Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ κ-СПЛАЙНОВ

ГЕОРГИ Х. КИРОВ

Найдены точные верхние грани уклонений κ-сплайнов от функций $f \in H_v[0,1]$ и $f \in \widetilde{H}_v[0,2\pi]$ в метрике L_p. Показано, что квадратурная формула трапецов является оптимальной для классов $\widetilde{H}_v[0,1]$ и $H_v[0,2\pi]$.

1. Пусть функция $k(x)$ определена на отрезке $\Delta=[-1,1]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) четная на отрезке Δ;

2) монотонно возрастает на отрезке $[-1,0]$;

3) нормирована условием

$$K=\int_{-1}^{1}k(x)dx\neq 0, \quad k(-1)=0. \tag{1}$$

Как и в работе [1], положим

$$k_0(x)=\begin{cases} K^{-1}.k(x), & x\in\Delta; \\ 0 & , x\in \mathbb{R}\setminus\Delta, \end{cases} \tag{2}$$

$$k_m(x)=\int_{2x-1}^{2x+1}k_{m-1}(t)dt, \ x\in\mathbb{R}, \ m\in\mathbb{N}, \tag{3}$$

где, как обычно, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ обозначают соответственно множества действительных и натуральных чисел.

Функция $k_m(x)$ называется фундаментальным k-сплайном m-го порядка.

Для любого разбиения $\tau_n=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b \tag{4}$$

отрезка $[a, b]$ введем обозначения $h_i=x_i-x_{i-1}$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ и $|\tau_n|=\max_{1\leq i\leq n}h_i=x_\nu-x_{\nu-1}$.

Теперь для любой фунции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, положим

$$\widetilde{L}_n(k_m, f;\ x)=f(x_{i-1})k_m\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)+f(x_i)k_m\left(\frac{x_i-x}{h_i}\right), \tag{5}$$

когда $x\in[x_{i-1}, x_i]$, $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Функция $\widetilde{L}_n(k_m, f;\ x)$ называется k-сплайном m-го порядка (нулевой степени), порожденным функцией $f(x)$ и разбиением τ_n.

2. В. Ф. Сторчай и А. А. Лигун [2] для любой четной, неотрицательной и убывающей на отрезке $[0,1]$ функции $\varphi(x)$ и для любой функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, вводят обозначения

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 6, 1980, с. 16—20.

(6) $$\varrho(x)=\int_{-1}^{x}\varphi(t)dt, \quad x\in\Delta,$$

(7) $$\varrho_n(\varphi, f;\ x)=f(x_{i-1})+\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\varrho(1)}\cdot\varrho\left[\frac{2(x-x_{i-1})}{h_i}-1\right],$$

где $x\in[x_{i-1}, x_i]$, $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$. Функцию $\varrho_n(\varphi, f;\ x)$ мы будем называть φ-сплайном в смысле Сторчая — Лигуна, порожденным функцией $f(x)$ и разбиением τ_n.

В следующих трех леммах мы устанавливаем связь между φ-сплайнами в смысле Сторчая — Лигуна и k-сплайнами m-го порядка.

Лемма 1. *Если функция* $\varphi(x)$ *четная, монотонно убывающая на отрезке* $[0,1]$ *и удовлетворяет условию*

(8) $$\varrho(1)=\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx\neq 0, \quad \varphi(-1)=0,$$

то тогда

(9) $$\varphi_1(x)=\varrho(1-2x)/\varrho(1), \quad 0\leq x\leq 1,$$

где $\varphi_1(x)$ *является к-сплайном первого порядка, который получается по формуле* (3) *при* $k(x)=\varphi(x)$.

Доказательство. Из формул (1) — (3) и (8) видно, что

(10) $$\varphi_1(x)=\int_{2x-1}^{2x+1}\varphi_0(t)dt, \quad x\in\mathsf{R},$$

где

(11) $$\varphi_0(x)=\begin{cases}\varphi(x)/\varrho(1), & x\in\Delta;\\ 0, & x\in\mathsf{R}\setminus\Delta.\end{cases}$$

Пусть теперь $x\in[0, 1]$. Тогда $2x-1\in[-1, 1]$, $2x+1\in[1, 3]$, и учитывая (11), найдем $\varphi_1(x)=\varrho(1)^{-1}\int_{2x-1}^{1}\varphi(t)dt, \quad x\in[0, 1]$.

Так как функция $\varphi(t)$ четная, то положив в последнем интеграле $t=-\tau$, мы получим

(12) $$\varphi_1(x)=\frac{1}{\varrho(1)}\int_{-1}^{1-2x}\varphi(\tau)d\tau, \quad x\in[0, 1].$$

Искомое равенство (9) вытекает из (6) и (12). Этим лемма доказана.

