Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DES KRITERIUMS VON G. POLYA ÜBER DIE IRREDUZIBILITÄT GANZZAHLIGER POLYNOME IM KÖRPER DER RATIONALEN ZAHLEN

DIMITAR T. PIRGOW, ELENA R. KANTARDJIEWA

Eine hinreichende Bedingung für die Irreduzibilität von ganzzahligen Polynomen ist gefunden. Das erhaltene Resultat ist präzisiert alle bekannten Kriterien für die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome vom Grad n, die in n, voneinander in verschiedenen Abständen liegenden, ganzen Zahlen, solche Werte annehmen, die von Null verschieden sind und dem Absolutwert nach kleiner als bestimmte Konstanten sind.

In einer von seinen Arbeiten hat Polya [1] den folgenden Satz über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome bewiesen:

Das ganzzahlige Polynom $p(x)$ vom Grad n, welches bei n verschiedenen ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ solche Werte annimmt, die dem Absolutwert nach verschieden von Null und kleiner als $G=2^{-n+[n/2]}(n-[n/2])!$ sind, ist irreduzibel im Körper der rationalen Zahlen.

In derselben Arbeit [1] zeigte Polya, daß die Zahl G mit der besseren Abschätzung $G^*=(d/2)^{n-[n/2]}(n-[n/2])!$ ersetzt werden kann, wobei d der kleinste Abstand zwischen zwei von den Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist. Es ist offensichtlich, daß bei $d>1$, $G^*>G$ und bei $d=1$, $G^*=G$ ist.

Im Fall, wo mindenstens zwei von den Intervallen $[x_i, x_{i+1}]$ $i=0, 1, \ldots, n-1$ verschiedene Längen haben und bei welchem $d\geq 1$ ist, hat D. Pirgow [2] eine bessere Abschätzung $G'=G^*.\delta$, $\delta=1+k/d(n-[n/2])$ $(\delta>1)$ gefunden, wobei $k\geq 1$ eine ganze Zahl ist, die auf eine bestimmte Weise definiert ist.

D. Pirgow und G. Kutirkow [3] haben den Fall untersucht, bei welchem alle Intervallen $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, \ldots, n-1$ verschiedene Längen besitzen und haben die Abschätzung $\bar{G}=G^*\delta_1$, $\delta_1=1+(n-[n/2]-1)\ k/(n-[n/2])d$, $\delta_1>\delta$ ermittelt.

In der vorliegenden Arbeit stellen wir uns die Aufgabe die Abschätzung $\bar{G}$ zu verbessern, bei Anwendung derselben Methode wie in [1;2;3]. Die Abschätzung, die wir erwarten, ist $\bar{\bar{G}}=G^*\delta_2$, $\delta_2=[1+k/(n-[n/2])d]^{n-[n/2]-1}$, $\delta_2>\delta_1$. Zu diesem Zweck werden wir Hilfssätze 1,2 und II von [3] präzisieren.

Zuerst möchten wir die Definition der Zahl k in Erinnerung bringen. Es seien $x_0<x_1<\cdots<x_n$ ganze Zahlen. Bezeichnen wir entsprechend mit d_1, $d_2, \ldots, d_n$ die Längen der Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, \ldots, n-1$. Mit d bezeichnen wir die kleinste der Zahlen d_j $j=1, 2, \ldots, n$ und mit d' die Länge des, nach seiner Größe, nebenliegenden Intervalls. Dann ist $k=d'-d$.

Es sei x_ν eine der Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Dann können wir die Längen der Intervalle $[x_0, x_\nu]$, $[x_1, x_\nu], \ldots, [x_{\nu-1}, x_\nu]$, $[x_\nu, x_{\nu+1}] \ldots [x_\nu, x_n]$ folgendermaßen ausdrücken:

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol 5, 1979, p. 316—320.

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
d_{0,\nu} &= |x_0 - x_\nu| = \nu d + k_{0,\nu},\\
d_{1,\nu} &= |x_1 - x_\nu| = (\nu-1)d + k_{1,\nu},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
d_{\nu-1,\nu} &= |x_{\nu-1} - x_\nu| = d + k_{\nu-1,\nu},\\
d_{\nu+1,\nu} &= |x_{\nu+1} - x_\nu| = d + k_{\nu+1,\nu},\\
d_{\nu+2,\nu} &= |x_{\nu+2} - x_\nu| = 2d + k_{\nu+2,\nu},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
d_{n,\nu} &= |x_n - x_\nu| = (n-\nu)d + k_{n,\nu};
\end{aligned}
$$

$k_{i,\nu}$, $i \neq \nu$, $i, \nu = 0, 1, \ldots, n$, sind verschiedene von Null natürliche Zahlen, mit einer Ausnahme. Es ist offensichtlich, daß $k = \min(k_{i,\nu})$, $i \neq \nu$, $k_{i,\nu} \neq 0$ ist.

