Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ

ВЛАДИМИР Л. ЧАКАЛОВ, ЕМАНУИЛ М. ДИМИТРОВ

В настоящей заметке рассматривается класс т. н. сопряженных функций $p: U \to R^1$ (U — компактное топологические пространство), допускающих интегральное представление $p(u) = \int_T g(u, t) d\mu(t)$, где T — компактное отделимое пространство, $g: U \times T \to R^1$ — заданная функция, а μ — действительная мера на T. Доказывается, что 1) при некоторых условиях для g каждую сопряженную функцию можно интерполировать в n данных точках $u_1, \ldots, u_n \in U$ с линейными комбинациями вида $p_m(u) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i g(u, t)$ так, чтобы выполнялись условия 1) $\sum_{i=1}^{m} |\mu_i| = \|\mu\|$; 2) p_m аппроксимирует p равномерно на U с данной точностью. Этот результат применяется к абсолютно ограниченным функциям на промежутках $[0, 1]$ и $[0, \infty)$.

1. Здесь мы дадим некотодые определения, сформулируем некоторые известные результаты и докажем основной результат настоящей заметки.

Пусть U и T — непустые множества, а $g: U \times T \to R^1$ — заданная функция. Будем говорить (см. [1]), что функция $p: U \to R^1$ *позитивна относительно* g или короче — *позитивна*, если p удовлетворяет следующему условию. Если неравенство

$$x(t) = a_1 g(u_1, t) + \cdots + a_n g(u_n, t) \geqq 0 \tag{1}$$

выполняется для всех $t \in T$ при некотором выборе действительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ и элементов $U_1, \ldots, U_n \in U$, то имеет место и неравенство

$$l(x) = a_1 p(u_1) + \cdots + a_n p(u_n) \geqq 0. \tag{2}$$

Предположим теперь, что g ограничена относительно t при каждом $u \in U$. При этом дополнительном предположении будем говорить, что p — *сопряженная функция относительнd* g, или короче — *сопряженная функция*, если существует постоянная K так, что при любом выборе элементов $u_1, \ldots, u_n$ из U и действительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ имеет место неравенство

$$|l(x)| = |a_2 p(u_1) + \cdots + a_n p(u_n| \leqq K \sup_{t \in T} |a_1 g(u_1, t) + \cdots + a_n g(u_n, t)| \tag{3}$$
$$= K \sup_{t \in T} |x(t)|.$$

Здесь, для определенности, через K будем обозначать наименьшую постоянную с этим свойством.

Очевидно, что p есть позитивная функция тогда и только тогда, когда определенный через (2) линейный функционал l является позитивным функционалом над пространством X всех функций вида (1). Вводя в X равномерную норму (это возможно, так как g ограничена относительно t), можно утверждать, что p — сопряженная функция относительно g тогда и только тогда, когда функционал l, определенный через (2), является непрерывным функционалом. Очевидно, что тогда $K = \| l \|$.

Ниже мы сформулируем теорему 4 из [1].

Пусть U и T — непустые множества, а $g: U \times T \to R^1$ — функция и пусть выполняются следующие условия:

а) U и T — компактные топологические пространства, причем T — отделимое;

б) g непрерывна на T при каждом фиксированном $u \in U$;

в) существует $u_0 \in U$ так, что $g(u_0, t) > 0$ для всех $t \in T$;

г) g — ограниченная функция на $U \times T$;

д) множество точек разрыва (u, t) функции g может иметь не более чем конечное число вторых координат t.

Теорема [1, теорема 4]. *Если U, T и g удовлетворяют условиям* а) —g) *и если $p: U \to R^1$ — позитивная функция относительно g, то для любого выбора числа $\varepsilon > 0$ и элементов $u_1, \ldots, u_n$ из U существует конечное число точек $t_1, \ldots, t_m$ из T и неотрицательных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_m$ так, что имеют место соотношения $p(u_j) = \sum_{i=1}^m \mu_i g(u_j, t_i)$ $(j = 1, \ldots, n)$; и $| p(u) - \sum_{i=1}^m \mu_i g(u, t_i) | < \varepsilon$. Второе из них выполняется для всех $u \in U$.*

В качестве следствия этой теоремы мы докажем аналогичную теорему для сопряженных функций.

