Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИОННОСТИ УПРАВЛЯЮЩЕГО ПРИБОРА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

ТОДОР Р. ГИЧЕВ, ВЛАДИМИР М. ВЕЛЬОВ

Рассматривается задача оптимального быстродействия для линейной управляемой системы в классе абсолютно непрерывных функций, которые вместе со своими производными принимают значения из выпуклых многогранников U и V соответственно. Доказывается, что если многогранник V раздувается неограниченно, то решение поставленной задачи сходится к решению задачи оптимального быстродействия в классе кусочно-непрерывных функций с значениями в U. Исследуется зависимость поставленной задачи от начального состояния и параметров.

1. В работе изучается линейная управляемая система, поведение которой описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{1}$$

где фазовый вектор $x \in R^n$, управляющий параметр $u \in R^r$; $A(t)$ и $B(t)$ — аналитические матрицы типа $n \times n$ и $n \times r$ соответственно. Допустимыми управлениями являются абсолютно непрерывные функции $u(t)$, определенные на различных конечных отрезках времени $[t_1, t_2]$, $t_1 < t_2$, и которые удовлетворяют следующим ограничениям:

A1. $u(t) \in U$ для каждого $t \in [t_1, t_2]$;

A2. $\dot{u}(t) \in V$ почти всюду на отрезке $[t_1, t_2]$;

A3. $u(t_1) = u(t_2) = 0$,

где U и V — выпуклые многогранники, содержащие начало координат пространства R^r. Множество допустимых управлений на отрезке $[t_1, t_2]$ обозначим через $D(t_1, t_2; V)$.

Пусть фиксирован начальный момент времени t_0. Для системы (1) рассматривается следующая задача быстродействия.

Среди всех допустимых управлений, под воздействием которых управляемая система (1) переходит из заданного начального состояния x_0 в начало координат пространства R^n, найти такое, для которого этот переход осуществляется за кратчайшее время. Эту задачу обозначим через $H(V)$.

Ограничения A1—A3 имеют определенный физический смысл. Первое из них, например, связано с ограниченностью ресурсов управления. Ограничение A2 соответствует реально существующей инерционности управляющих приборов, которые не могут мгновенно переключаться из одного положения в другое.

Задача управления системой (1) только при ограничении A1 соответветствует случаю идеального безынерционного управляющего прибора, когда возможны мгновенные переключения управления, т. е. можно менять скачком значения управляющего параметра. Множество допустимых управлений

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 5, 1979, 362—369.

$D_0(t_1, t_2)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ в этом случае состоит из кусочно-непрерывных функций $u(t)$, для которых выполняется А1. Задачу о попадении в начало координат из заданного начального состояния x_0 за кратчайшее время, когда множество допустимых управлений состоит из кусочно-непрерывных функций (см. [1]), обозначим через H_0.

В [2; 3] для задачи быстродействия $H(V)$ в случае, когда U и V являются параллелепипедами, доказаны необходимые условия оптимальности. Для задачи с выпуклыми многогранниками U и V в [4] приводятся достаточное условие частичной линейности оптимального управления и теоремы существования и единственности.

Так как задача H_0 проще задачи $H(V)$, то она изучена более полно. Существуют и методы для ее решения. Поэтому возникает необходимость исследовать возможность заменять задачу $H(V)$ задачей H_0 при моделировании реальных управляемых процессов. В этой работе доказана сходимость решения задачи $H(V)$ к решению задачи H_0, когда многогранник V раздувается неограниченно, т. е. когда инерционность управляющего прибора „уменьшается неограниченно". Одним достаточным условием для этой сходимости является введенное в [4] условие совместного общего положения, которое естественным образом расширяет известное условие общности положения [1].

Во второй части работы исследуется зависимость задачи $H(V)$ от начального состояния и параметров. Корректность задачи H_0 изучена в [5], а в работе [6] уточняется зависимость оптимального управления от начального состояния.

2. Доказательство следующей леммы аналогично доказательству соответствующей леммы в [7, стр. 364] и поэтому здесь не приводится.

