Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О СТЕПЕНИ СВЯЗНОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ КОНТИНУУМОВ

НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ

Пусть K_i, $i=1, 2, \ldots$ — нетривиальные континуумы, а F_n, $n=1, 2, \ldots$ — собственные замкнутые подмножества топологического произведения $K=\Pi_{i=1}^{\infty} K_i$, для которых всевозможные попарные пересечения $F_n \cup F_m$, где $n \neq m$ слабо бесконечномерны в смысле П. С. Александрова. При этих предположениях дополнение $K \setminus \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ непусто. Это предложение обобщается и для кардинальной размерности.

Пусть τ — кардинальное число. Систему $\{F_{+\alpha}, F_{-\alpha}\}_{\alpha \in A}$ назовем τ-системой в топологическом пространстве X, если $F_{\pm\alpha}$ — замкнутые подмножества этого пространства, $F_{+\alpha} \cap F_{-\alpha} = \emptyset$ для любого $\alpha \in A$, $|A| = \tau$ и если C_α — произвольная перегородка в X между $F_{+\alpha}$ и $F_{-\alpha}$, то $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \neq \emptyset$.

Система пар противоположных граней n-мерного куба является n-системой в кубе. По существу, этот результат принадлежит Лебегу и Брауэру [1, стр. 64] и является одним из первых результатов по теории размерности, хотя явная его формулировка встречается значительно позднее у Эйленберга и Отто [2]. Из теоремы Лебега—Брауэра тривиально следует, что система пар противоположных граней гильбертова куба является $\aleph_0$-системой в этом кубе и, вообще, система пар противоположных граней тихоновского куба веса τ является τ-системой.

Теорема Лебега—Брауэра является основным результатом в теории размерности эвклидовых пространств и отправным пунктом во всей теории размерности. Поэтому любое нетривиальное обобщение этой теоремы вызывает определенный интерес. Такое обобщение содержится в [3], где доказано следующее предложение:

Предложение 1. *Даны n нетривиальные континуумы K_i, $i=1, 2, \ldots, n$, и $a_{\pm i} \in K_i$, $a_{+i} \neq a_{-i}$. Положим $K=\Pi_{i=1}^{n} K_i$ и $K_{\pm i}=\{x : x \in K, x_i = a_{\pm i}\}$. Тогда $\{K_{+i}, K_{-i}\}_{i=1}^{n}$ является n-системой в K.*

Из этого предложения следует, что $\dim K \geq n$. С другой стороны, очевидно бикомпакт K связан. На самом деле, из предложения 1 можно извлечь значительно большую информацию о „степени связности“ пространства K. Сначала напомним одно определение.

Говорим, что пространство X является сильным канторовым n-многообразием, если невозможно равенство $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где X_i — собственные замкнутые подмножества пространства X, для которых $\dim(X_i \cap X_j) \leq n-2$ при всяких i и j, $i \neq j$. [4].

Предложение 2. *Если K_i — нетривиальные континуумы, тогда произведение $K=\Pi_{i=1}^{n}$ является сильным канторовым n-многообразием*

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 5, 1979, с. 380—385.

Это предложение доказано в [3] с помощью предложения 1. Нам кажется, что с помощью предложения 1 можно будет доказать даже следующее более сильное утверждение.

Если K_i — нетривиальные континуумы и $M \subset K = \Pi_{i=1}^{n} K_i$, $\dim M \leq n-2$, тогда $K \setminus M$ является семиконтинуумом.

К предположениям надо добавить еще требование о том, что $K \setminus M$ нормально прилегает к M. Вероятно верно и то, что любые две точки из $K \setminus M$ можно соединить бикомпактным канторовым $(n-\dim M-1)$ — многообразием, непересекающимся с множеством M.

