Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КОМПАКТОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ БЕЗ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

СИМЕОН С. СТЕФАНОВ

В работе рассмотрены некоторые свойства размерностного характера понятия B-индекса, введенного Янгом (1955). В частности доказано, что в каждом компакте с B-индексом n содержится инвариантное канторово n-многообразие с тем же B-индексом.

Все пространства, которыми мы будем заниматься, предполагаются компактами — компактными матричными пространствами. В 1955 г. в [2] Янг вводит понятие B-индекса следующим образом.

Определение 1. *X — компакт, в котором действует непрерывкая инволюция $T: X \to X (T^2 = \mathrm{id})$ без неподвижных точек, т. е. $T(x) \neq x$ для каждого $x \in X$. Будем говорить, что B-индекс X не больше чем n (при инволюции T) и будем писать $\Delta X \leq n$, если существует непрерывное отображение X в n-мерную сферу $f: X \to S^n$ такое, что $f(Tx) = -f(x)$ для каждого $x \in X$ (т. е. x и Tx отображаются в противоположные точки). Будем писать $\Delta X = n$, если $\Delta X \leq n$ и $\Delta X \nleq n-1$. Для удобства будем предполагать, что $\Delta \emptyset = -1$.*

Нетрудно показать, что если в S^n рассмотреть инволюцию $T(x) = -x$, то равенство $\Delta S^n = n$ эквивалентно теореме Борсука — Улама [1]. В каком-то смысле понятие B-индекса классифицирует компакты с инволюцией без неподвижных точек с точки зрения теоремы Борсука—Улама.

Мы всегда будем предполагать для краткости, что X — компакт, в котором действует инволюция T без неподвижных точек.

В настоящей работе рассмотренны некоторые свойства размерностного характера понятия B-индекса. Основными результатами являются:

Теорема 1. *Если X — конечномерный компакт, то $\Delta X \leq \dim X$.*

Теорема 2. *Пусть $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 — замкнутые подмножества X такие, что $TX_1 = X_1$, $TX_2 = X_2$ и $\Delta X_1 \leq n$, $\Delta X_2 \leq n$ (при T). Пусть $\dim X_1 \cap X_2 \leq n-1$. Тогда $\Delta X \leq n$.*

Теорема 3. *Пусть $\Delta X = n$. Тогда существует компактное канторовое n-многообразие Y в X такое, что $TY = Y$ и $\Delta Y = n$.*

Мы напомним определение канторового n-многообразия.

Определение 2. *Топологичное пространство X называют канторовым n-многообразием, если его невозможно представить в виде объединения двух замкнутых собственных подмножеств X_1 и X_2 так, что* $\dim X_1 \cap X_2 \leq n-2$.

Теорема 3 является основным фактом этой работы. Очевидно, теорема 1 является ее следствием, но мы здесь приводим прямое и простое доказательство теоремы 1. Как нетрудно увидеть, теорема суммы, подобная та-

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 5, 1979, с. 344—350.

ковой для dim, для Δ не имеет места. Тем не менее, теорема 2 является теоремой суммы для Δ при некоторых дополнительных ограничениях.

Перейдем к доказательству теорем.

Как было сказано, теорема Борсука — Улама эквивалентна равенству $\Delta S^n = n$. Это становится ясным из пункта г) следующей леммы, дающей разные описания B-индекса.

Лемма 1. *Следующие 4 условия эквивалентны:*

а) $\Delta X \leqq n$;

б) *X можно представить в виде объединения $X = \bigcup_{i=1}^{n+2} F_i$, где F_i — замкнутые подмножества X такие, что $F_i \cap TF_i$;*

в) *X можно представить в виде объединения $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} \Phi_{\pm i}$, где $\Phi_{\pm i}$ — замкнутые подмножества X такие, что $\Phi_{+i} \cap \Phi_{-i} = \varnothing$, $\Phi_{+i} = T\Phi_{-i}$;*

г) *существует такое непрерывное отображение $\varphi : X \to R^{n+1}$ пространства X в $(n+1)$-мерное эвклидово пространство, что $\varphi(x) \neq \varphi(Tx)$ для каждого $x \in X$.*

Эти эквивалентности принадлежат Борсуку. Для полноты приведем доказательство этой леммы.

