underset{z=x}{*}} V_z)(1) = 0 = Q_{x, x+k+1}(1)$ gilt, haben wir damit gezeigt, daß die Behauptung auch für $y = x+k+1$ richtig ist. 2.4. ist damit bewiesen.

Zum Beweis von Theorem 2 zeigen wir zunächst:

2.5. $\mathfrak{P}$ *ist mischend, wenn gilt:* $\sum_{n \in N} P(-n, -n) = \infty$.

B e w e i s. Nach 2.4. ist für alle $x, y \in \Gamma$ mit $x \leq y$ $Q_{x,y}$ als Faltung geometrischer Verteilungen mit den Parametern $P(z, z)$ darstellbar, wobei $z = x, \ldots, y$ ist. Nach dem Lemma aus Abschnitt 3. gilt deshalb für $x \leq y$

$$\max_{n \in N} Q_{x,y}(n+1) \leq (2e \sum_{z=x}^{y} P(z, z)^{-1/2}, \; 0^{-1} := \infty,$$

und damit auch

$$\max_{n \in N} P^n(x, y) \leq (1-P(y, y))^{-1}(2e \sum_{z=x}^{y} P(z, z))^{-1/2}.$$

Da stets $P^n(x, y) = 0$ ist für alle $x > y$ erhalten wir daraus für alle $u, y \in \Gamma$ mit $u < y$:

$$\max_{x \in \Gamma} P^n(x, y) \leq (1-P(y, y))^{-1}(2e \sum_{z=0}^{y} P(z, z))^{-1/2} + \sum_{z=u+1}^{y} P^n(z, y); \; \forall n \in N.$$

Wegen $P(y, y) < 1$ und $P^n(y, y) = (P(y, y))^n$ ist, $\sum_{n \in N} P^n(y, y) < \infty$, d. h. alle $y \in \Gamma$ sind transient. Es muß also stets $\lim_{n \to \infty} P^n(z, y) = 0$ sein und deshalb für alle $u < y$

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{x\in\Gamma} P^n(x, y) \leq (1-P(y, y))^{-1}(2e \sum_{z=u}^{y} P(z, z))^{-1/2}.$$

Aus der Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} P(-n, -n)$ können wir deshalb auf die Konvergenz

$$\max_{x\in\Gamma} P^n(x, y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0; \quad \forall y \in \Gamma$$

schließen. Letzteres ist aber nach 2.3. gleichbedeutend damit, daß $\mathfrak{P}$ mischend ist. Wir zeigen nun:

2.6. *Es existiert eine $\mathfrak{P}$-invariante Folge von Verteilungsgesetzen, wenn gilt:* $\sum_{n\in N} P(-n, -n) < \infty$.

Beweis. Für alle $z\in\Gamma$, alle $n \geqq z$ und alle $m\in N$ erhalten wir zunächst folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in\Gamma} |P^{n+z}(-n, x) - P^{n+m+z}(-m-n, x)| \\
&\leq \sum_{x\in\Gamma} \sum_{y\neq -n} P^m(-n-m, y) P^{n+z}(y, x) + \sum_{x\in\Gamma} |P^{n+z}(-n, x) \\
&\qquad - P^m(-m-n, -n) P^{n+z}(-n, x)| \\
&\leq 2(1-P^m(-n-m, -n)) \leq 2(1-\prod_{i=n+1}^{\infty}(1-P(-i, -i))).
\end{aligned}$$

Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} P(-n, -n)$ können wir deshalb schließen, daß eine Folge $(\pi_i)_{i\in\Gamma}$ von Verteilungsgesetzen auf Γ existiert, so daß für alle $i\in\Gamma$ die Konvergenz der Variationsabstände

$$\|\pi_i - P^{n+i}(-n,)\|_{\mathrm{Var}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

stattfindet. Daß die Folge $(\pi_i)_{i\in\Gamma}$ auch $\mathfrak{P}$-invariant ist, ergibt schließlich die nachstehende Gleichungskette.

$$\begin{aligned}
\pi_i * P(y) &= \sum_{x\in\Gamma} \lim_{n\to\infty} P^{n+i}(-n, x)\; P(x, y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{x\in\Gamma} P^{n+i}(-n, x)\; P(x, y) = \lim_{n\to\infty} P^{n+i+1}(-n, y) = \pi_{i+1}(y); \ \forall y\in\Gamma.
\end{aligned}$$

2.6. ist damit bewiesen.

Der Beweis von Theorem 2 ergibt sich nun als eine unmittelbare Folgerung aus Theorem 1, 2.5. und 2.6.