Напомним, что если M — подмножество топологического пространства X, то, следуя Смирнову, говорят, что $X \setminus M$ нормально прилегает к M в случае, когда любые два непересекающиеся замкнутые в M подмножества обладают непересекающимися открытыми в X окрестностями. Отметим, что сформулированная гипотеза сильнее утверждения 2, как это известно из [5]. Впрочем, надо иметь в виду еще и следующее простое следствие из предложения 2:

Следствие 1. *Если U — открытое подмножество произведения n нетривиальных континуумов, тогда $\dim U \geq n$.*

Отметим особо и следующий интересный частный случай предложения 2:

Следствие 2. *n-мерный куб является сильным канторовым n-многообразием.*

Это следствие доказано Уилкинсоном [6] и получено независимо автором [7]. Идея доказательства предложения 2 взята из [7].

Гипотезу нетрудно доказать при $n=2$, предполагая, что K удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Увеличивая число множителей произведения K, мы увеличиваем этим и „степень его связности", так как если пространство сильно n-связно, то оно и сильно $(n-1)$-связно. Следует ожидать, что качественный скачок получится в случае произведения бесконечного числа континуумов. И это действительно так. Оказывается, произведение счетного числа континуумов нельзя представить в виде объединения счетного числа собственных замкнутых подмножеств, попарные пересечения которых конечномерны. Верно даже более сильное утверждение, но чтобы сформулировать его, необходимо напомнить два определения.

Пространство X называют слабо бесконечномерным в смысле П. С. Александрова, если в нем нет $\aleph_0$-систем. Говорим, что топологичское пространство X является сильным канторовым $\aleph_0$-многообразием [4], если X нельзя представить в качестве объединения счетного числа собственных замкнутых подмножеств, попарные пересечения которых слабо бесконечномерны в смысле Александрова.

Из предложения 1 очевидным образом получаем

Следствие 3. *Пусть K_α, где $\alpha \in A$ — нетривиальные континуумы и $a_{\pm\alpha} \in K_\alpha$, $a_{+\alpha} \neq a_{-\alpha}$. Положим $K = \prod_{\alpha \in A} K_\alpha$ и $K_{\pm\alpha} = \{x \mid x \in K, x_\alpha = a_{\pm\alpha}\}$. Тогда $\{K_{+\alpha}, K_{-\alpha}\}_{\alpha \in A}$ является $|A|$-системой в произведении K.*

Пользуясь техникой, развитой в [7, 8, 3], с помощью следствия 3 получаем следующее обобщение предложения 2.

Предложение 3. *Произведение счетного числа нетривиальных континуумов является сильным канторовым $\aleph_0$-многообразием.*

В качестве следствия из этой теоремы получаем

Следствие 4. *Любое открытое подмножество произведения счетного числа нетривиальных континуумов сильно бесконечномерно в смысле Александрова.*

Естественно, пространство называют сильно бесконечномерным, если оно не слабо бесконечномерно.

Один частый случай предложения 3 доказан еще в [8].

Следствие 5. *Гильбертов куб является сильным канторовым $\aleph_0$-многообразием.*

Выше нами была высказана гипотеза, что теорема Мазуркиевича [9], согласно которой дополнение $(n-2)$-мерного множества до n-мерного куба всегда является семиконтинуумом, можно обобщить, заменяя n-мерный куб произведением n нетривиальных континуумов. Надо заметить, что один бесконечномерный аналог этой теоремы Мазуркиевича содержится в [10]. Он гласит, что если M — слабо бесконечномерное подмножество гильбертова куба, то его дополнение является семиконтинуумом. По-видимому, и это утверждение можно обобщить, доказав, что если M — счетно паракомпактное и слабо бесконечномерное подмножество произведения $K=\Pi_{i=1}^{\infty}K_i$, где K_i — нетривиальные континуумы, при предположении, что $K\setminus M$ нормально прилегает к M, тогда обязательно $K\setminus M$ является семиконтинуумом, более того, любые две точки из $K\setminus M$ можно соединить бикомпактным канторовым $\aleph_0$-многообразием, целиком лежащим в $K\setminus M$. Притом, основным моментом в доказательстве этой гипотезы, вероятно, будет предложение 3. Следует добавить, что эта гипотеза, разумеется, если она подтвердится, является утверждением, более сильным по сравнению с предложением 3, как это явствует из работы [5].