Hilfssatz 1. *Sei* $f(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$ *und* $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ *seien ganze Zahlen. Die Längen der Intervalle* $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots n$, *seien verschieden. Dann gilt folgende Ungleichung:* $|f'(x_\nu)| > \nu!(n-\nu)!\,d^n(1 + k/nd)^{n-1}$.

Beweis. Man erhält sofort, $|f'(x_\nu)| = |x_\nu - x_0||x_\nu - x_1| \ldots |x_\nu - x_{\nu-1}||x_\nu - x_{\nu+1}| \ldots |x_\nu - x_n|$ und aus (1) erhalten wir

$$
(2)\qquad f'(x_\nu) = [\nu d + k_{0,\nu}][(\nu-1)d + k_{1,\nu}] \ldots [d + k_{\nu-1,\nu}][d + k_{\nu+1,\nu}] \ldots [(n-\nu)d + k_{n,\nu}].
$$

Gemäß der Bedingung des Hilfssatzes folgt, daß nur eine von den Zahlen $k_{i,\nu}$, $i \neq \nu$ gleich Null sein kann. Diese Zahl ist entweder $k_{\nu-1,\nu}$ oder $k_{\nu+1,\nu}$. Es sei $k_{\nu-1,\nu} = 0$. Setzen wir in (2) $k_{i,\nu} = k$ ein, ermitteln wir

$$
(3)\qquad |f'(x_\nu)| > [\nu d + k][(\nu-1)d + k] \ldots [2d + k]d[d + k] \ldots [(n-\nu)d + k].
$$

Die rechte Seite der Ungleichung (3) ändert sich nicht, wenn $k_{\nu+1,\nu} = 0$ ist. In diesen Fall wechseln die Multiplikatoren d und $d - k$ ihre Positionen gegenseitig. Aus (3) folgt

$$
|f'(x_\nu)| > \nu!(n-\nu)!\,d^n[1 + k/\nu d][1 + k/(\nu-1)d] \ldots [1 + k/2d] \,.\, 1 \,.\, [1 + k/d] \ldots
$$
$$
\ldots [1 + k/(n-\nu)d].
$$

Da aber $\nu \leq n$ ist, erhalten wir

$$
|f'(x_\nu)| > \nu!(n-\nu)!\,d^n[1 + k/nd][1 + k/nd] \ldots [1 + k/nd] = \nu!(n-\nu)!\,d^n[1 + k/nd]^{n-1}.
$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 2. *Wenn* $p(x) = \Sigma_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ *ein belebiges ganzzahliges Polynom ist und* $x_0 < x_1 \cdots < x_n$ *ganze Zahlen sind, dann ist mindestens für eine der Zahlen* x_i $(i = 0, 1, \ldots n)$ *die Relation* $|p(x_\mu)| > |a_0|(d/2)^n n!(1 + k/nd)^{n-1}$ *erfüllt.*

Beweis. Es sei $f(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Aus der Interpolationsformel von Lagrange für das Polynom $p(x)$ folgt $p(x) = \Sigma_{\nu=0}^{n}(P(x_\nu)/f'(x_\nu)) \,.\, f(x)/(x - x_\nu)$. Woraus wir das Koeffizient $a_0 = \Sigma_{\nu=0}^{n} P(x_\nu)/f'(x_\nu)$ bekommen.

Wenn wir den Hilfssatz 1 für $f'(x_\nu)$ anwenden, erhalten wir

$$
|a_0| < \sum_{\nu=0}^{n} |P(x_\nu)| / \nu!(n-\nu)!\,d^n(1 + k/nd)^{n-1}.
$$

Bezeichnen wir mit $|P(x_\mu)|$ die größte von den Zahlen $|P(x_\nu)|$, $\nu=0, 1, \ldots, n$, so gilt

$$|a_0| < \sum_{\nu=0}^{n} |P(x_\mu)|/\nu!(n-\nu)!\,d^n(1+k/nd)^{n-1} = |P(x_\mu)|/d^n(1+k/nd)^{n-1},$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} 1/\nu!(n-\nu)! = |P(x_\mu)|/d^n(1+k/nd)^{n-1}.2^{-n}.n!$$

Aus dem letzten Ausdruck folgt $|P(x_\mu)| > |a_0|(d/2)^n n!(1+k/nd)^{n-1}$. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Die Hilfssätze 1 und 2 sind als eine Präzisierungen der Hilfssätze von Polya [1] zu betrachten, daß die Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, \ldots n$ verschiedene Längen besitzen.