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Существует $f : X \to S^n$ такое, что $f(Tx) = -f(x)$ для каждого $x \in X$. S^n можно представить в виде объединения $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+2} S_i$, где S_i — замкнутые подмножества множества S^n и $S_i \cap -S_i = \varnothing$. Достаточно положить $F_i = f^{-1}(S_i)$.

б) $\Rightarrow$ в) Положим $\Phi_{+i} = F_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n+1$, $\Phi_{-i} = TF_i$. В таком случае $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} \Phi_{\pm i}$, $\Phi_{+i} = T\Phi_{-i}$, $\Phi_{+i} \cap \Phi_{-i} = \varnothing$.

в) $\Rightarrow$ г) Если ϱ — метрика в X, положим $\varphi_i(x) = \varrho(x, \Phi_{+i})$. Тогда $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1})$ есть отображение X в R^{n+1} с необходимым свойством.

г) $\Rightarrow$ а) Достаточно определить

$$f(x) = [\varphi(x) - \varphi(Tx)] / \|\varphi(x) - \varphi(Tx)\|.$$

Отметим, что ΔX всегда существует. Действительно, так как X компакт, то можно представить его в виде объединения $X = \bigcup_{i=1}^{n+2} F_i$, где F_i — замкнутые подмножества X такие, что $F_i \cap TF_i = \varnothing$. В таком случае, из пункта б) леммы 1 следует, что $\Delta X \leqq n$.

Если A подмножество X такое, что $TA = A$ будем говорить, что A инвариантно (относительно T).

Если C — замкнутое инвариантное подмножество X, будем говорить, что C — полная перегородка в X, если $X \setminus C = U_+ \cup U_-$, где U_+ и U_- — открытые в X множества и $U_+ \cap U_- = \varnothing$, $U_+ = TU_-$.

Будем говорить, что непрерывное отображение $f : X \to R^n$ антиподально, если $f(x) = -f(Tx)$ для каждого $x \in X$.

В терминах полных перегородок можно дать индуктивное определение B-индекса.

Лемма 2. *$\Delta X \leqq n$ тогда и только тогда, когда существует полная перегородка C в X, для которой $\Delta C \leqq n-1$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть f — антиподальное отображение X в S^n. Здесь и далее будем считать, что S^{n-1} канонически вложено в $S^n : S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$. Тогда $C = f^{-1}(S^{n-1})$ — полная перегородка в X и $\Delta C \leqq n-1$.

Достаточность. Пусть C — полная перегородка в X с $\Delta C \leqq n-1$ и $\varphi : C \to S^{n-1}$ — антиподальное отображение. Пусть $X \setminus C = U_+ \cup U_-$,

$U_+ \cap U_- = \emptyset$, $U_+ = TU_-$. По теореме Урысона φ можно продолжить до $\tilde{\varphi}: U_+ \cup C \to S^n$. Определяем $f: X \to S^n$ так:

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(x), & x \in U_+ \cup C; \\ -\tilde{\varphi}(Tx), & x \in U_-. \end{cases}$$

Очевидно, f — непрерывное и антиподальное отображение X в S^n, т. е. $\Delta X \leqq n$.

Мы докажем важное неравенство $\Delta X \leqq \dim X$.

Доказательство теоремы 1. Допустим противное — что $\dim X = n$, а $\Delta X = m > n$. Согласно лемме 2 существует полная перегородка C в X с $\Delta C \leq m-1$. Пусть $\varphi: C \to S^{m-1}$ — антиподальное отображение и $X \setminus C = U_+ \cup U_-$, $U_+ = TU_-$, $U_+ \cap U_- = \emptyset$. Рассмотрим компакт $X' = U_+ \cup C$. Так как $\dim X' \leq n$ и $m-1 \geqq n$, то, согласно одной теореме Александрова (см., напр., [3, стр. 265]), φ можно продолжить до $\tilde{\varphi}: X' \to S^{m-1}$. Определяем $f: X \to S^{m-1}$ так:

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(x), & x \in U_+ \cup C; \\ -\tilde{\varphi}(Tx), & x \in U_-. \end{cases}$$

Ясно, что f — антиподальное отображение пространства X в S^{m-1}, что противоречит равенству $\Delta X = m$.