Теорема 1. *Если U, T и g удовлетворяют условиям* а), б), г), д) *и если $p: U \to R^1$ — сопряженная функция относительно g, то для любого выбора числа $\varepsilon > 0$ и элементов $u_1, \ldots, u_n$ из U существует конечное число точек $t_1, \ldots, t_m$ из T и действительных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_m$ так, что имеют место следующие соотношения:*

α) $\sum_{i=1}^m | \mu_i | = K$, где K — наименьшая постоянная, определенная неравенством (3);

β) $p(u_j) = \sum_{i=1}^m \mu_i g(u_j, t_i)$ $(j = 1, \ldots, n)$;

γ) для любых $u \in U$ имеем $| p(u) - \sum_{i=1}^m \mu_i g(u, t_i) | < \varepsilon$.

Замечание. Отметим, что при доказательстве теоремы 1 мы не используем условие в). Однако это условие используется существенно при доказательстве теоремы 4 из [1].

Доказательство. Сначала докажем, что не ограничивая общности, можно предполагать существование элемента $u_0 \in U$ так, чтобы для любого $t \in T$ имело место равенство $g(u_0, t) = 1$. Чтобы доказать это, присоединим к множеству U еще один элемент u_0 и положим для каждого $t \in T$, $g(u_0, t) = 1$. Наделим теперь множество $U_0 = U \cup \{u_0\}$ топологией следующим образом. Будем считать, что множество $V \subset U_0$ открыто, если оно является открытым в U, или объединением множества $\{U_0\}$ с некоторым открытым подмножеством U. В частности, $\{u_0\}$ — открытое множество. Сразу видно, что при этой топологии U_0 — компактное пространство. Рассмотрим пространство X_0 всех функций вида $x_0 = x + ag(u_0, t) = x + a$, где a — действительная постоянная, а $x \in X$. Пусть p — сопряженная функция относительно нерасширенной функции g и l — линейный функционал, определенный равенством (2). Если $K = \| l \|$, то через L обозначим непрерывное линейное продолжение l до пространства $C(T)$, для которого $\| L \| = \| l \| = K$. Это осуществляется легко при помощи теоремы Хана — Банаха. Расширим функцию p, полагая $p(u_0) = L(g(u_0, t)) = L(1)$. Это расширение, очевидно, является сопряженной функцией относительно расширенной функции g, а соответствующий функционал вида (2) имеет ту же самую норму, как l. Без труда проверяется, что расширенная функция p удовлетворяет условиям а), б), г) и д). Итак, мы можем предполагать выполнение следующего условия.

в*) Существет $u_0 \in U$ так, что $g(u_0, t)=1$ для каждого $t \in T$.