Лемма 2. *Если функция* $\varphi(x)$ *четная, монотонно убывающая на отрезке* $[0,1]$ *и удовлетворяет условию* (8), *то для любой функции* $f(x)$, *заданной на отрезке* $[a, b]$, *выполняется равенство*

(13) $$\varrho_n(\varphi, f;\ x)=\widetilde{L}_n(\varphi_1;\ f;\ x), \quad x\in[a, b].$$

Доказательство. Пусть $x\in[x_{i-1}, x_i]$, $(i=1, 2, \ldots, n)$. Тогда $u=(x-x_{i-1})/h_i\in[0, 1]$ и по лемме 1

$$\varphi_1\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)=\varrho(1-2(x-x_{i-1})/h_i)/\varrho(1).$$

Отсюда при помощи тождества [2] $\varrho(x)+\varrho(-x)=\varrho(1)$, $x\in[0,1]$ находим

$$\varphi_1\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)=1-\varrho\left(\frac{2(x-x_{i-1})}{h_i}-1\right)/\varrho(1),\ x\in[x_{i-1},x_i]. \tag{14}$$

С другой стороны, $(x_i-x)/h_i=1-u\in[0,1]$ при $x\in[x_{i-1},x_i]$, и используя [1] тождество $\varphi_1(x)+\varphi_1(1-x)=1$, $x\in[0,1]$ и равенство (14), найдем

$$\varphi_1\left(\frac{x_i-x}{h_i}\right)=\varrho\left(\frac{2(x-x_{i-1})}{h_i}-1\right)/\varrho(1),\ x\in[x_{i-1},x_i]. \tag{15}$$

Теперь из формул (5), (14), (15) и (7) получаем равенство (13). Лемма доказана.

Лемма 3. *Если* $x\in[a,b]$, *то*

$$\widetilde{L}_n(k_m,f;\ x)=\varrho_n(k_{m-1},f;\ x),\quad (m,n\in\mathbb{N}). \tag{16}$$

Доказательство. Как мы показали в работе [1], $k_{m-1}(x)$ есть функция четная, монотонно возрастает на отрезке $[-1,0]$ и удовлетворяет условию

$$\int_{-1}^{1}k_{m-1}(x)dx=1,\ k_{m-1}(-1)=0. \tag{17}$$

Следовательно, к функции $\varphi(x)=k_{m-1}(x)$ мы можем применить конструкцию (6), (7) Сторчая — Лигуна:

$$\varrho_n(k_{m-1},f;\ x)=\varrho_n(\varphi,f;\ x). \tag{18}$$

По лемме 2 для любого $x\in[a,b]$

$$\varrho_n(\varphi,f;\ x)=\widetilde{L}_n(\varphi_1,f;\ x), \tag{19}$$

где

$$\varphi_1(x)=\int_{2x-1}^{2x+1}\varphi_0(t)dt,\ x\in\mathbb{R},$$

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)}{\varrho(1)}=k_{m-1}(x), & x\in\Delta,\\ 0 & ,\ x\in\mathbb{R}\setminus\Delta.\end{cases}$$

Следовательно, $\varphi_1(x)=\int_{2x-1}^{2x+1}k_{m-1}(t)dt=k_m(x)$. Отсюда и из формул (18) и (19) получаем (16). Этим лемма доказана.

3. Через $H_v[a,b]$ обозначим класс функций $f(x)$ ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$, для которых $\bigvee_a^b(f)\leqq V$, где V — некоторая положительная константа.

Теорема 1. *Если* $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$, $1\leqq p<+\infty$, *то*

$$\sup_{f\in H_v[0,1]}\|f(x)-\widetilde{L}_n(k_m,f;\ x)\|_{L_p[0,1]}=V\left\{\frac{|\tau_n|}{2}\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{x}k_{m-1}(t)dt\right]^p dx\right\}^{1/p}, \tag{20}$$

где, как обычно, $\|f(x)\|_{L_p[a,b]}=\{\int_a^b|f(x)|^p dx\}^{1/p}$, $f\in L_p[a,b]$.

Доказательство. Из леммы 3 и теоремы 1 работы [2] находим

$$\sup_{f\in H_v[0,1]}\|f(x)-\widetilde{L}_n(k_m,f;\ x)\|_{L_p[0,1]}=\sup_{f\in H_v[0,1]}\|f(x)-\varrho_n(k_{m-1},f;\ x)\|_{L_p[0,1]}$$

$$=\frac{V}{\varrho(1)}\left\{\frac{|\tau_n|}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{x}k_{m-1}(t)dt\right]^p dx\right\}^{1/p}$$

где $\varrho(1)=\int_{-1}^{1}k_{m-1}(x)dx$. Отсюда из формулы (17) получаем (20), и теорема доказана.