Как мы уже знаем, $\Delta S^n = n$ при инволюции $T(x) = -x$. Следующая лемма утверждает, что это равенство верно и при произвольной другой инволюции в S^n без неподвижных точек.

Лемма 3. *B-индекс n-мерной сферы S^n равен n при произвольной инволюции $T: S^n \to S^n$ без неподвижных точек.*

Доказательство. Пусть ΔS^n есть B-индекс S^n при инволюции T. Теорема 1 дает нам $\Delta S^n \leqq n$. Допустим, что $\Delta S^n < n$. Тогда существует отображение $f: S^n \to R^n$ такое, что $f(x) \neq f(Tx)$ для каждого $x \in S^n$. Мы определим непрерывное отображение $\varphi: S^n \to S^n$ со свойством $\varphi(-x) = T\varphi(x)$ для каждого $x \in S^n$. Как и прежде, предполагаем, что имеют место канонические вложения $S^0 \subset S^1 \subset \ldots \subset S^n$. Пусть $S^m = S^m_+ \cup S^m_-$, где S^m_+ и S^m_- — две полусферы, для которых $S^m_+ \cap S^m_- = S^{m-1}$. Пусть $S^0 = \{a\} \cup \{-a\}$. Определяем $\varphi_0: S^0 \to S^n$ так: $\varphi_0(a) = a$, $\varphi_0(-a) = Ta$. Так как S^n связно, то φ_0 можно продолжить до $\tilde{\varphi}_0: S^1_+ \to S^n$. Определяем $\varphi_1: S^1 \to S^n$ следующим образом:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_0(x), & x \in S^1_+; \\ T\tilde{\varphi}_0(-x), & x \in S^1_-. \end{cases}$$

Так как S^n 1-связно, то φ_1 можно продолжить до $\tilde{\varphi}_1: S^2_+ \to S^n$. Дальше определим $\varphi_2: S^2 \to S^n$:

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(x), & x \in S^2_+; \\ T\tilde{\varphi}_1(-x), & x \in S^2_-. \end{cases}$$

Используя индукцию и тот факт, что S^n $(n-2)$-связно, в конце получаем отображение $\varphi: S^n \to S^n$ со свойством $\varphi(-x) = T\varphi(x)$ для каждого $x \in S^n$.

Рассмотрим отображение $\lambda = f\varphi : S^n \to R^n$. Очевидно $\lambda(x) \neq \lambda(-x)$ для каждого $x \in S^n$, т. е. мы получили противоречие с теоремой Борсука—Улама.

Сейчас мы докажем несколько утверждений общего характера, которые будут использоваться в дальнейшем.

Лемма 4. *Пусть F_+ и F_- — замкнутые подмножества X и $F_+ \cap E_- = \emptyset$, $F_+ = TF_-$. Тогда существует антиподальное отображение $f : X \to [-1, 1]$ такое, что $f^{-}(1) = F_+$, $f^{-1}(-1) = F_-$.*

Доказательство. Достаточно положить

$$f(x) = [\varrho(x, F_-) - \varrho(x, F_+)]/[\varrho(x, F_-) + \varrho(x, F_+)]$$

(здесь ϱ — метрика в X).

Лемма 5. *Если F — замкнутое инвариантное подмножество X и $f : F \to [-1, 1]$ — антиподальное отображение, то существует антиподальное продолжение f $\widetilde{f} : X \to [-1, 1]$.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по ΔX. Пусть $\Delta X \leq 0$. Тогда $X = X_+ \cup X_-$, где X_+ и X_- замкнуты и $X_+ \cap X_- = \emptyset$, $X_+ = TX_-$. Пусть $f' : X_+ \cup E \to [-1, 1]$ — продолжение отображения f. Полагая

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f'(x), & x \in X_+ \cup F; \\ -f'(Tx), & x \in X_-, \end{cases}$$

получаем антиподальное продолжение f.