Л е м м а 1 (принцип максимума). *Пусть $u^*(t)$, $t_0 \leqq t \leqq t^*$, является оптимальным управлением для задачи $H(V)$. Тогда существует нетривиальное решение ψ сопряженной системы $\dot\psi = -A^{\mathrm{T}}(t)\psi$ такое, что*

$$\int_{t_0}^{t^*} \psi^{\mathrm{T}}(t) B(t)\, u^*(t)\, dt = \max\left\{\int_{t_0}^{t^*} \psi^{\mathrm{T}}(t) B(t)\, u(t)\, dt : u \in D(t_0, t^*;\ V)\right\},$$

где через „T" обозначено транспонирование.

Введем обозначения

$$B_1(t) = B(t);\ B_\nu(t) = -A(t)B_{\nu-1}(t) + \frac{d}{dt}B_{\nu-1}(t),\ \nu = 2, \dots, n. \tag{2}$$

Для удобства в дальнейшем вершины данного r-мерного многогранника будем считать его нульмерными гранями, а сам многогранник его r-мерной гранью. Если Π — грань многогранника U, через Π' обозначим подпространство, которое параллельно грани Π и имеет ее размерность.

Существенным в дальнейшем оказывается следующее

У с л о в и е с о в м е с т н о г о о б щ е г о п о л о ж е н и я: *если l — вектор, параллельный произвольному ребру многогранника $V \cap \Pi'$, где Π — произвольная грань многогранника U, имеющая размерность больше нуля, то для каждого $t \geqq t_0$*

$$\operatorname{rank}\{B_1(t)\, l, \dots, B_n(t)\, l\} = n. \tag{3}$$

Пусть V_N, $N = 1, 2, \dots$ — выпуклый многогранник, содержащий шар радиуса N с центром в начале координат пространства R^r, γ_N — число его вершин, и через Q_N обозначено множество вершин всех многогранников $V_N \cap \Pi'$, где Π — произвольная грань многогранника U. Множествами достижимости $K_N(t)$ и $K(t)$ на отрезке $[t_0, t]$ соответственно для задачи $H(V_N)$ и задачи H_0 называются множества точек $z \in R^n$, которые могут быть переведены в начало координат пространства R^n в силу (1) с помощью допустимых управлений соответственно из $D(t_0, t; V_N)$ и $D_0(t_0, t)$. Введем обозначения $K_N = \cup_{t \geq t_0} K_N(t)$ и $K = \cup_{t \geq t_0} K(t)$. Пусть для любой точки $z \in K_N$ через $u_N^*(z)$ обозначено оптимальное управление, которое переводит фазовую точку из начального состояния z в начало координат за кратчайшее время в задаче $H(V_N)$ и через $T_N(z)$ — оптимальное время. Для любой точки $z \in K$ через $u^*(z)$ и $T(z)$ обозначим соответственно оптимальное управление и оптимальное время в задаче H_0 для начального состояния z. Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть для каждого N задача $H(V_N)$ удовлетворяет условию совместного общего положения и число вершин γ_N ограничено. Тогда для любой точки $z \in K$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существуют числа N_0 и σ_0 такие, что если $N > N_0$, то*

1) $z \in K_N$;

2) $0 \leq T_N(z) - T(z) \leq \varepsilon$;

3) *существуют интервалы Δ_i, $i = 1, \ldots, \sigma_0$ такие, что* $\operatorname{mes}(\bigcup_i \Delta_i) < \varepsilon$ *и* $u_N^*(z; t) = u^*(z; t)$ *для всех* $t \in [t_0, T(z)] \setminus \bigcup_i \Delta_i$.

Доказательство. Так как из того, что задача $H(V_N)$ удовлетворяет условию совместного общего положения следует, что задача H_0 удовлетворяет условию общности положения, то из [1] следует, что для точки $z \in K$ существует единственное оптимальное управление $u^*(z; t)$, $t_0 \leq t \leq T(z)$. Управление $u^*(z)$ является кусочно-постоянной функцией и пусть $t_0 < t_1 < \cdots < t_\nu$, $t_\nu = T(z)$ его точки переключения.

