Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

К ПРОБЛЕМЕ РАСПОЗНАВАНИЯ ГОМОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ГРУПП

РАДОСЛАВ Д. ПАВЛОВ

Пусть L_k — класс конечно определенных групп с фиксированным числом, образующих k. В работе установлено, как разрешимость проблемы распознавания нетривиальных гомоморфизмов групп из L_k зависит от числа образующих k и показано, что эта проблема неразрешима тогда и только тогда, когда $k \geqq 2$.

Пусть задан класс конечно определенных (к. о.) групп L. Проблему распознавания гомоморфизмов групп в классе L можно сформулировать следующим образом: требуется найти алгоритм, который по произвольной паре групп из L определял, существует ли гомоморфизм первой группы на (в) вторую группу или нет.

Будем рассматривать только нетривиальные гомоморфизмы, т. е. такие гомоморфизмы, которые не являются изоморфизмами и образ которых не является единичной группой.

В настоящей работе исследуется проблема распознавания нетривиальных гомоморфизмов для к. о. групп с ограниченным числом образующих.

Точнее, пусть L_k — класс к. о. групп с фиксированным числом образующих k. В работе установлено, как разрешимость проблемы распознавания нетривиальных гомоморфизмов групп из L_k зависит от числа образующих k и показано, что эта проблема неразрешима тогда и только тогда, когда $k \geqq 2$.

Рассматриваемые здесь классы к. о. групп исследованы в работе автора (1), поэтому целостное понимание приведенных здесь доказательств требует рассмотрения хотя бы главы 1 этой работы. Здесь приводим только минимум необходимых из [1] фактов.

В теореме 1 рассматривается проблема распознавания нетривиальных гомоморфизмов „на" в классах к. о. групп с ограниченным числом образующих. Теорема 2 аналогична теореме 1, только в ней рассматриваются нетривиальные гомоморфизмы „в".

Пусть G_0 — конечно определенная группа с неразрешимой проблемой тождества $X=1$ для класса слов $\mathfrak{S}$ (см. 1, стр. 6]. Очевидно, слова из класса $\mathfrak{S}$ можно занумеровать, поэтому будем считать, что $\mathfrak{S}=\{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots\}$.

Выпишем для удобства те группы из общей конструкции работы [1, глава 1], которые необходимы для доказываемых здесь результатов. Будем считать, что G_0 имеет вид: $G_0=\langle\langle g_1, \ldots, g_n;\ B_1=1, \ldots,\ B_m=1\rangle\rangle$.

Пусть элементы $g, g_{n+1}, g_{n+2}, g_{n+3}, g_{n+4}$ не принадлежат группе G_0, r — произвольное целое положительное число — $r \geqq 1$. Определим группу G_2 как свободное произведение группы G_0, свободной группы ранга 4 с свободными образующими g_{n+1}, g_{n+2}, g_{n+3}, g_{n+4} и циклической группы порядка r с образующей g:

$$G_2 =_{\text{def}} G_0 * \langle\langle g_{n+1}, g_{n+2}, g_{n+3}, g_{n+4} \rangle\rangle * \langle\langle g;\ g^r = 1 \rangle\rangle.$$

Далее определим кодировку τ алфавита группы G_2:

$$\tau(g_i) \underline{\circ}\ a^{-1}b^{-1}a\,b^{-i}a\,b^{-1}a^{-1}b^i a^{-1}ba\,b^{-i}ab\,a^{-1}\,b^i,\ i=1,\ldots,\ n+4;\ \tau(g) \underline{\circ}\ g.$$

Через W_j, $j=1, 2, \ldots$, Y, Z_1, Z_2, T, $A_1, \ldots, A_m$ будем обозначить следующие слова:

$$W_j \underline{\circ}\ \tau(X_j),\ j=1, 2, \ldots,\ X_j \in \mathfrak{C}$$

$$Y \underline{\circ}\ \tau(g_{n+1}), Z_1 \underline{\circ}\ \tau(g_{n+2}), Z_2 \underline{\circ}\ \tau(g_{n+4}), T \underline{\circ}\ \tau(g_{n+3}), A_1 \underline{\circ}\ \tau(B_1), \ldots, A_m \underline{\circ}\ \tau(B_m)$$

($B_1, \ldots, B_m$ — левые стороны определяющих соотношений группы G_0).