Пусть утверждение верно для пространств с B-индексом $n-1$ и $\Delta X = n$. Пусть C — полная перегородка в X с $\Delta C = n-1$ и $X \setminus C = U_+ \cup U_-$. Согласно индукционному предположению f можно продолжить до антиподального $f' : C \cup F \to [-1, 1]$. Достаточно продолжить f' до $f'' : C \cup F \cup U_+ \to [-1, 1]$ и потом определить

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f''(x) & x \in C \cup F \cup U_+; \\ -f''(Tx), & x \in U_-, \end{cases}$$

чтобы получить искомое продолжение f.

Следствие 1. *Если F — замкнутое инвариантное подмножество X и $f : F \to [-1, 1]^\tau$ — антиподальное отображение, то f можно продолжить до антиподального $\widetilde{f} : X \to [-1, 1]^\tau$.*

Следствие 2. *Если F — замкнутое инвариантное подмножество X и $f : F \to S^n$ — антиподальное отображение, то у F есть инвариантная окрестность O и антиподальное продолжение $\widetilde{f} : O \to S^n$.*

В произведении $X \times I$ можно определить инволюцию τ следующим образом: $\tau(x, t) = (Tx, t)$. Будем говорить, что гомотопия $\mathcal{F} : X \times I \to S^n$ антиподальна, если она является антиподальным отображением при инволюции τ, а отображения $\mathcal{F}(x, 0)$ и $\mathcal{F}(x, 1)$ будем называть антиподально гомотопными.

Следующая лемма есть аналог леммы Борсука о грибе.

Лемма 6. *Пусть F — инвариантное замкнутое подмножество X, а $g, h : F \to S^n$ — антиподально гомотопные отображения. Пусть у g есть антиподальное продолжение $G : X \to S^n$. Тогда у h тоже есть антиподальное продолжение $H : X \to S^n$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ есть антиподальная гомотопия, связывающая g и h.

Множество $\Phi=(X\times O)\cup(F\times I)$ есть инвариантное подмножество $X\times I$ при инволюции τ. Определяем $f:\Phi\to S^n$ так: $f|_{X\times O}=G$, $f|_{F\times I}=\mathfrak{F}$. Тогда f можно продолжить до антиподального отображения $\widetilde{f}$, определенного на какой-то инвариантной окрестности $U\supset\Phi$ в S^n (следствие 2 леммы 5). Можно найти инвариантную окрестность $V\supset F$ в X такую, что $V\times I\subset U$. Построим $\mu:X\to[0,1]$ такое, что $\mu(x)=\mu(Tx)$ для каждого $x\in X$ и $\mu(F)=1$, $\mu(X\setminus V)=0$. Пусть $\nu:X\to[0,1]$ такое, что $\nu(F)=1$, $\nu(X\setminus V)=0$. Достаточно положить $\mu(x)=(\nu(x)+\nu(Tx))/2$.

Тогда $H(x)=\widetilde{f}(x,\mu(x))$ — искомое продолжение отображения h.

Следующие леммы более тесно примыкают к основным результатам.

Лемма 7. *Пусть* $\dim X\leq n$. *Тогда существует полная перегородка* C *в* X *с* $\dim C\leq n-1$.

Доказательство. Можно найти конечное открытое покрытие $\{U_1, U_2,\ldots, U_k\}$ такое, что $\dim F_r U_i\leq n-1$ и $U_i\cap TU_i=\varnothing$ для $i=1,2,\ldots k$. Обозначим $F=\cup F_r U_i$. Тогда множество $C=F\cup TF$ есть полная перегородка в X и, так как T — гомеоморфизм, $\dim C\leq n-1$.

Лемма 8. *Пусть* $\dim X\leq n$ *и* F — *инвариантное замкнутое подмножество* X. *Пусть* $f:F\to S^m$ — *антиподальное отображение* $(m\geq n)$. *Тогда существует антиподальное продолжение* f $\widetilde{f}:X\to S^m$.

