Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

ОТЫСКАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

МУРЗАБЕК ИМАНАЛИЕВ, КЕЛДИБАЙ АЛЫМКУЛОВ

В работе доказано существование малого однопараметрического периодического решения задачи: $u_{\tau\tau}-u_{xx}=f(u)$, $u(\tau, 0)=u(\varepsilon, \pi)=0$, $u(\tau+2\pi/\omega, x)=u(\tau, x)$. Здесь $f(u)$ — нечетная аналитическая функция в окрестности нуля, причем $f'0=(0)$; ω — неизвестная частота.

Рассмотрим уравнение

$$u_{\tau\tau}-u_{xx}=f(u) \tag{1}$$

с краевым и периодическим условиями

$$u(\tau, 0)=u(\tau, \pi)=0, \quad u(\tau+2\pi/\omega\,;\ x)=u(\tau, x), \tag{2}$$

где $f(u)$ — нечетная аналитическая функция в окрестности нуля, ω — неизвестная частота. Подстановкой $t=\omega\tau$ задача (1)—(2) приводится к следующей задаче:

$$a_0u_{tt}-u_{xx}=f(u)-au_{tt}, \quad (a_0+a=\omega^2), \tag{3}$$

$$u(t, 0)=u(t\ \pi)=0, \quad u(t+2\pi, x)=u(t, x), \tag{4}$$

где a_0 — фиксированная постоянная, a — неизвестное число. Продолжим $u(t, x)$ по аргументу x на всю числовую ось как нечетную 2π-периодическую функцию.

Так как нуль является решением уравнения (3), то изучается существование малых 2π-периодических по аргументам t и x решений уравнения (3). Ниже такие функции для краткости будем называть „периодическими". Задача (3) — (4) изучалась в [5] для следующих видов нелинейной функции: $f(u)=u^3$, $f(u)=\varepsilon(\beta u+\gamma u^3)$, $f(u)=\varepsilon\sin u$, (ε — малый параметр, β, γ — постоянные).

В данной работе излагается общий метод построения периодических решений уравнения (3) в случае, когда $f'(0)=0$ или $f(u)=\varepsilon g(u)$, где $g(u)$ — произвольная нечетная аналитическая функция в окрестности нуля.

Далее ищется нечетное антипериодическое по t и x периодическое решение уравнения (3), т. е. такое $u(t, x)$, что $u(t+\pi, x)=-u(t, x)$, $u(t, x+\pi)=-u(t, x)$. Аналогичные результаты имеют место для четного антипериодического по аргументу t, нечетного антипериодического — по аргументу x решения.

Пусть $f'(0)=0$. Линеаризованное в нуле (порождающее) уравнение (3) при $a=0$ имеет вид

$$a_0u_{1tt}-u_{1xx}=0. \tag{5}$$

Это уравнение имеет периодическое решение вида $u_1(t, x)=p_1(nt+mx)+q_1(nt-mx)$ при $\alpha_0=(m/n)^2$, где m, n — целые числа, $p_1(\zeta)$, $q_1(\nu)$ — периодические функции из $C^{(2)}$. Далее, для простоты предположим $\alpha_0=1$. Тогда (5) имеет периодическое решение, представимое в виде

$$u_1(t, x)=p_1(\xi)-p_1(\eta),\ \xi=t+x,\ \eta=t-x, \tag{6}$$

где p_1 — четная антипериодическая функция с антипериодом π.

В дальнейшем нам потребуется следующая [5]

Лемма 1. *Пусть $g(t, x)$ — периодическая функция, нечетная по аргументу x. Для того, чтобы уравнение*

$$\mathscr{L}_{tt}-\mathscr{L}_{xx}=g(t, x) \tag{7}$$

имело периодическое решение, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_0^{2\pi} g(s, \xi-s)ds=0. \tag{8}$$

При выполнении условия (8) периодическое решение уравнения (7) представимо в виде $\mathscr{L}(t, x)=p(\xi)-p(\eta)+\mathscr{L}^*(t, x)$, где $p(\zeta)$ — 2π-периодическая функция из $C^{(2)}$, $\mathscr{L}^*(t, x)$ — частное периодическое решение (7) и справедлива оценка $\|z^*(t, x)\|\leq M\|g\|$, где M — постоянная, независящая от g, $\|g\|=\sup\limits_{0\leq t,\ x\leq 2\pi} g(t, x)$.