Пусть p — сопряженная функция относительно g. Обозначим, как выше, через l функционал (2) с нормой $\|l\|=K$, а через L — его непрерывное продолжение до пространства $C(T)$ с нормой $\|L\|=\|l\|=K$. Представим дальше L как разницу вида $L=L^{+}-L^{-}$ двух позитивных линейных функционалов L^{+} и L^{-}. Притом, L^{+} и L^{-} выбираем так, чтобы было выполнено условие $\|L\|=\|L^{+}\|+\|L^{-}\|=L^{+}(1)+L^{-}(1)$. Как известно [2, стр. 60, следствие 1 и следствие 2]. Это всегда возможно осуществить. Положим для любого $p^{+}(u)=L^{+}(g(u, t))$, $p^{-}(u)=L^{-}(g(u, t))$. Для функций p^{+} и p^{-} можно применить теорему 4 из [1], так как выполняются условия а), б), в)*, г), д). Очевидно, что $p^{+}(u_0)=L^{+}(1)=\|L^{+}\|$, $p^{-}(u_0)=L^{-}(1)=\|L^{-}\|$. Чтобы доказать теорему 1, выберем элементы $u_1, \ldots, u_n$ множества U и положительное число $\varepsilon>0$. К элементам $u_1, \ldots, u_n$ присоединим элемент $u_0 \in U$, для которого $g(u_0, t)=1$. В согласии с теоремой 4 из [1], выберем элементы $t_1, \ldots, t_k$ из T и неотрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ так, чтобы при каждом $u \in U$ имело место неравенство $|p^{+}(u)-\Sigma_{i=1}^{k} \lambda_i g(u, t_i)|<\varepsilon/2$, а также и равенства $p^{+}(u_j)=\Sigma_{i=1}^{m} \lambda_i g(u_j, t_i)$, $(j=0, 1, \ldots, n)$. Выберем дальше элементы $\tau_1, \ldots, \tau_l$ из T и неотрицательные числа $\mu_1, \ldots, \mu_l$ так, чтобы имели место соотношения $|p^{-}(u)-\Sigma_{i=1}^{l} \mu_i g(u, \tau_i)|<\varepsilon/2$ для $u \in U$ и $p^{-}(u_j)=\Sigma_{i=1}^{l} \mu_i g(u_j, t_i)$ $(j=0, 1, \ldots, n)$. Так как $p=p^{+}-p^{-}$, то будем иметь для $u \in U$ неравенство $|p(u)-\Sigma_{i=1}^{k} \lambda_i g(u, t_i)+\Sigma_{i=1}^{l} \mu_i g(u, \tau_i)|<\varepsilon$, а также и равенства $p(u_j)=\Sigma_{i=1}^{l} \lambda_i g(u_j, t_i)-\Sigma_{i=1}^{l} \mu_i g(u_j \tau_i)$ $(j=0, 1, \ldots, n)$. Но $p^{+}(u_0)=L^{+}(1)=\|L^{+}\|=\Sigma_{i=1}^{k} \lambda_i$, $p^{-}(u_0)=L^{-}(1)=\|L^{-}\|=\Sigma_{i=1}^{l} \mu_i$ и $\|L\|=\|L^{+}\|+\|L^{-}\|$, следовательно $\Sigma_{i=1}^{k} \lambda_i+\Sigma_{i=1}^{l} \mu_i=\|L\|$, чем и заканчивается ров, доказательство теоремы 1.

2. Примеры. Изложенные здесь примеры являются аналогами примеров фигурующих в работе [1].

Пусть U — компактное топологическое пространство, а $T=\{0, 1, \ldots, t, \ldots, \infty\}$. Наделим T топологией следующим образом. Будем говорить, что $V \subset T$ — открытое множество, если оно не содержит точку ∞, или (в противном случае), если V содержит все элементы T за исключением, быть может, конечного числа точек. Очевидно, что T является компактным отделимым пространством. Рассмотрим далее последовательность

$$f_0, f_1, \ldots, f_t, \ldots \tag{4}$$

действительных непрерывных функций, определенных на u и удовлетворяющих следующим условиям.

I. Последовательность (4) сходится при каждом фиксированном $u \in U$ к некоторой функции f_{∞}.

II. Существует постоянная M так, что для всех $u \in U$ и $t=0, 1, \ldots$ выполняется неравенство $|f_t(u)| \leq M$.

Положив $g(u, t)=f_t(u)$ для всех $u \in U$ и $t \in T$, легко видеть что g непрерывна на всем множестве $U \times T$, эвентуально за исключением точек вида $(u, \infty) \in U \times T$. Так как g удовлетворяет всем условиям теоремы 1, то для любой сопряженной функции относительно g будет выполняться утверждение этой теоремы. Здесь, как и в примере 1 из [1], рассмотрим частный случай, когда $U=[0, 1]$, $f_0(u) \equiv 1$, $f_t(u)=u^t$ $(t=1, 2, \ldots)$ и

$$f_\infty(u)=\begin{cases}1 & \text{для } u=1.\\ 0 & \text{для } 0\leqq u<1.\end{cases}$$