Чтобы обобщить предложение 3, напомним сначала несколько определений. Пусть τ — бесконечное кардинальное число, а X — топологическое пространство. Говорим, что пространство X имеет кардинальную размерность, не большую чем τ или, что $k(X)\leqq\tau$, если в X нет τ-систем. В противном случае говорим, что $k(X)>\tau$ [11]. Пространство X называем τ-нормальным, если ко всякой системе замкнутых множеств $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$, где мощность $|A|$ системы индексов A меньше или равна τ и $\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha=\emptyset$, можно найти для любого α такую окрестность U_α множества F_α, что $\bigcap_{\alpha\in A}U_\alpha=\emptyset$ [11]. Пространство X называем сильным канторовым τ-многообразием, если его нельзя разложить в счетное объединение собственных замкнутых подмножеств, попарные пересечения которых имеют кардинальную размерность не более чем τ [4].

Снова с помощью следствия 3 и с техникой, развитой в [7; 8; 11; 3], получаем:

Предложение 4. *Пусть τ — бесконечное кардинальное число. Тихоновское произведение τ штук нетривиальных континуумов является сильным канторовым τ-многообразием.*

Из предложения 4 легко вывести следующее

Следствие 6. *Любое открытое подмножество произведения τ штук нетривиальных континуумов, где τ — бесконечное кардинальное число, имеет кардинальную размерность больше τ.*

Один частный случай предложения 4 доказан еще в [11].

Следствие 7. *Тихоновский куб веса τ, где τ — бесконечное кардинальное число, является сильным канторовым τ-многообразием.*

Нам кажется, что с помощью следствия 3 можно получить обобщение аналога теоремы Мазуркиевича из [10] в этом самом общем случае. Наверно он будет выглядеть следующим образом.

Пусть τ — *бесконечное кардинальное число,* $|A|=\tau$ *и любому* $\alpha\in A$ *сопоставлен нетривиальный континуум* K_α. *Предположим еще, что* M — τ-*нормальное подмножество тихоновского произведения* $K=\prod_{\alpha\in A}K_\alpha$ *и* $K\setminus M$ *нормально прилегает к* M. *При этих предположениях, если кардинальная размерность множества* M *не более чем* τ, *то* $K\setminus M$ *является семиконтинуумом. Более того, любые две точки из* $K\setminus M$ *можно будет соединить бикомпактным* τ-*многообразием, непересекающимся с* M.

Способом, указанным в [5], устанавливаем, что эта гипотеза является утверждением, более сильным, чем предложение 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Гуревич, Г. Волмэн. Теория размерности. Москва, 1948.
2. S. Eilenberg, E. Otto. Quelques propriétés caractéristiques de la théorie de la dimension. *Fund. Math.*, **31**, 1938, 149—153.
3. Н. Хаджииванов. О произведениях континуумов. *Доклады БАН*, **31**, 1978, 1241—1244.
4. N. Hadžiivanov. On infinite-dimensional Cantor manifolds. *Colloq. Math. Soc. "János Bolyai", Topics in topology*, **8**, 1972, 355—363.
5. Н. Хаджииванов. О счетных объединениях замкнутых множеств. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 779—781.
6. J. Wilkinson. A lower bound for the dimension of certain G_δ sets in completely normal spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20**, 1969, 175—178.
7. Н. Хаджииванов. n-мерный куб нельзя разбить в счетное объединение... *Доклады СССР*, **195**, 1970, 43—45.
8. Н. Хаджииванов. Гильбертов параллелепипед не разбивается в счетное объединение.... *Доклады СССР*, **195**, 1970, 1282—1285.
9. S. Mazurkiewicz. Sur les ensembles de dimension faible. *Fund. Math.*, **13**, 1929, 210—217.
10. N. Hadžiivanov. A lower bound for the dimension of certain G_δ sets in Tychonov cube. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **28**, 1975, 151—152.
11. Н. Хаджииванов. О продолжении отображений в сферы .. *Матем. сб.* **83**, 1971, 119—140.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 16. 2. 1979