Теорема 1. *Пусть $f(u)$ — нечетная аналитическая функция в окрестности нуля и $f^{(2k+1)}(0)=0(k=0,1,\ldots, n-1)$ и $f^{(2n+1)}(0)\neq 0$. Тогда задача (3) — (4) имеет периодическое решение, представимое в виде*

$$u(t, x, \varepsilon)=u_1(t, x)\varepsilon+u_2(t, x)\varepsilon^2+\cdots, \tag{9}$$

$$\alpha=\alpha_1\varepsilon+\alpha_2\varepsilon^2+\cdots, \tag{10}$$

где ε — малый параметр, $u_i(t, x)$, α_i — соответственно пока неизвестные периодические функции и постоянные.

Доказательство проведем для случая $n=1$. В случае $n>1$ доказательство проводится без существенного изменения.

Подставляя ряды (9) и (10) в (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$Lu_1\equiv u_{1tt}-u_{1xx}=0. \tag{11$_1$}$$

$$Lu_2=-\alpha_1 u_{1tt}, \tag{11$_2$}$$

$$Lu_3=-\alpha_1 u_{2tt}-\alpha_2 u_{1tt}+f_3 u_1^3, \tag{11$_3$}$$

$$Lu_4=-\alpha_1 u_{3tt}-\alpha_2 u_{2tt}+3f_3 u_1^2 u_3, \tag{11$_4$}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где $f_3=f^{(3)}(0)/3!$. Начальные условия для уравнений (11_i) берем следующим образом:

$$\begin{aligned} &u_1(0, x)=0, \quad u_{1t}(0, x)\neq 0,\\ &u_i(0, x)=0, \quad u_{it}(0, x)=0. \end{aligned} \tag{12$_i$}$$

Уравнение (11_1) имеет периодическое решение, представимое в виде (6). Условие (8) для периодичности решения уравнения (11_2) дает

$$\alpha_1 p_{1\xi\xi}(\xi) = 0. \tag{13}$$

Для четной антипериодической функции $p_1(\xi)$ начальные условия берем в виде

$$p_1(0) = 1, \quad p^1(0) = 0. \tag{14}$$

Поскольку $p_1(\xi) \not\equiv 0$, из (13) имеем $\alpha_1 = 0$. Тогда уравнение (11_2) имеет периодическое решение вида

$$u_2(t, x) = p_2(\xi) - p_2(\eta), \tag{15}$$

где $p_2(\zeta)$ — четная периодическая функция из $C^{(2)}$ с антипериодом π. Условие периодичности решения уравнения (11_3) дает

$$\alpha_2 p_{1\xi\xi}(\xi) = f_3(p_1^3(\xi) + 3[p_1^2]\, p_1(\xi)),\ p_1(0) = 1, \quad p_1'(0) = 0, \tag{16}$$

где $[p_1^2] \equiv (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} p_1^2(\xi) d\xi$. Уравнение (16) решаем методом Вейерштрасса [2]. Тогда имеем

$$p_1(\xi) = \cos w,\ \xi = \int\limits_0^w \frac{dw}{\psi(w)}, \quad \psi(w) \simeq \sqrt{-\frac{9+\cos 2w}{4\bar{\alpha}_2}}.$$

Период функции $p_1(\xi)$ по ξ должен быть равен 2π:

$$2\pi = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{-\frac{4\bar{\alpha}_2}{9+\cos 2\omega}}\, dw, \quad \bar{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{f_3}.$$

Отсюда можно найти неизвестную $\bar{\alpha}_2$: $\bar{\alpha}_2 \simeq -2{,}25$. Тогда уравнение (11_3) имеет периодическое решение вида $u_3(t, x) = p_3(\xi) - p_3(\eta) + u_3^*(t, x)$, где $p_3(\zeta)$ — четная антипериодическая функция с антипериодом π, $p_3(\zeta)$ из $C^{(2)}$, $u_3^*(t, x)$ — частное периодическое решение.