Определим следующие конечно определенные группы:

$$D_{j,k} = \langle\langle a, b, g;\ A_1 = 1, \ldots,\ A_m = 1,\ g^k = 1,\ W_j a = aYbY^{-1},$$
$$TgTa = aZ_1a^{-1}Z_2 \rangle\rangle,\ j,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Группы $D_{j,1}$ будем обозначать для удобства через E_j:

$$E =_{j\text{def}} D_{j,1} = \langle\langle\, a, b, g;\ A_1 = 1, \ldots,\ A_m = 1,\ W_j a = aYbY^{-1},\ g = 1, TgTa = aZ_1a^{-1}Z_2 \rangle\rangle.$$

Очевидно, $E_j = \langle\langle a, b;\ A_1 = 1, \ldots,\ A_m = 1,\ W_j a = aYbY^{-1},\ T^2a = aZ_1a^{-1}Z_2 \rangle\rangle$.

Возьмем изоморфную копию E'_j группы E_j, в которой буквы a и b заменены a_1 и a_2. Пусть a_3, a_4, a_5, a_6, d не принадлежат группе E'_j. Определим группу $L_{j,k}$ следующим образом:

$L_{j,k} = E'_j * \langle\langle\, a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6 \rangle\rangle * \langle\langle\, d;\ d^k = 1 \rangle\rangle$. Пусть слова W'_j, $A'_1, \ldots, A'_m$ из группы E'_j соответствуют словам W_j, $A_1, \ldots, A_m$ из группы E_j.

Определим кодировку τ алфавита группы $L_{j,k}$ как и раньше:

$$\tau(a_i) \underline{\circ}\ a^{-1}b^{-1}a\,b^{-i}a\,b^{-1}a^{-1}b^i a^{-1}ba\,b^{-i}ab\,a^{-1}b^i,\ i=1,\ldots,\ 6;\ \tau(d) \underline{\circ}\ d.$$

Соответственно этому обозначим

$$\widetilde{A}_l \underline{\circ}\ \tau(A'_l), l = 1, \ldots,\ m;\ \widetilde{A}_{m+1} \underline{\circ}\ \tau(W'_j a_1\, Y'\, b_2^{-1} Y'^{-1} a_1^{-1}),$$
$$\widetilde{A}_{m+2} \underline{\circ}\ \tau(T'^2 a,\ Z'^{-1}_2 a_1 Z'^{-1}_1\, a_1^{-1});$$

$$\widetilde{W}_j \underline{\circ}\ \tau(W'_j),\ \widetilde{Y} \underline{\circ}\ \tau(a_3),\ \widetilde{Z}_1 \underline{\circ}\ \tau(a_4),\ \widetilde{Z}_2 \underline{\circ}\ \tau(a_6),\ \widetilde{T} \underline{\circ}\ \tau(a_5).$$

Определим также следующие конечно определенные группы:

$$H_{j,k} = \langle\langle a,\ b,\ d;\ \widetilde{A}_1 = 1, \ldots,\ \widetilde{A}_{m+2} = 1,\ \widetilde{W}_j a = a\,\widetilde{Y} b\,\widetilde{Y}^{-1},$$
$$d^k = 1,\ \widetilde{T} d\,\widetilde{T} a = a\widetilde{Z}_1 a^{-1}\,\widetilde{Z}_2 \rangle\rangle.$$

Пусть p_1, p_2, $p_3, \ldots$ — ряд простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, ... В работе [1], где подробно рассмотрены конструкции, вполне аналогичные группам E_j, $D_{j,p_{2j}}$, $H_{j,p_{2j+1}}$, доказаны следующие свойства этих групп, которые нам в дальнейшем понадобятся.