Выберем произвольно число $\sigma > 0$. Так же как в [5], доказывается, что существует окрестность Ω_σ начала координат пространства R^n такая, что для каждой точки $x \in \Omega_\sigma$ можно найти допустимое управление из $D(T(z), T(z) + \sigma; V_1)$, которое переводит точку x в начало координат. Существует число $\gamma > 0$ такое, что если $x_\gamma(t)$, $t_0 \leq t \leq T(z)$, $x(t_0) = z$ — траектория, соответствующая управлению

$$u_\gamma(t) = \begin{cases} u^*(t), \; t \in \bigcup_1^\nu [t_{i-1} + \gamma, t_i - \gamma], \; i = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \\ u^*(t_0 + \gamma)(t - t_0)/\gamma, \; t \in [t_0, t_0 + \gamma], \\ u^*(t_i - \gamma) + [u^*(t_i + \gamma) - u^*(t_i - \gamma)](t - t_i + \gamma)/2\gamma, \; t \in [t_i - \gamma, t_i + \gamma], i = 1, \ldots, \nu - 1 \\ u^*(t_\nu - \gamma)(t_\nu - t)/\gamma, \; t \in [t_\nu - \gamma, t_\nu], \end{cases}$$

то $x_\gamma(T(z)) \in \Omega_\sigma$ и для всех достаточно больших N управление $u_\gamma \in D(t_0, T(z); V_N)$. Но так как $D(T(z), T(z) + \sigma; V_1) \subset D(T(z), T(z) + \sigma; V_N)$, то $z \in K_N(T(z) + \sigma)$ и $T_N(z) \leq T(z) + \sigma$. Этим первые два утверждения теоремы доказаны.

Переходим к доказательству последного утверждения. Пусть $z \in K_N$ и $T_N(z) \leq T(z) + 1$ для каждого N. Тогда $z \in \partial K_N(T_N(z))$. Через $\psi_N(t)$, $t_0 \leq t \leq T_N(z)$ обозначим решение сопряженной системы, где $\psi_N(t_0) = p_N$ и p_N является единичной внутренней нормалью к $K_N(T_N(z))$ в точке z. Пусть p_0 — произвольная предельная точка последовательности $\{p_N\}_1^\infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\lim_{N\to\infty} p_N = p_0$. Докажем, что p_0 является внутренней нормалью к $K(T(z))$ в точке z. Допустим противное. Тогда найдется точка $y \in K(T(z))$ такая, что одновременно выполняются неравенства $p_0(y-z)<0$ и $T(y)<T(z)$ (см. [1]). С другой стороны, из доказанного уже утверждения 2) теоремы, следует, что для всех достаточно больших N выполняется $T_N(y)<T(z) \leqq T_N(z)$. Следовательно, $y \in K_N(T_N(z))$ и $p_N(y-z) \geqq 0$. Совершая предельный переход в последнем неравенстве, приходим к противоречию с неравенством $p_0(y-z)<0$. Этим доказано, что p_0 является внутренней нормалью к $K(T(z))$ в точке z. Пусть через $\psi_0(t)$, $t_0 \leqq t \leqq T(z)$ обозначено решение сопряженной системы с начальным условием $\psi_0(t_0)=p_0$.

Фундаментальную матрицу системы $\dot{x}=A(t)x$, нормированную в точке t_0, обозначим через $\Phi(t)$. Она является аналитической функцией, следовательно, число нулей функции $p^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(t))^{\mathrm{T}}B(t)l$ на отрезке $[t_0, T(z)+1]$ для всех $p \in R^n$ и $l \in R^r$, для которых она не равняется тождественно нулю, равномерно ограничено. Пусть μ — одна верхняя граница. Тогда согласно [4] оптимальное управление $u_N^*(z)$ для задачи $H(V_N)$ существует, оно единственно и является кусочно-линейной функцией. Точки разрыва $\dot{u}_N^*(z)$ не больше $\alpha_N=(\mu+1)(s_N-1)$, где s_N — число элементов множества Q_N. Так как число вершин γ_N многогранника V_N для $N=1, 2, \ldots$ ограничено, то последовательность $\{s_N\}_1^\infty$ тоже ограничена и, следовательно, существует число α такое, что $\alpha_N \leqq \alpha$ для всех N.