Aus den bewiesenen Hilfssätze können wir folgendes Kriterium für die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome im Körper der rationalen Zahlen ableiten

Satz. *Das ganzzahlige Polynom $p(x)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$ vom Grad $n\geqq 3$, welches bei n verschiedenen ganzen Zahlen $x_1<x_2<\cdots<x_n$ solche Werte annimmt, die dem Absolutwert nach verschieden von Null und kleiner als $\bar{G}=(d/2)^{n-[n/2]}.(n-[n/2])![1+k/(n-[n/2]d]^{n-[n/2]-1}$ sind, wobei die Intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, $j=1, 2, \ldots, n$, verschiedene Längen besitzen, ist irreduzibel im Körper der rationalen Zahlen.*

Beweis. Sollte, daß nicht der Fall sein, dann gilt

$$p(x)=\varphi(x)\psi(x). \tag{4}$$

Es sei $\varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$. Ohne die Allgemeinheit zu beschränken können wir voraussetzen, daß der Grad des Polynoms $\varphi(x)$ größer oder gleich den Grad des Polynoms $\psi(x)$ ist. Dann folgt $n-[n/2]\leq m<n$. Wenden wir den Hilfssatz 2 auf das Polynom $\varphi(x)$ an, so erhalten wir

$$|\varphi(x_\mu)| > |b_0|(d/2)^m m!(1+k/md)^{m-1}. \tag{5}$$

Es gilt aber $m\geq n-[n/2]$.

Weiter beweisen wir folgende Ungleichung

$$(d/2)^m m!(1+k/md)^{m-1} \geq (d/2)^{n-[n/2]}(n-[n/2])![1+k/(n-[n/2)d]^{n-[n/2]-1}. \tag{6}$$

Tatsächlich ist (6) bei $m=n-[n/2]$ erfüllt. Es sei $m>n-[n/2]$. Aus (6) erhalten wir

$$\begin{aligned} d^{m-n+[n/2]}m(m-1)\ldots(n-[n/2]+1).2^{-m+n-[n/2]}(1+k/dm)^{m-1}& \\ >[1+k/d(n-[n/2])]^{n-[n/2]-1}&. \end{aligned} \tag{7}$$

Es ist aber $d\geq 1$ und außerdem ist der Faktor $m(m-1)\ldots(n-[n/2]+1)\times\times 2^{-m+n-[n/2]}$ bei $n\geq 3$ größer als eins. Damit wir die Ungleichung (7) beweisen können, genügt es folgende Ungleichung zu beweisen.

$$(1+k/dm)^{m-1} > (1+k/d(n-[n/2]))^{n-[n/2]-1}. \tag{8}$$

Multiplizieren wir die linke Seite von (8) mit $(1+k/dm)(1+k/d(n-[n/2]))<1$, bekommen wir die Ungleichung

$$(1+k/dm)^m > (1+k/d(n-[n/2]))^{n-[n/2]}. \tag{9}$$

Wäre (9) richtig, dann folgt unmittelbar, daß auch (8) gilt.

Betrachten wir die Folge mit allgemeinen Glied $a_m = (1+b/m)^m$, wobei $b = k/d$ ist. Offensichtlich kann a_m in der folgenden Form dargestellt werden:

$$a_m = 1 + b + \frac{1}{2!}\left(1 + \frac{1}{m}\right) b^2 + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{m}\right) b^m .$$

Für $a_{m+1} - a_m$ bekommen wir

$$a_{m+1} - a_m = \frac{1}{2!}\, b^2 \left[\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right] + \cdots$$

$$+ \frac{1}{m!}\, b_m \left[\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)\left(1 - \frac{2}{m+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{m+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{1}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!}\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)\left(1 - \frac{2}{m+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{m}{m+1}\right) b^{m+1} > 0.$$

Auş den letzten Ausdruck ist zu ersehen, daß die Folge $a_m = (1+b/m)^m$ wächst. Daraus es folgt unmittelbar die Ungleichung (9), weil wir den Fall $m > n - [n/2]$ betrachten. Aus (9) folgt, daß die Ungleichungen (8) und (6) auch richtig sind. Aus (5) und (6) erhalten wir

$$(10) \qquad |\varphi(x_\mu)| > |b_0|\,(d/2)^{n-[n/2]}\,(n-[n/2])!\,[1 + k/(n-[n/2])d]^{n-[n/2]-1}.$$