Ein Lemma. In diesem Abschnitt beweisen wir eine Abschätzung, die beim Beweis von 2.5. Verwendung findet.

Lemma. *Es seien $(a_i)_{i=1,\ldots,m}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $a_i < 1$ für $i=1,\ldots, m$ und $(V_i)_{i=1,\ldots,m}$ eine Folge, geometrischer Verteilungen mit $V_i(n) = (1-a_i)\, a_i^{n-1}$; $\forall n \geq 1$, $\forall i = 1,\ldots, m$. Für die Faltung V der Verteilungsgesetze $V_1 \ldots, V_m$ gilt:*

$$\sup_{n\in N} V(n) \leq (2e \sum_{i=1}^{m} a_i)^{-1/2}$$

Beweis. Die erzeugenden Funktionen g_i von V_i haben die Gestalt

$$g_i(z) = z(1-a_i)(1-a_i z)^{-1} = z \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{a_i^n}{n}(z^n - 1)\right).$$

Die erzeugende Funktion g von V hat mithin die Gestalt

$$g(z)=z^m \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} a_i^n (z^n-1)\right).$$

Daraus können wir nun schließen, daß V sich als Faltung einer Poissonverteilung mit dem Parameter $\Sigma_{i=1}^m a_i$ und einem anderen Verteilungsgesetz auf N darstellen läßt. Es gilt deshalb:

$$\sup_{n\in N} V(n) \leqq \sup_{n\in N} \frac{(\Sigma_{i=1}^m a_i)^n}{n!} \exp\left(-\sum_{i=1}^m a_i\right).$$

Zum Beweis des Lemma genügt es also zu zeigen, daß für alle $a>0$ und alle $n\in N$ $\frac{a^n}{n!}\exp(-a)\leqq(2ea)^{-1/2}$ ist. Für alle $n\in N$ sei dazu $f_n(a)=\frac{a^n}{n!}a^{1/2}\exp(-)a$; $\forall a>0$. Für alle $a>0$ ist f_n differenzierbar und es gilt:

$$f'_n(a)>0;\quad 0<a<n+1/2;$$

$$f'_n(a)<0;\quad \forall a>n+1/2.$$

Wegen $f''_n(n+1/2)<0$ und $f'_n(n+1/2)=0$ erhalten wir daraus

$$f_n(a)\leqq \frac{(n+1/2)^{(n+1/2)}}{n!}\exp(-(n+1/2));\quad \forall n\in N,\quad \forall a>0.$$

Es seien nun

$$h_1(n)=\frac{(n+1/2)^{(n+1/2)}}{n!}\exp(-(n+1/2));\quad \forall n\in N$$

$$h_2(n)=h_1(n+1)/(h_1(n));\quad \forall n\in N$$

$$h_3(b)=b\,.\ln(1+1/b)+\ln(1+1/(2b+1));\quad \forall b>0.$$

Dann ist $h'_3(b)=\ln(1+1/b)-2/(2b+1)$; $\forall b>0$ und $h''_3(b)=-(b(b+1)(2b+1))^{-1}$; $\forall b>0$. Wegen $\lim_{b\to\infty} h'_3(b)=0$ erhalten wir daraus $h'_3(b)\geqq 0$; $\forall b>0$. D. h., $h_3(b)$ ist monoton nicht fallend in b.

Da für alle $n\in N$ $h_2(n)=\ln h_3(n)$ ist, muß deshalb auch $h_2(n)$ monoton nicht fallend in n sein. Wegen $\lim_{n\to\infty} h_2(n)=1$ muß deshalb $h_2(n)\leqq 1$; $\forall n\in N$ sein. Das bedeutet jedoch, daß $h_1(n)$ monoton nicht wachsend in n und somit $\frac{a^n}{n!}\exp(-a)\leqq(2ea)^{-1/2}$; $\forall n\in N$, $\forall a>0$ ist. Das Lemma ist damit bewiesen.

LITERATUR

1. H. Debes, A. Liemant, J. Kerstan, K. Matthes. Verallgemeinerungen eines Satzes von Dorbuschin III. *Math. Nachr.*, **50**, 1971, 99—139.
2. K. -H. Fichtner. Gleichverteilungseigenschaften substochastischer Kerne und zufällige Punktfolgen. *Math. Nachr.*, **62**, 1974, 241—260.
3. J. Kerstan, K. -H. Fichtner. Asymptotische Invarianz bei Halbgruppen stochastischer Kerne I. *Serdica*, 5, 1979, 229—251.

Friedrich-Schiller-Univertsität
Sektion Mathematik
UHH, 17.06 69 Jena

Eingegangen am 30. 3. 1978