Условие периодичности решения уравнения (11_4) дает

$$\alpha_2 p_{2\xi\xi}(\xi) = 3f_3(p_1^2(\xi) + [p_1^2])\, p_2(\xi) + F(\xi), \tag{17}$$

где

$$F(\xi) = \beta p_1(\xi) - \alpha_3 p_{1\xi\xi}(\xi), \quad \beta \equiv 6[p_1 p_2]. \tag{18}$$

Для p_2 берутся нулевые начальные условия, т. е. $p_2(0) = 0$, $p_2'(0) = 0$. Уравнение (17) рассматриваем как неоднородное дифференциальное уравнение. Однородное дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (17), имеет два линейно независимых решения:

$$v_1(\xi) = \dot{p}_1(\xi),\ v_2(\xi) = \dot{p}_1(\xi) \int\limits_0^\xi \frac{d\tau}{\dot{p}_1(\tau)^2}, \quad \left(\dot{p}(\xi) \equiv \frac{dp}{d\xi}\right),$$

причем $v_1(\xi)\dot{v}_2(\xi) - \dot{v}_1(\xi) v_2(\xi) = 1$. Мы теперь должны доказать существование 2π-периодического решения уравнения (17).

Лемма 2. *Для того, чтобы уравнение* (17) *имело периодическое решение с нулевыми начальными условиями, необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\int_0^{2\pi} \dot{p}_1(\xi)F(\xi)d\xi=0, \tag{19}$$

$$\int_0^{2\pi} v_2(\xi)F(\xi)d\xi=0. \tag{20}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству получения формулы (2.29) из [1].

Очевидно, что условие (19) выполняется тождественно. Условие (20) дает

$$\beta\int_0^{2\pi} v_2(\xi)\,p_1(\xi)d\xi-\alpha_3\int_0^{2\pi} v_2(\xi)\,p_1''(\xi)d\xi=0. \tag{21}$$

Если выполняется это условие, то уравнение (17) имеет периодическое решение вида

$$\alpha_2\,p_2(\xi)=-\dot{p}_1(\xi)\int_0^{\xi} v_2(\xi)F(\xi)d\xi+v_2(\xi)\int_0^{\xi}\dot{p}_1(\xi)F(\xi)d\xi. \tag{22}$$

Подставляя значение $p_2(\xi)$ в (18), получаем второе уравнение для неизвестных β и α_3. После некоторых вычислений получаем следующую систему уравнений относительно β и α_3:

$$\frac{\pi\beta}{3}+(I_3-I_1)\beta+\frac{\alpha_3}{2\alpha_2}\left(I_3+3[p_1^2]I_1-\frac{3}{2}I_5-6[p_1^2]I_3+\frac{1+6[p_1^2]}{2}I_1\right)=0, \tag{23}$$

$$\beta I_1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}(I_3+3[p_1^2]I_1)=0,$$

где

$$I_1=\int_0^{2\pi} v_2(\xi)p_1(\xi)d\xi=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\psi^3(t)}=-\frac{1}{2}\gamma_0,$$

$$I_3=\int_0^{2\pi} v_2(\xi)p_1^3(\xi)d\xi=-\frac{1}{2}\gamma_0+\frac{1}{4}\gamma_2,$$

$$I_5=\int_0^{2\pi} v_2(\xi)p_1^5(\xi)d\xi=-\frac{1}{2}\gamma_0+\frac{1}{2}\gamma_2-\frac{1}{6}\gamma_4,$$

$$\gamma_k=\int_0^{2\pi}[\sin^k t/\psi^3(t)]dt,\quad (k=0,\,2,\,4).$$

Определитель системы (23) $\Delta\simeq-0{,}75\neq0$. Поэтому система (23) имеет только нулевое решение $\alpha_3=0$, $\beta=0$. Из (18), (22), (15) получаем, что $p_2(\xi)\equiv0$, $u_2(t,x)\equiv0$. Периодическое решение уравнения (11_4) тогда запишется в виде $u_4(t,x)=p_4(\xi)-p_4(\eta)$, где p_4 — четная антипериодическая функция с антипериодом π. В дальнейшем этот процесс повторяется, и остальные неизвестные $u_3, u_4, \ldots;\ \alpha_4, \alpha_5, \ldots$, определяются единственным образом.

Сходимость полученных рядов (9) и (10) доказывается методом мажорант.

Предположим теперь, что $f'(0)=f_1 \neq 0$ — целое число. Тогда уравнение (3) перепишется в виде

$$a_0 u_{tt} - u_{xx} = f_1 u + \bar{f}(u) - \alpha u_{tt}, \quad \bar{f}(u) = f(u) - f_1 u, \tag{24}$$

где $\bar{f}(u)$ содержит нелинейные члены.