Setzen wir in (4) $x = x_\mu$ ein, bekommen wir gemäß der Ungleichung (10) die Ungleichung

$$|P(x_\mu)| = |\varphi(x_\mu)|\,|\psi(x_\mu)|$$

$$\geq |b_0|\,(d/2)^{n-[n/2]}\,((n-[n/2])!)\,[1 + k/(n-[n/2])d]^{n-[n/2]-1}\,|\psi(x_\mu)| = |b_0|\,\bar{\bar{G}}\,|\psi(x_\mu)|.$$

Aber $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind ganzzahlige Polynome und demgemäß ist $|b_0| \geq 1$ und $|\psi(x_\mu)| \geq 1$. Wir kommen zu einem Widerspruch, weil laut der Bedingung des Satzes $|P(x_\mu)| < G$ sein muß. Also ist das Polynom $P(x)$ irreduzibel im Körper der rationalen Zahlen. Somit ist der Satz bewiesen.

Vergleichen wir die Abschätzungen G^* von [1] mit $\bar{G}$ aus [3] und mit $\bar{\bar{G}}$ aus dieser Arbeit, erhalten wir $G^* < \bar{G} < \bar{\bar{G}}$, bei $d \geq 1$ und bei $k \neq 0$. Wenn $d_1 = d_2 = \cdots = d_n$ ist, dann folgt $d = d_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0$ und $\bar{\bar{G}} = \bar{G} = G^* = G$. Das letzte Reşultat zeigt, daß der bewiesene Satz in dieser Arbeit eine Präzisierung Kriteriums [1] von Polya darstellt.

Wir werden unter den vielen möglichen ein Beispiel geben, für welches unseres Kriterium zum Unterschied von den Kriterien von Polya [1], von Pirgow—Kutirkow [3] und von Brauer—Ehrlich [4] verwendbar ist.

Betrachten wir das Polynom $P(x) = x(x-2)(x-14)(x-27)(x-41)+42$. In diesem Fall ist $d = 2$ und $d' = 12$. Dann gilt $k = d' - d = 10$. Polya's Abschätzungen sind $G = 2^{-n+[n/2]}(n-[n/2])! = 6/8$, $G^*(d/2)^{n-[n/2]}\,(n-[n/2])! = 6$. Für die Abschätzungen von Brauer—Ehrlich, von Pirgow—Kutirkow und der erhaltenen Abschätzung in dieser Arbeit bekommen wir entsprechend

$$G_3 = ((n-1)!)2^{-n+1}[(n-2)/2] = 15/10,\ \bar{G} = G^*[1 + (n-[n/2])(k/(n-[n/2])d] = 39/4$$

$$\text{und } \bar{\bar{G}} = G^*[1 + k/(n-[n/2])d]^{n-[n/2]-1} = 128/3.$$

Weil außerhalb des Intervalls [0,41] das Polynom $P(x)$ eine wachsende Funktion ist und $P(0)=P(41)=42$ gilt, ist es offensichtlich, daß die oben zitierten Kriterien nur für das Intervall [0,41] anwendbar sind. Gemäß das bewiesenen Kriteriums und von $\bar{\bar{G}}=128/3$ und $P(0)=P(2)=P(14)=P(27)=P(41)=42$ folgt, daß das Polynom $P(x)$ irreduzibel im Körper der rationalen Zahlen ist. In diesem Fall sind die Kriterien von Polya [1], von Brauer—Ehrlich [4] und von Pirgow—Kutirkow [3] nicht anwendbar, weil für alle ganze Werte von x in dem Intervall [0,41] die Ungleichung $|P(x)|\geqq 42$ erfüllt ist und außerdem: $G=6/8$, $G_3=3/2$, $G^*=6$, $\bar{G}=39/4$.

LITERATUR

1. G. Polya. Verschiedene Bemerkungen zur Zahlentheorie. *Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.* **28**, 1919, 31—40.
2. D. Pirgow. Über einen Satz für Irreduzibilität der ganzzahligen Polynome im Körper der rationalen Zahlen von G. Polya. *Bul. math. Inst. „G. Gheorghiu" Dej„Bucuresti,* **Nr. 3**, 1971.
3. Д. Пиргов, Г. Кутирков, Одно обобщение критерия Полия неприводимости целочисленных полиномов над полем рациональных чисел. *Zeszyty Naukowe N 301 Politech. Lodska, Matematyka,* **11**, 1978, 39—47.
4. A. Brauer, G. Ehrlich. On the irreducibility of certain polynomials. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52**, 1946, 844—856.

Hochinstitut für Chemische Technologie, Sofia

Eingegangen am 7. 7. 1978