Согласно [1] существуют конечное число непресекающихся отрезков, покрывающих отрезок $[t_0, T(z)]$, во внутренности которых оптимальное управление $u^*(z;t)$ определяется единственным образом из принципа максимума. Число этих отрезков обозначим через k_0. Пусть $\Delta=[t', t'']$ один из этих отрезков, и для $t \in (t', t'')$ выполняется соотношение $\psi_0^{\mathrm{T}}(t)B(t)u^*=\max_{u \in U}\psi_0^{\mathrm{T}}(t) \times B(t)u$. Из-за аналитичности матриц $A(t)$ и $B(t)$ число k_0 не зависит от p_0.

Для каждого N на отрезке $[t', t'']$ число интервалов, где $\dot{u}_N^*(z)$ постоянна, не превосходит $\alpha+1$. Из [4] следует, что выполняется одно из соотношений $|\dot{u}_N^*(z;t)| \geqq N$, $\dot{u}_N^*(z;t)=0$. Следовательно, сумма длин всех отрезков, на которых $\dot{u}_N^*(z;t) \neq 0$, не превосходит $\varrho(\alpha+1)/N$, где $\varrho=\operatorname{diam} U$. Так как $\dot{u}_N^*(z;t)=0$ только тогда, когда $u_N^*(z;t)$ — вершина многогранника U ([4]), то $u_N^*(z;t)$ — вершина U на подмножестве отрезка Δ, мера которого не меньше $t''-t'-\varrho(\alpha+1)/N$.

Из равномерной сходимости последовательности $\{\psi_N(t)\}_1^\infty$ к $\psi_0(t)$ на отрезке Δ следует существование такой функции $\beta_\Delta(N)$, что $\lim_{N\to\infty}\beta_\Delta(N)=0$, и для каждого $t \in (t'+\beta_\Delta(N), t''-\beta_\Delta(N))$ и каждой отличной от u^* вершины u многогранника U выполняется $\psi_N^{\mathrm{T}}(t)B(t)(u^*-u)>0$.

Допустим, что на некотором отрезке $[\tau_N', \tau_N''] \subset [t'+\beta_\Delta(N), t''-\beta_\Delta(N)]$ выполняется $u_N^*(z;t)=u \neq u^*$ для произвольно больших N. Пусть φ_N — абсолютно непрерывная на отрезке $[t_0, T_N(z)]$ функция, которая удовлетворяет следующим требованиям: $|\dot{\varphi}_N(t)| \leqq 1/2 \operatorname{diam} V_N$, $0<\varphi_N(t)<1$ для $t \in (\tau_N', \tau_N'')$; $\varphi_N(t)=0$ для $t \notin [\tau_N', \tau_N'']$. Тогда управление

$$\tilde{u}_N(t)=\begin{cases} u_N^*(z;t), & t \in [t_0, T_N(z)] \setminus [\tau_N', \tau_N''], \\ u_N^*(z;t)+\varphi_N(t)(u^*-u), & t \in [\tau_N', \tau_N''] \end{cases}$$

принадлежит множеству $D(t_0, T_N(z); V_N)$. Из принципа максимума (лемма 1) и определения функции φ_N следует, что

$$0 \leq \int_{t_0}^{T_N(z)} \psi_N^{\mathrm{T}}(t) B(t) [u_N^*(z; t) - \widetilde{u}_N(t)] dt = -\int_{\tau_N'}^{\tau_N''} \psi_N^{\mathrm{T}}(t) B(t) (u^* - u) \varphi_N(t) dt < 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что равенство $u_N^*(z; t) = u^*$ имеет место на подмножестве отрезка Δ с мерой не меньше $t'' - t' - \varrho(\alpha + 1)N - 2\beta_\Delta(N)$.