Порождающее уравнение для (24) имеет вид

$$a_0 u_{1tt} - u_{1xx} = f_1 u. \tag{25}$$

Здесь a_0 считается рациональным числом. В зависимости от a_0 и a_1 уравнение (25) может иметь конечное ($\geqq 0$) или счетное число периодических решений. Последний случай рассматривался в работах [3; 4].

Рассмотрим один простой случай, когда порождающее уравнение (25) имеет конечное число пориодических решений.

Теорема 2. *Пусть*

1) $f(u)$ — *нечетная аналитическая функция в окрестности нуля и* $f'(0)=3$;

2) $a_0=1$.

Тогда задача (24), (4) *имеет периодическое решение, представимое в виде* (9), (10).

Доказательство. В этом случае порождающее уравнение имеет вид $Lu_1 \equiv u_{1tt} - u_{1xx} - 3u_1(t, x) = 0$. Это уравнение имеет периодическое решение вида

$$u_1(t, x) = (a_1 \cos t + b_1 \sin t) \sin 2x, \tag{26}$$

где a_1, b_1 — произвольные постоянные.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$Lu_1 \equiv u_{1tt} - u_{1xx} - 3u_1 = r(t, x), \tag{27}$$

где $r(t, x)$ — периодическая функция, нечетная по аргументу x. Имеет место

Лемма 3. *Для того чтобы уравнение имело периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\int_0^{2\pi} r(t, x) \cos t \sin 2x dt dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} r(t, x) \sin t \sin 2x dt dx = 0. \tag{28}$$

(Условие (28) указывает на отсутствие резонансных членов в разложении ряда Фурье функции $r(t, x)$. Поэтому при его выполнении уравнение (27) имеет единственное частное периодическое решение).

Как и раньше, ищем нечетные по t и x периодические решения. В (26) положим $a_1=0$, $b_1=1$, т. е. $u_1(t, x) = \sin t \,.\, \sin 2x$. Для определения $u_2(t, x)$, $u_3(t, x), \ldots$ в (9) получим следующие уравнения:

$$Lu_2 = \alpha_1 \sin t \,.\, \sin 2x, \tag{29_2}$$

$$Lu_3 = \alpha_1 \sin t \sin 2x + \alpha_2 \sin t \sin 2x + f_3 u_1^3, \tag{29_3}$$

. . . .

Начальные условия для $u_2, u_3, \ldots$ как и раньше, нулевые. Условие периодичности решения уравнения (29_2) дает $\alpha_1=0$. Следовательно $u_2(t, x)=0$. Из условий периодичности решения уравнения (29_3) имеем

$$a_2 = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_3 \sin t \sin 2x\, u_1^3(t, x)\,dt\,dx = -\frac{9}{16} f_3.$$

Тогда $u_3(t, x)$ определяется единственным образом. Аналогично определяются остальные неизвестные $u_4, u_5, \ldots; a_3, a_4, \ldots$. Теорема доказана.

Теорема 2 легко обобщается на случай, когда $f'(0) = p > 3$ — простое число. (Теоремы 1 и 2 без доказательств приведены в [5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Моисеев. Асимптотические методы нелинейной механики. Москва, 1979.
2. К. Шарлье. Небесная механика. Москва, 1966.
3. М. И. Иманалиев, К. Алымкулов. О существовании периодических решений нелинейных волновых уравнений. *Изв. АН КиргССР*, 1978, **6**.
4. М. И. Иманалиев, К. Алымкулов. Периодические решения уравнения Клейна-Гордона. *Всесоюзная конференция по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных уравнений*. Алма-Ата, 1979.
5. К. Алымкулов. Отыскание периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. В сб. *Интегро-дифференциальные уравнения и их приложения*, вып. 1, 1978.
6. L. P. Fink, S. W. Hall, S. Khalili. Perturbation expantion for nonlinear wave equation. *SIAM. J. Appl. Math.*, **24**, 1973, 575—595.

АН КиргССР, пр. Ленина 265 а
КиргССР, Фрунзе, 720071

Поступила 19.10.1977;
в переработанном виде 2.7.1979

Институт физики и математики АН КиргССР
КиргССР, Фрунзе, 720071, пр. Ленина 265 а