Очевидно последовательность $f_0, f_1, \ldots, f_t, \ldots$ и функция f_∞ удовлетворяют условиям I и II, так что для любой сопряженной функции относительно функции

$$g(u,t)=\begin{cases}u^t & \text{для } u\in[0,1],\ t=1,2,\ldots,\\ 1 & \text{для } u\in[0,1],\ t=0,\\ 1 & \text{для } u=1,\ t=\infty,\\ 0 & \text{для } u\in[0,1),\ t=\infty,\end{cases} \tag{5}$$

выполняется утверждение теоремы 1. Легко видеть, однако, что каждая абсолютно ограниченная функция p на сегменте $[0, 1]$ (т. е. функция, являющаяся разницей вида $p=p^+-p^-$ двух абсолютно монотонных функций p^+, p^- на этом сегменте) есть сопряженная функция относительно g. Действительно, как известно [1, пример 1], линейные функционалы l^+ и l^-, сопоставляющие каждую линейную комбинацию с действительными коэффициентами вида

$$x(t)=a_1 g(u_1, t)+\cdots+a_n g(u_n, t)\ \ (u_1, \ldots, u_n\in[0, 1],\ t=0, 1, \ldots) \tag{6}$$

(здесь g — функция (5)), числа $l^+(x)=a_1 p^+(u_1)+\cdots+a_n p^+(u_n)$, $l^-(x)=a_1 p^-(u_1)+\cdots+a_n p^-(u_n)$ являются позитивными функционалами. Если L^+ и L^- — позитивные линейные продолжения l^+ и l^- до пространства $C(T)$, то очевидно имеют место неравенства $|L^+(x)|\leqq L^+(|x|)\leqq L^+(1)\sup_{t\in T}|x(t)|$, $|L^-(x)|\leqq L^-(|x|)\leqq L^-(1)\sup_{t\in T}|x(t)|$. Положив $L=L^+-L^-$, будем иметь для всех x вида (6) $L(x)=L^+(x)-L^-(x)=a_1 p^+(u_1)+\cdots+a_n p^+(u_n)-a_1 p^-(u_1)$, $\ldots a_n p^-(u_n=a(u_1)+\ldots+a_n p(u_n)$, следовательно

$$\begin{aligned}|L(x)|=|a_1 p(u_1)+\cdots+a_n p(u_n)|\leqq |L^+(x)|+|L^-(x)|\leqq[L^+(1)\\ +L^-(1)]\sup_{t\in T}|x(t)|,\ =K\sup_{t\in T}|x(t)|,\end{aligned} \tag{7}$$

где $K=L^+(1)+L^-(1)$. Неравенство (7) означает, что p — сопряженная функция относительно g. Из теоремы 1 следует, что если p — абсолютно ограниченная функция на сегменте $[0, 1]$, то при каждом выборе чисел $u_1, \ldots, u_n$ ($u_j\in[0, 1]$) и числа $\varepsilon>0$ можно найти элементы $t_1, \ldots, t_m$ множества $T=\{0, 1, \ldots, t, \ldots, \infty\}$ и действительные числа $\mu_1, \ldots, \mu_m$ так, чтобы в этом частном случае выполнялись условия α), β), γ) теоремы 1. Не ограничивая общности, можем считать, что $t_1<t_2<\cdots<t_m$. При этом условии, если $t_m<\infty$, то линейная комбинация

$$p_m(u)=\mu_1 g(u, t_1)+\cdots+\mu_m g(u, t_m)=\mu_1 u^{t_1}+\cdots+\mu_m u^{t_m} \tag{8}$$

есть алгебраический многочлен, так как $g(u, t_i)=u^{t_i}(i=1, \ldots, m)$. Если $t_m=\infty$, то для всех $u\in[0, 1]$, $g(u, \infty)=0$, так что для $u\in[0, 1)$ (8) принимает вид

$$p_m(u)=\mu_1 u^{t_1}+\cdots+\mu_{m-1} u^{t_{m-1}}, \tag{9}$$

т. е. p_m есть алгебраический многочлен. Итак, многочлен (8) (при $t_m<\infty$), или (9) (при $t_m=\infty$), аппроксимирует p равномерно на промежутке $[0, 1)$ с точностью ε. Очевидно, что p_m аппроксимирует p равномерно и на сегменте