Пусть в двух точках θ_N' и θ_N'' отрезка $[t' + \beta_\Delta(N), t'' - \beta_\Delta(N)]$ выполняется $u_N^*(z; \theta_N') = u_N^*(z; \theta_N'') = u^*$. Докажем, что тогда $u_N^*(z; t) = u^*$ для всех $t \in [\theta_N', \theta_N'']$. Действительно, если это не так, то с помощью управления

$$u_N(t) = \begin{cases} u_N^*(z; t), & t \in [t_0, T_N(z)] \setminus [\theta_N', \theta_N''], \\ u^*, & t \in [\theta_N', \theta_N''], \end{cases}$$

которое принадлежит множеству $D(t_0, T_N(z); V_N)$, и принципа максимума (лемма 1) приходим к противоречию

$$0 \leq \int_{t_0}^{T_N(z)} \psi_N^{\mathrm{T}}(t) B(t) [u_N^*(z; t) - u_N(t)] dt = \int_{\theta_N'}^{\theta_N''} \psi_N^{\mathrm{T}}(t) B(t) [u_N^*(z; t) - u^*] dt < 0.$$

Итак, мы получили, что для всех достаточно больших N на отрезке $[t' + \beta_\Delta(N) + \varrho(\alpha+1)/N, t'' - \beta_\Delta(N) - \varrho(\alpha+1)/N]$ выполняется $u_N^*(z; t) = u^*$. Но так как отрезок Δ выбирался произвольным образом, то этим и утверждение 3) теоремы доказано.

З а м е ч а н и е. Теорема 1 имеет место и тогда, когда равенство (3) в условии совместного положения выполняется почти всюду.

3. Наконец, в последней части работы докажем две теоремы, характеризирующие корректность задачи быстродействия $H(V)$. Пусть для каждого значения параметра μ из открытого множества $M \subset R^m$ поведение управляемой системы L_μ описывается уравнением

$$\dot{x} = A(t, \mu) x + B(t, \mu) u, \tag{4}$$

где матрицы $A(t, \mu)$ и $B(t, \mu)$ непрерывны по $t \geq t_0$ и по $\mu \in M$. При каждом фиксированном $\mu \in M$ рассмотрим задачу оптимального быстродействия $H(V)$ с законом движения (4). Обозначим $D(t_1, t_2) = D(t_1, t_2; V)$. Пусть через W обозначено множество точек (z, μ), для которых $\mu \in M$ и существует управление из множества $\cup_{t > t_0} D(t_0, t)$, которое переводит фазовую точку из состояния z в начало координат в силу закона движения (4) при значении параметра μ. Согласно [4] для каждых $(z; \mu) \in W$ существует оптимальное управление. Оптимальное время обозначим через $T(z, \mu)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть при каждом фиксированном $\mu \in M$ матрица $A(t, \mu)$ имеет $(n-2)$ непрерывных производных, а матрица $B(t, \mu)$ — $(n-1)$ непрерывную производную и почти для всех $t \geq t_0$*

$$\operatorname{rank} [B_1(t, \mu), \ldots, B_n(t, \mu)] = n, \tag{5}$$

где матрицы $B_i(t, \mu)$ определяются как в (2). Тогда для любых $(z_0, \mu_0) \in W$ и числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что, если $|z - z_0| + |\mu - \mu_0| < \delta$, то

1) $(z, \mu) \in W$;

2) $|T(z, \mu) - T(z_0, \mu_0)| < \varepsilon$;

3) *для каждого оптимального для (z, μ) управления $u^*(t)$, $t_0 \leq t \leq T(z, \mu)$, существует оптимальное для (z_0, μ_0) управление $u_0^*(t)$ такое, что*

$$\max\{|u^*(t) - u_0^*(t)| : t \in [t_0, \min(T(z, \mu), T(z_0, \mu_0))]\} < \varepsilon.$$

Доказательство. Сначала докажем, что множество W открыто. Допустим, что существует последовательность $\{(z_k, \mu_k)\}_1^\infty$ точек $(z_k, \mu_k) \notin W$, для которых $\lim_{k\to\infty}(z_k, \mu_k) = (z_0, \mu_0)$. Пусть через $\Phi^k(t)$ обозначена фундаментальная матрица уравнения $\dot{x} = A(t, \mu_k)x$, которая нормирована в точке t_0. Если u_0^* — произвольное оптимальное управление для (z_0, μ_0), то