1. $X_j = 1$ в $G_0 \iff E_j \simeq 1$;

2. $X_j = 1$ в $G_0 \iff W_j = 1$ в $D_{j,p_{2j}}$;

3. Если $X_j \neq 1$ в G_0, то G_2 изоморфно вкладывается в группу $D_{j,p_{2j}}$;

4. Если $\widetilde{W}_j \neq 1$ в E'_j, то E'_j изоморфно вкладывается в группу $H_{j,p_{2j+1}}$.

Свойство 1 следует из доказательства свойств группы L_X в [1] если в качестве Y_1 взять единичную группу. Свойства 2, 3 и 4 по существу содержатся в доказательстве леммы 7 работы [1].

Теорема 1. *В классе к. о. групп с фиксированным числом образующих k проблема распознавания нетривиальных гомоморфизмов одной группы на другую группу алгоритмически неразрешима тогда и только тогда, когда $k \geq 2$.*

Рассмотрим следующие пары конечно определенных групп: $(D_{j,p_{2j}}, E_j)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$

Пусть $X = 1$ в G_0. Тогда $E_j \urcorner\simeq 1$ и, следовательно, любой гомоморфизм $D_{j,p_{2j}}$ на E_j был бы тривиальным.

Пусть $X \neq 1$ в G_0. Тогда $E_j \simeq 1$ и E_j можно представить как

$$E_j = \langle\langle a, b, g;\ A_1 = 1, \ldots,\ A_m = 1,\ g^{p_{2j}} = 1,\ W_j a = aY b Y^{-1},$$

$TgTa = aZ_1 a^{-1} Z_2, g = 1\rangle\rangle$.

Следовательно, E_j является нетривиальным гомоморфным образом группы $D_{j,p_{2j}}$ относительно очевидного отображения. Действительно, $E_j \urcorner\simeq 1$ и, следовательно, он не есть гомоморфизм на единичную группу. Кроме того, этот гомоморфизм не есть изоморфизм. Действительно, допустим, что это изоморфизм. Тогда $g = 1$ в группе $D_{j,p_{2j}}$. Но $X_j \neq 1$ в группе G_0, поэтому $W_j \neq 1$ в группе $D_{j,p_{2j}}$. В этом случае G_2 изоморфно вкладывается в группу $D_{j,p_{2j}}$ и, следовательно, $g = 1$ в группе G_2, т. е. $p_{2j} = 1$, что является противоречием. Следовательно, $D_{j,p_{2j}} \urcorner\simeq E_j$. Итак, в этом случае существует нетривиальный гомоморфизм группы $D_{j,p_{2j}}$ на группу E_j. Получаем, что нетривиальный гомоморфизм группы $D_{j,p_{2j}}$ на группу E_j существует тогда и только тогда, когда $X_j \neq 1$ в G_0.

Но проблема тождества $X = 1$ в группе G_0 для класса слов $\mathfrak{S} = \{X_1, X_2, \ldots\}$ неразрешима. Поэтому проблема распознавания нетривиальных гомоморфизмов групп $D_{j,p_{2j}}$, $j = 1, 2, \ldots$ соответственно на группы E_j, $j = 1, 2 \ldots$ алгоритмично неразрешима.

Однако все группы E_j имеют 2 образующие, а группы $D_{j,p_{2j}}$ можно записать с двумя образующими следующим образом:

$$D_{j,p_{2j}} = \langle\langle a, b;\ A_1 = 1, \ldots,\ A_m = 1,\ W_j a = aY b Y^{-1},$$

$$(T^{-1} a Z_1 a^{-1} Z_2 a^{-1} T^{-1})^{p_{2j}} = 1\rangle\rangle.$$

В классе конечно определенных групп с фиксированным числом образующих $k < 2$ проблема распознавания нетривиальных гомоморфизмов „на" решается тривиально алгоритмом делимости двух целых чисел. Теорема доказана.