$[0, 1]$ с той же самой точностью, так что, не нарушая точности равномерной аппроксимации, мы можем вычеркнуть в правой стороне (8) слагаемое, для которого $t_m = \infty$. Притом, если $u_j < 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, равенство β) будет выполняться и после вычеркивания члена $\mu_m g(u_j, \infty) = 0$, а равенство α) переходит в неравенство. Окончательно получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $p: [0, 1] \to R^1$ — абсолютно ограниченная функция, т. е. p можно представить в виде разницы двух абсолютно монотонных функций на этом сегменте. Пусть далее X — пространство всех функций x вида* (6), *l — линейный функционал вида* (2), *определенный на X, а K — наименьшее число, для которого выполняется неравенство* (7). *При этих условиях и обозначениях для любого выбора чисел $u_1, \ldots, u_n$ из промежутка* $[0, 1)$ *и числа $\varepsilon > 0$ существует алгебраический многочлен вида* (8), *для которого выполняются следующие условия:*

α') $\sum_{i=1}^{m} |\mu_i| \leqq K$;

β') $p(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i u_j^{t_i}$ $(j = 1, \ldots, n)$;

γ') *неравенство* $|p(u) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i u^{t_i}| < \varepsilon$ *выполняется равномерно на сегменте* $[0, 1]$.

Следующий пример аналогичен примерам 2 и 3 из [1].

Пусть $\Phi: [0, \infty) \to R^1$ — непрерывная со свойством $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = A$. Положим $U = T = [0, \infty]$ и наделим сегмент $[0, \infty]$ одноточечной компактификацией топологии в R^1. Введем далее функцию $g: [0, \infty] \times [0, \infty] \to R^1$ следующим образом:

$$g(u, t) = \begin{cases} \Phi(ut) & \text{для } 0 \leqq u < \infty,\ 0 \leqq t < \infty, \\ A & \text{для } 0 < u \leqq \infty,\ t = \infty, \\ A & \text{для } u = \infty,\quad t \leqq t < \infty, \\ \Phi(0) & \text{для } u = 0,\quad t = \infty. \end{cases} \tag{10}$$

Сразу видно, что g удовлетворяет условиям а), б), г), д), т. е. удовлетворяет условиям теоремы 1.

Пусть теперь $\sigma: [0, \infty) \to R^1$ — функция с ограниченной вариацией, т. е. $V_\sigma([0, \infty)) = \lim_{t\to\infty} V_\sigma([0, t]) < \infty$. Рассмотрим функцию p, заданную следующим образом:

$$p(u) = \int_0^\infty \Phi(ut)\, d\sigma(t). \tag{11}$$

Очевидно, что в (11) интеграл сходится для любого $u \in [0, \infty)$. Положив

$$a = \lim_{t\to 0} \sigma(t) - \sigma(0), \quad b = \lim_{t\to\infty} \sigma(t) - \lim_{t\to 0} \tau(t), \tag{12}$$

легко видеть, что

$$p(0) = \lim_{u\to 0} p(u) = \Phi(0) \int_0^\infty d\sigma(t) = \Phi(0)[a + b],\ \lim_{u\to\infty} p(u) = \Phi(0)a + Ab. \tag{13}$$

Обозначим через $\bar{p}$ функцию $\bar{p}: [0, \infty] \to R^1$, определенную при каждом $u \in [0, \infty]$ равенством

$$\bar{p}(u) = \begin{cases} p(u) & \text{для } 0 \leqq u < \infty \\ A \int_0^\infty d\sigma(t) & \text{для } u = \infty \end{cases}$$

Проверим, что $\bar{p}$ есть сопряженная функция относительно определенной в (10) функции g. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа и $u_1 < \cdots < u_n$ — элементы множества $U = [0, \infty]$. Если $u_n < \infty$, будем иметь

$$|a_1 \bar{p}(u_1) + \cdots + a_n \bar{p}(u_n)| = |a_1 p(u_1) + \cdots + a_n p(u_n)| = |\int_0^\infty [a_1 \Phi(u_1, t) +$$

$$\cdots + a_n \Phi(u_n t)] d\sigma(t)| \leqq V_\sigma([a, \infty)) \sup_{0 \leqq t < \infty} |a_1 g(u_1, t) + \cdots + a_n g(u_n, t)|,$$