Следствие 1. *Если* $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$, $1\leq p<+\infty$, *то*

$$\inf_{\tau_n}\sup_{f\in H_v[0,1]}\|f(x)-\widetilde{L}_n(k_m,f;\ x)\|_{L_p[0,1]}=\sup_{f\in H_v[0,1]}\|f(x)-L_n(k_m,f;\ x)\|_{L_p[0,1]}$$

$$=V\left\{\frac{1}{2n}\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{x}k_{m-1}(t)dt\right]^p dx\right\}^{1/p},$$

где $L_n(k_m,f;\ x)=\widetilde{L}_n(k_m,f;\ x)$ *при* $\tau_n=\{i/n\}_{i=0}^{n}$.

Теорема 2. *Если* $n\in\mathbb{N}$, *то*

$$\sup_{f\in H_v[0,1]}\left|\int_0^1 f(x)dx-\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}h_i\right|=\frac{V\cdot|\tau_n|}{2}.$$

Доказательство. Пусть $f\in H_v[a,b]$, $m\in\mathbb{N}$ и $n\in\mathbb{N}$. Прежде всего докажем следующее равенство:

$$\int_a^b\widetilde{L}_n(k_m,f;\ x)dx=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\cdot h_i. \tag{21}$$

Действительно,

$$\int_a^b\widetilde{L}_n(k_m,f;\ x)dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\widetilde{L}_n(k_m,f;\ x)dx=\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})q_{i-1}+f(x_i)p_i],$$

где

$$q_{i-1}=\int_{x_{i-1}}^{x_i}k_m\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)dx=h_i\int_0^1 k_m(u)du=\frac{h_i}{2},$$

а

$$p_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i}k_m\left(\frac{x_i-x}{h_i}\right)dx=h_i\int_0^1 k_m(u)du=\frac{h_i}{2}$$

и, следовательно, равенство (21) доказано.

С помощью формул (21) и (20) для любой функции $f(x)\in H_v[0,1]$ найдем

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1}(+f(x_i)}{2}h_i\right|$$

$$\leq\int_0^1|f(x)-\widetilde{L}_n(k_m,f;\ x)|dx=\|f(x)-\widetilde{L}_n(k_m,f;\ x)\|_{L[0,1]}$$

$$\leq \frac{V \cdot |\tau_n|}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{x} k_{m-1}(t) dt dx = \frac{V \cdot |\tau_n|}{2} \cdot r_m,$$

где

$$r_m = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{x} k_{m-1}(t) dt dx = \int_{-1}^{1} \int_{t}^{1} k_{m-1}(t) dx dt = \int_{-1}^{1} k_{m-1}(t) dt - \int_{-1}^{1} t k_{m-1}(t) dt.$$

Теперь, воспользовавшись (17) и нечетностью [1] функции $t \cdot k_{m-1}(t)$, получим, что $r_m = 1$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h_i \right| \leq \frac{V \cdot |\tau_n|}{2}.$$

Определим функцию $f_0(x)$ следующим образом:

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_{\nu-1}], \\ V, & x \in (x_{\nu-1}, 1]. \end{cases}$$

Очевидно $f_0(x) \in H_v[0, 1]$, а также для функции $f_0(x)$ последнее неравенство превращается в равенство. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Если* $n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\inf_{\tau_n} \sup_{f \in H[0,1]} \left| \int_0^1 f(x) dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{f((i-1)/n) + f(i/n)}{2} h_i \right|$$

$$= \sup_{f \in H_v[0,1]} \left| \int_0^1 f(x) dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2n} \right| = \frac{V}{2n}.$$

Если функции $f(x) \in H_v[0, 1]$ являются, кроме того, 1-периодичными, то этот класс будем обозначать через $\widetilde{H}_v[0, 1]$.

Следствие 3. *Если* $n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\inf_{\tau_n} \sup_{f \in \widetilde{H}_v[0,1]} \left| \int_0^1 f(x) dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h_i \right|$$

$$= \sup_{f \in \widetilde{H}_v[0,1]} \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(i/n) \right| = \frac{V}{2n}.$$

Теорему 1 при $m = 1$ получили В. Ф. Сторчай и А. А. Лигун в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Х. Киров. Апроксимация на функции с к-сплайни. *Математика и математическо образование* (Доклади на VII пролетна конференция на СМБ, Слънчев бряг, 5—8 април 1978 г.). София, 1978, 361—368.
2. В. Ф. Сторчай, А. А. Лигун. Об отклонении некоторых интерполяционных сплайнов в метриках C и L_p. В сб. *Теория приближения функций и ее приложения*. Киев, 1974, 148—157.

ВИХВП, кафедра высшей математики, 4002 Пловдив *Поступила 16. 5. 1978*