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} \Phi^k(T(z_0, \mu_0))\,(z_k + \int_{t_0}^{T(z_0, \mu_0)} (\Phi^k(s))^{-1} B(s, \mu_k)\, u_0^*(s)\, ds) = 0.$$

Пусть фиксировано число $\varepsilon > 0$. Из условия (5) следует, что множество точек, которые могут быть переведены в начало координат с помощью управления из $D(T(z_0, \mu_0), T(z_0, \mu_0) + \varepsilon)$ в силу системы L_μ, содержит окрестность нуля. Через $\varrho(\mu)$ обозначим радиус максимального вписанного в это множество шара. Для всех достаточно больших k выполняется неравенство $\varrho(\mu_k) \geqq \varrho(\mu_0)/2$. Так как для всех достаточно больших k выполняется $|y_k| < \varrho(\mu_0)/2$, то существует управление $\tilde{u}_k \in D(T(z_0, \mu_0), T(z_0, \mu_0) + \varepsilon)$, которое переводит точку y_k в начало координат в силу системы $L_{\mu k}$. Следовательно, управление

$$u_k(t) = \begin{cases} u_0^*(t), & t \in [t_0, T(z_0, \mu_0)], \\ \tilde{u}_k(t), & t \in [T(z_0, \mu_0), T(z_0, \mu_0) + \varepsilon], \end{cases}$$

переводит точку z_k в начало координат в силу системы $L_{\mu k}$. Но это означает, что для всех достаточно больших k имеет место включение $(z_k, \mu_k) \in W$. Достигнутое противоречие доказывает первое утверждение теормы. С другой стороны, мы получили, что имеет место неравенство

$$T(z_k, \mu_k) \leqq T(z_0, \mu_0) + \varepsilon. \tag{6}$$

Допустим, что утверждение 3) не имеет место. Тогда найдутся число $\varepsilon_0 > 0$, последовательность $\{(z_k, \mu_k)\}_1^\infty$, $(z_k, \mu_k) \in W$, $\lim_{k\to\infty}(z_k, \mu_k) = (z_0, \mu_0)$ и управления u_k^*, оптимальные для (z_k, μ_k) такие, что для каждого оптимального для (z_0, μ_0) управления u^* выполняется неравенство

$$\max\{|u_k^*(t) - u^*(t)| : t \in [t_0, \min(T(z_0, \mu_0), T(z_k, \mu_k))]\} \geqq \varepsilon_0. \tag{7}$$

С помощью леммы 1А из [5, стр. 169] доказывается, что множество $D(t_0, t)$ компактно в $C[t_0, t]$. Пусть $T(z_k, \mu_k) \leqq T(z_0, \mu_0) + 1$ для каждого k. Продолжим управление u_k^* на весь отрезок $[t_0, T(z_0, \mu_0) + 1]$, положив $u_k^*(t) \equiv 0$ при $T(z_k, \mu_k) \leqq t \leqq T(z_0, \mu_0) + 1$. Тогда из последовательности $\{u_k^*\}_1^\infty$ можно выбрать равномерно сходящуюся к функции $u_0^* \in D(t_0, T(z_0, \mu_0) + 1)$ подпоследовательность (не ограничивая общности, можно считать, что $\lim_{k\to\infty} u_k^* = u_0^*$).

Обозначим $\widetilde{T}=\lim_{k\to\infty} T(z_k, \mu_k)$. Тогда $u_0^* \in D(t_0, \widetilde{T})$. Совершая предельный переход в равенстве

$$\Phi^k(T(z_k, \mu_k))(z_k+\int\limits_{t_0}^{T(z_k, \mu_k)}(\Phi^k(s))^{-1}B(s, \mu_k)u_k^*(s)ds)=0$$

для подпоследовательности k_i, для которой $\lim_{i\to\infty} T(z_{k_i}, \mu_{k_i})=\widetilde{T}$, получаем, что $T(z_0, \mu_0)\leq \widetilde{T}=\lim_{k\to\infty} T(z_k, \mu_k)$. Вместе с (6) это доказывает непрерывность функции T в точке (z_0, μ_0). Этим доказано и 2).