Теорема 2. *В классе к. о. групп с фиксированным числом образующих k проблема распознавания нетривиальных гомоморфизмов одной группы в другую группу алгоритмически неразрешима тогда и только тогда, когда $k \geq 2$.*

Пусть $X_j=1$ в G_0. Тогда $E'_j\simeq 1$. Поэтому $W'_j=1$ в E'_j и, следовательно, $\widetilde{W}_j=1$ в $H_{j,p_{2j+1}}$. Но тогда из определяющих соотношений группы $H_{j,p_{2j+1}}$ следует, что $b=1$, и тогда на основании кодировки τ имеем $\widetilde{A}_l=1$, $l=1,\dots,m+2$, $\widetilde{T}=1$, $\widetilde{Z}_1=1$, $\widetilde{Z}_2=1$, т. е. $H_{j,p_{2j+1}}\simeq\langle\langle d; d^{p_{2j+1}}=1\rangle\rangle$.

Кроме того, из $X_j=1$ в G_0 следует, что $W_j=1$ в группе $D_{j,p_{2j}}$. Но тогда из определяющих соотношений группы $D_{j,p_{2j}}$ и из кодировки τ следует, что $D_{j,p_{2j}}\simeq\langle\langle g; g^{p_{2j}}=1\rangle\rangle$. Так как p_{2j} и p_{2j+1} — взаимно простые числа, то не существует нетривиальный гомоморфизм группы $D_{j,p_{2j}}$ в группу $H_{j,p_{2j+1}}$.

Пусть $X_j\neq 1$ в G_0. Тогда $W_j\neq 1$ в группе $D_{j,p_{2j}}$ и G_2 изоморфно вкладывается в группу $D_{j,p_{2j}}$. Поэтому g является элементом p_{2j}-го порядка в группе $D_{j,p_{2j}}$. Определим следующий гомоморфизм группы $D_{j,p_{2j}}$ на группу, E_j: $\varphi(a)=a$, $\varphi(b)=b$, $\varphi(g)=1$. Очевидно это нетривиальный гомоморфизм, ибо $E_j\neg\simeq 1$, а g — нееденичный элемент. Кроме того, поскольку $X_j\neq 1$ в G_0, то в $W'_j\neq 1$ в E'_j, и поэтому E'_j изоморфно вкладывается в группу $H_{j,p_{2j+1}}$. Следовательно, в этом случае существует нетривиальный гомоморфизм группы $D_{j,p_{2j}}$ в группу $H_{j,p_{2j+1}}$.

Но, поскольку группа G_0 имеет алгоритмически неразрешимую проблему тождества $X=1$ для класса слов $\mathfrak{S}=\{X_1, X_2,\dots\}$, то проблема распознавания нетривиальных гомоморфизмов групп $D_{j,p_{2j}}$, $j=1,2,\dots$, соответственно в группы $H_{j,p_{2j+1}}$, $j=1,2,\dots$, также алгоритмически неразрешима.

Как и в теореме 1, в группах $D_{j,p_{2j}}$ и $H_{j,p_{2j+1}}$ можно выразить образующие g и d, поэтому эти группы имеют 2 образующие.

Следовательно, в классе к. о. групп с фиксированным числом образующих $k\geq 2$ проблема распознавания нетривиальных гомоморфизмов одной группы в другую алгоритмически неразрешима.

В классе к. о. групп с одной образующей проблема распознавания нетривиальных гомоморфизмов решается легко нахождением наименьшего общего делителя порядков групп.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Д. Павлов. О проблеме распознавания групповых свойств в ограниченных алфавитах. *Сердика*, 5, 1979, 149—172.

Единый центр математики и механики
1090 София *П. Я. 373*

Поступила 28. 11. 1978