где g означает функцию (10). Пусть теперь $u_n = \infty$. Тогда $\bar{p}(u_n) = A \int_0^\infty d\sigma(t)$ и $g(u_n, t) = A$ для любого $t \in T$, так что и в этом случае будем иметь

$$|a_1 \bar{p}(u_1) + \cdots + a_n \bar{p}(u_n)| \leqq V_\sigma([0, \infty)) \sup_{t \in T} |a_1 g(u_1, t) + \cdots + a_n g(u_n, t)|.$$

Итак, $\bar{p}$ — сопряженная функция относительно g. Имея в виду, что $\bar{p}(u) = p(u)$ для $u \in [0. \infty)$, а также теорему 1, можно утверждать, что для любого выбора числа $\varepsilon > 0$ и чисел $u_1, \cdots, u_n$ $(u_j \in [0, \infty))$ можно найти конечное число точек $t_1 < \cdots < t_m$ $(0 \leqq t_i \leqq \infty)$ и вещественных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_m$ так, чтобы выполнялись соотношения

α'') $\Sigma_{i=1}^m |\mu_i| = V_\sigma([0, \infty))$;

β'') $p(u_j) = \Sigma_{i=1}^m \mu_i g(u_j, t_i)$ $(j = 1, \ldots, n)$, где g — функция, определенная равенством (10);

γ'') для любого $u \ni (0, \infty)$ имеет место неравенство

$$|p(u) - \Sigma_{i=1}^m \mu_i g(u, t_i)| < \varepsilon.$$

В рассматриваемом здесь примере мы можем уточнить утверждение теоремы. 1. Именно, легко доказать следующее предложение.

Если $\Phi(0)a \neq 0$ и $\Phi(0) \neq A$, а $t_1 < \cdots < t_m$ — узлы, фигурирующие в формулах β'') и γ''), то для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем $t_1 = 0$, а соответствующая масса μ_1 удовлетворяет неравенству

$$|a - \mu_1| \leqq \varepsilon \frac{|\Phi(0)| + |A|}{|\Phi(0) - A| \, |\Phi(0)|}.$$

Допустим существование произвольно малых $\varepsilon > 0$ так, чтобы $t_1 \neq 0$. Положив в γ'') последовательно $u = 0$ и $u \to \infty$ и имея в виду (13), получаем для таких $\varepsilon > 0$ неравенства $|\Phi(0) a + \Phi(0) b - (\mu_1 + \cdots + \mu_m) \Phi(0)| < \varepsilon$, $|\Phi(0)a + Ab - (u_1 + \cdots + \mu_m)A| \leqq \varepsilon$ (напомним, что $A = \lim_{x \to \infty} \Phi(x)$, а числа a и b определяются в (12)). Первое из этих неравенств дает неравенство $|a + b - (\mu_1 + \cdots + \mu_m)| < \varepsilon / |\Phi(0)|$. Из второго неравенства получаем очевидные соотношения

$$\varepsilon \geqq |\Phi(0)a + Ab - (\mu_1 + \cdots + \mu_m)A| = |(\Phi(0) - A)a - (\mu_1 + \cdots + \mu_m - a - b)A|$$
$$\geqq |(\Phi(0) - A)a| - |A| \, |a + b - (\mu_1 + \cdots + \mu_m)|$$