Так как u_0^* переводит точку z_0 в начало координат в силу системы L_{μ_0} на отрезке $[t_0, T(z_0, \mu_0)]$, то u_0^* является оптимальным управленим. Из равномерной сходимости $\{u_k^*\}_1^\infty$ к u_0^* получается противоречие с (7). Этим теорема доказана.

Будем исследовать зависимость производных оптимальных управлений от начального состояния и параметров. Если через Q обозначено множество вершин всех многогранников $V\cap\Pi'$, где Π — произвольная грань многогранника U, то имеет место следующая

Теорема 3. *Предположим, что для каждого $\mu\in M$ матрицы $A(t, \mu)$ и $B(t, \mu)$ аналитические и для каждых $v_1, v_2\in Q$ $(v_1\neq v_2)$ и почти для всех t*

$$\operatorname{rank}\{B_1(t, \mu)(v_1-v_2), \ldots, B_n(t, \mu)(v_1-v_2)\}=n. \tag{8}$$

Пусть $(z_0, \mu_0)\in W$. Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ существуют натуральное число σ_0 и число $\delta>0$ такие, что если $|z-z_0|+|\mu-\mu_0|<\delta$, то $(z, \mu)\in W$ и можно найти интервалы Δ_i, $i=1, \ldots, \sigma_0$ такие, что $\operatorname{mes}\bigcup_1^{\sigma_0}\Delta_i)<\varepsilon$ и $\dot{u}_0^*(t)=\dot{u}^*(z, \mu; t)$ для $t\in[t_0, \min(T(z_0, \mu_0), T(z, \mu))]\diagdown\bigcup_1^{\sigma_0}\Delta_i$, где u_0^* и $u^*(z, \mu)$ — единственные оптимальные управления, соответствующие (z_0, μ_0) и (z, μ) (см. [4]).

Доказательство. Так как из условия (8) следует (5), то в силу Теоремы 2 множество W открыто. Из [4] следует, что u_0^* и $u^*(z, \mu)$ являются кусочно-линейными функциями. Обозначим через α_0 одну верхнюю границу числа нулей функции $p^{\mathrm{T}}(\Phi^0(t))^{-1}B(t, \mu_0)(v_1-v_2)$ на отрезке $[t_0, T(z_0, \mu_0)+1]$ для тех $p\in R^n$ и $v_1, v_2\in Q$ $(v_1\neq v_2)$, для которых она не равняется тождественно нулю (из (8) следует, что она тождественно равняется нулю только тогда, когда $p=0$). Обозначим через s число элементов множества Q.

Допустим, что утверждение теоремы не имеет места. Тогда найдутся число $\varepsilon_0>0$, последовательность $\{(z_k, \mu_k)\}_1^\infty$, $\lim_{k\to\infty}(z_k, \mu_k)=(z_0, \mu_0)$ и натуральное число $\sigma>\alpha_0+(\alpha_0+1)(2s-1)$ такие, что для любых интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_\sigma$, для которых $\operatorname{mes}(\bigcup_1^\sigma\Delta_i)<\varepsilon_0$, найдется $t_k\in[t_0, \min(T(z_0, \mu_0), T(z_k, \mu_k))]\diagdown\bigcup_1^\sigma\Delta_i$, чтобы $\dot{u}_0^*(t_k)\neq\dot{u}^*(z_k, \mu_k; t_k)$.

Через K_k, $k=0, 1, \ldots$, обозначим множество достижимости для системы L_{μ_k} на отрезке $[t_0, T(z_k, \mu_k)]$. Пусть p_k, $k=1, 2, \ldots$ — единичная внутренняя нормаль к множеству K_k в точке z_k, а $\psi_k(t)$ — решение сопряженной системы $\dot{\psi}=-A^{\mathrm{T}}(t, \mu_k)\psi$ с начальным условием $\psi_k(t_0)=p_k$. Любая предельная точка p_0 последовательности $\{p_k\}_1^\infty$ является внутренней нормалью к множеству K_0 в точке z_0. Будем считать, что $\lim_{k\to\infty} p_k=p_0$. Обозначим через $\psi_0(t)$ решение сопряженной системы $\dot{\psi}=-A^{\mathrm{T}}(t, \mu_0)\psi$ с начальным условием $\psi_0(t_0)=p_0$.