Доказательство. Будем проводить индукцию по n. Пусть $\dim X\leq 0$. Тогда $\Delta X\leq 0$, значит, $X=X_+\cup X_-$, где X_+ и X_- — замкнутые подмножества X такие, что $X_+\cap X_-=\varnothing$, $X_+=TX_-$. Так как $\dim X_+\cup F\leq 0$, то f можно продолжить до $f':X_+\cup F\to S^m$. Определяем $\widetilde{f}:X\to S^m$ следующим образом:

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f'(x), & x\in X_+\cup F;\\ -f'(Tx), & x\in X_-.\end{cases}$$

Ясно, что $\widetilde{f}$ — антиподальное продолжение f. Пусть теперь утверждение леммы верно для пространств размерности не более чем $n-1$ и $\dim X\leq n$. Пусть C — полная перегородка в X с $\dim C\leq n-1$ (см. лемму 7) и $X\setminus C=U_+\cup U_-$. Согласно индукционному предположению f можно продолжить до антиподального отображения $f':C\cup F\to S^m$. Но $\dim U_+\cup C\cup F\leq n$, и по теореме Александрова f' можно продолжить до $f'':U_+\cup C\cup F\to S^m$. Положим

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f''(x), & x\in U_+\cup C\cup F;\\ -f''(Tx), & x\in U_-.\end{cases}$$

Очевидно, $\widetilde{f}$ есть антиподальное продолжение отображения f.

Лемма 9. *Пусть* $\dim X\leq n-1$ *и* $g, h:X\to S^n$ — *антиподальные отображения. Тогда* g *и* h *антиподально гомотопны.*

Доказательство. Действительно, $\dim X\times I\leq n$. Обозначим $F=(X\times 0)\cup(X\times 1)$ и определим $f:F\to S^n$ так: $f(x,0)=g(x)$, $f(x,1)=h(x)$. Согласно лемме 8 существует антиподальное продолжение $\mathfrak{F}:X\times I\to S^n$ отображения f — это и есть искомая антиподальная гомотопия.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f_1:X_1\to S^n$ и $f_2:X_2\to S^n$ — антиподальные отображения. Положим $F=X_1\cap X_2$. Согласно лемме 9, отображение $f_1|_F$ антиподально гомотопно отображению $f_2|_F$. Но $f_2|_F$ можно продолжить до антиподального отображения $f_2: X_2 \to S^n$. Следовательно (лемма 6), $f_1|_F$ тоже можно продолжить до антиподального отображения $\widetilde{f}_1: X_2 \to S^n$. Ясно, что

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1; \\ \widetilde{f}_1(x), & x \in X_2, \end{cases}$$

есть антиподальное отображение X в S^n, т. е. $\Delta X \leq n$.

Лемма 10. *$\Delta X = n$. Тогда существует инвариантный компакт $Y \subset X$, для которого $\Delta Y = n$ и для каждого антиподального компакта $Y' \underset{\neq}{\subset} Y$ выполнено $\Delta Y' < n$.*

Доказательство. Обозначим через Σ семейство всех инвариантных компактов $Z \subset X$ с $\Delta Z = n$ и упорядочим его включению. Пусть $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — какое-то линейно упорядоченное подмножество Σ. Положим $Z_0 = \bigcap_{\alpha \in A} Z_\alpha$. Докажем, что $Z_0 \in \Sigma$. Действительно, допустим, что $\Delta Z_0 = k < n$. В таком случае существует антиподальное отображение $\varphi: Z_0 \to S^k$. Согласно следствию 2 леммы 5, в X есть инвариантная окрестность $O \supset Z_0$ и антиподальное продолжение φ $\widetilde{\varphi}: O \to S^k$. Но поскольку некоторое Z_α содержится в O, то $\Delta Z_\alpha \leq k$ — противоречие тому, что $Z_\alpha \in \Sigma$. Следовательно, согласно лемме Цорна, Σ содержит минимальный элемент Y.

Лемма 11. *Пусть C — перегородка в X такая, что* $\dim C \leq k$. *Тогда в X существует инвариантная перегородка D такая, что* $\dim D \leq k$.

Доказательство. $C \cup TC$ — есть инвариантное множество, и, если $X \setminus C = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, то

$$X \setminus C \cup TC = X \setminus C \cup X \setminus TC$$

$$= U_1 \cup U_2 \cap T(U_1 \cup U_2) = (U_1 \cap TU_1) \cup (U_1 \cap TU_2) \cup (U_2 \cap TU_1) \cup (U_2 \cap TU_2).$$

Эти 4 множества дизъюнктны. Чтобы получить, что $C \cup TC$ — перегородка в X, достаточно, чтобы 2 из них не были пусты. Допустим, что 3 из них пусты, например, $U_1 \cap TU_1 = \varnothing$, $U_1 \cap TU_2 = \varnothing$, $U_2 \cap TU_1 = \varnothing$. Тогда

$$X \setminus C \cap TC = X \setminus C \cup X \setminus TC$$

$$= U_1 \cup U_2 \cup TU_1 \cup TU_2 = (U_1 \cup TU_1) \cup (U_2 \cup TU_2).$$

Но $(U_1 \cup TU_1) \cap (U_2 \cup TU_2) = \varnothing$, так что в этом случае $C \cap TC$ является инвариантной перегородкой.

Доказательство теоремы 3. Пусть $Y \subset X$ — инвариантный компакт такой, что $\Delta Y = n$ и для каждого антиподального компакта $Y' \underset{\neq}{\subset} Y$ выполнено $\Delta Y' < n$. Существование такого компакта гарантировано леммой 10. Покажем, что Y — канторовое n-многообразие. Допустим противное. Тогда в Y существует перегородка C с $\dim C \leq n-2$ и $Y \setminus C = U_1 \cup U_2$, где U_1 и U_2 — открытые в Y множества такие, что $U_1 \neq \varnothing$, $U_2 \neq \varnothing$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Согласно лемме 11, можем предполагать C инвариантной. Отметим, что C не может быть полной перегородкой. Действительно, если C была бы полной, то мы имели бы $\Delta C \geq n-1$ и, значит, $\dim C \geq n-1$, а $\dim C \leq n-2$. Следовательно, существует компонента связности U множества $Y \setminus C$ такая, что $TU = U$. Обозначим $Y_1 = U \cup C$, $Y_2 = Y \setminus U$.

Y_1 и Y_2 — замкнутые инвариантные собственные подмножества Y и $\dim Y_1 \cap Y_2 = \dim C \leqq n-2$. Отметим, что $\Delta Y_1 \leqq n-1$, $\Delta Y_2 \leqq n-1$. Это является следствием минимальности Y. Тогда, согласно теореме 2, мы получили бы, что $\Delta Y \leqq n-1$ — противоречие.

Заметка к теореме 3. Мы не можем утверждать, что $\dim Y = n$. Приводим соответствующий пример в R^3.

Обозначим $B = \{(x, y, z) \in R^3 \; y^2 - (z-2)^2 \leqq 1, \; x=0\}$.

Пусть $\{r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots\}$ — счетное всюду плотное подмножество множества B и $r_n = (0, y_n, z_n)$. Обозначим $a = (0, 0, -2)$, $q_0 = (1, y_1, -2$, $q_n = (1/n, y_n, z_n)$. Отрезок с концами a и q_0 обозначим через l; таковой с концами q_n и q_{n+1} обозначим через l_n. Рассмотрим множество

$$K = B \cup l \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} l_n$$

и положим $X = K \cup -K$. В X действует инволюция $T(x) = -x$. Ясно, что если $X' \underset{\neq}{\subset} X$ — инвариантный компакт, то $\Delta X' = 0$, а $\Delta X = 1$. Следовательно, в этом случае $Y = X$ и $\dim Y = 2 > 1$.

В заключение я хотел бы поблагодарить доц. к. ф. м. н. Н. Хаджииванова за ценную помощь, как и за полезное обсуждение этой работы на его семинаре по теории размерности 77/78 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Borsuk. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. *Fund. Math.*, **20**, 1933.
2. C. T. Yang. On theorems of Borsuk — Ulam, Kakutani — Yamabe Yujobo and Pyson II. *Ann. Math.*, **62**, 1955, 271—283.
3. П. С. Александров, Б. А. Пасынков. Введение в теорию размерности. Москва, 1973.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 17. 10. 1978