Пусть τ_i, $i \leqq \alpha_0$, $\tau_i \in [t_0, T(z_0, \mu_0)+1]$ — нули какой-нибудь из функций $p_0^{\mathrm{T}}(\Phi^0(t))^{-1}B(t, \mu_0)(v_1-v_2)$, $v_1 \neq v_2$, $v_1, v_2 \in Q$ и $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_{\alpha_0}$ — интервалы с центрами соответственно в точках $\tau_1, \ldots, \tau_{\alpha_0}$ и радиусами $\varepsilon_0/4\alpha_0$. Для всех достаточно больших k функция $p_k^{\mathrm{T}}(\Phi^k(t))^{-1}B(t, \mu_k)(v_1-v_2)$, $(v_1 \neq v_2,\ v_1, v_2 \in Q)$ не имеет нулей в $[t_0, T(z_0, \mu_0)+1] \setminus \bigcup_1^{\alpha_0} \Delta'_i$. Обозначим $T_k = \min(T(z_0, \mu_0), T(z_k, \mu_k))$. Множество $[t_0, T_k] \setminus \bigcup_1^{\alpha_0} \Delta'_i$ состоит из не более чем α_0+1 отрезков, в каждом из которых функции $\dot{u}_0^*$ и $\dot{u}^*(z_k, \mu_k)$ имеют не больше чем s интервалов постоянства ([4]). Следовательно, множество $[t_0, T_k] \setminus \bigcup_1^{\alpha_0} \Delta'_i$ состоит из не более чем $(\alpha_0+1)(2s-1)=q$ отрезков, на каждом из которых функции $\dot{u}_0^*$ и $\dot{u}^*(z_k, \mu_k]$ принимают постоянные значения. Обозначим $\gamma = \min\{|v_1-v_2| : v_1, v_2 \in Q,\ v_1 \neq v_2\}$. Так как $\dot{u}_0^*(t) \neq \dot{u}^*(z_k, \mu_k; t)$ на некотором подмножестве множества $[t_0, T_k] \setminus \bigcup_1^{\alpha_0} \Delta'_i$ с мерой больше $\varepsilon/2$, то для любого k найдется отрезок $\delta_k = [t'_k, t''_k]$ с длиной не меньше $\varepsilon_0/2q$ такой, что для $t \in \delta_k$ выполняется $v_k = \dot{u}^*(z_k, \mu_k; t) \neq \dot{u}_0^*(t) = v_0$. В силу теоремы 2 для всех достаточно больших k имеет место неравенство $|u^*(z_k, \mu_k; t) - u_0^*(t)| < \varepsilon_0\gamma/4q$. Тогда

$$\varepsilon_0\gamma/4q > |u^*(z_k, \mu_k; t) - u_0^*(t)| = |u^*(z_k, \mu_k; t'_k) - u_0^*(t'_k) + (t-t'_k)(v_k - v_0)|$$
$$\geqq \varepsilon_0\gamma/2q - \varepsilon_0\gamma/4q = \varepsilon_0\gamma/4q.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин. Математическая теория оптимальных процессов. Москва, 1961.
2. S. L. Chang. Minimal time control with multiple saturation limits *IEEE Trans. Automat. Contr*, 8, 1963, 35—42.
3. W. Schmeadeke. D. Russel. Time optimal control with amplitude and rate limited controls. *SIAM J. Cont., Ser. A*, 2, 1965, 373 - 395.
4. В. М. Вельов. Линейна задача за оптимално бързодействие с ограничена скорост на изменение на управлението. Осма пролетна конференция на СМБ, София, 1979, 126—137.
5. Ф. М. Кириллова. О корректности постановки одной задачи оптимального регулирования. *Известия высш. учебн. заведений. Математика*, 1958, № 4(5), 113—126.
6. Т. Р. Гичев. β-непрекъснатост на оптималното управление като функция на началното състояние. *Известия Мат. инст.БАН*, 14, 1973, 35—49.
7. Э. Б. Ли, Л. Маркус. Основы теории оптимального управления. Москва, 1972.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 17. 11. 1978