или $|(\Phi(0) - A)a| \leqq \varepsilon + |A| \varepsilon / |\Phi(0)|$, откуда $\varepsilon \geqq |\Phi(0) a (\Phi(0) - A)| / |\Phi(0)| + |A|$. Последнее неравенство противоречит нашему допущению о существовании произвольно малых $\varepsilon > 0$, для которых $t_1 \neq 0$. Итак, для достаточно малых $\varepsilon > 0$, а именно $\varepsilon < |\Phi(0) a (\Phi(0) - A)| / (|\Phi(0)| + |A|)$, имеем $t_1 = 0$. Оценим теперь $|a - \mu_1|$ при предположении, что $t_1 = 0$. Очевидно $\lim_{u \to \infty} p(u, t_1) = \lim_{u \to \infty} g(u, 0) = \Phi(0)$, $\lim_{u \to \infty} g(u, t_i) = A$ для $i = 2, \ldots, m$, так что из γ'') получаем при $u \to \infty$ соотношения

$$\varepsilon \geq |\Phi(0)a+Ab-\mu_1\Phi(0)-(\mu_2+\cdots+\mu_m)A| = |\Phi(0)a+Ab-\mu_1\Phi(0)$$
$$-[a+b-\mu_1+(\mu_1+\cdots+\mu_m-a-b)]A| = |(\Phi(0)-A)\,a-(\Phi(0)-A)\,\mu_1$$
$$-(\mu_1+\cdots+\mu_m-a-b)A| \geq |\Phi(0)-A|\,|a-\mu_1|-\varepsilon|A|\,/\,|\Phi(0)|,$$

откуда следует, что $|a-\mu_1| \leq \varepsilon(|\Phi(0)|+|A|)/|\Phi(0)-A|\,|\Phi(0)|$. Добавим, что если $a=0$, мы не можем утверждать, что $t_1=0$ для всех достаточно малых $\varepsilon>0$. Однако, если $t_1=0$, то ясно, что для μ_1 имеет место верхнее неравенство.

Можно доказать также, что с уменьшением числа $\varepsilon>0$ уменьшаются и массы, сосредоточенные в бесконечно удаленном узле. Точнее докажем, что если $\Phi(0)\neq A$ и $t_m=\infty$, то соответствующая масса μ_m удовлетворяет неравенству $|\mu_m|<2\varepsilon/|\Phi(0)-A|$.
Действительно, если $t_m=\infty$, то из γ'') получаем при $u\to 0$

$$|\Phi(0)\,(a+b)-(\mu_1+\cdots+\mu_{m-1})\Phi(0)-\mu_m A| \leq \varepsilon,$$

откуда $|\Phi(0)\,(a+b-\mu_1-\cdots-\mu_m)+\mu_m(\Phi(0)-A)| \leq \varepsilon$. Если $\Phi(0)=0$, то $|\mu_m| \leq \varepsilon/|\Phi(0)-A| < 2\varepsilon/|\Phi(0)-A|$. Если $\Phi(0)\neq 0$, то как нам уже известно, $|a+b-\mu_1-\cdots-\mu_m|<\varepsilon/|\Phi(0)|$, или окончательно

$$|\mu_m(\Phi(0)-A)|-\varepsilon<\varepsilon, \text{ или } |\mu_m| \leq 2\varepsilon/|\Phi(0)-A|.$$

Если в β'') и γ'') все $u_1,\ldots,u_n$ положительны и меньше бесконечности, то при $t_m<\infty$ имеем $g(u_j,t_i)=\Phi(u_j,t_i)$ для $j=1,\ldots,n$ и $i=1,\ldots,m$. Если $t_m=\infty$, то $g(u_j,t_m)=A$ для $j=1,\ldots,n$. Имея в виду это, можно сформулировать окончательно следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $\Phi:[0,\infty)\to R^1$ — непрерывная функция со свойством $\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=A$. Пусть дальше $\sigma:[0,\infty)\to R^1$ — функция с ограниченной вариацией $V_\sigma([0,\infty))$. Положим для $u\in[0,\infty)$, $p(u)=\int_0^\infty\Phi(ut)d\sigma(t)$. При этих условиях для любого выбора числа $\varepsilon>0$ и чисел $0<u_1<\cdots<u_n<\infty$ существует конечное число узлов $t_1<\cdots<t_m$ ($t_i\in[0,\infty]$) и действительных чисел $\mu_1,\ldots,\mu_m$* так, что имеют место соотношения

α''') $\sum_{i=1}^m|\mu_i|=V_\sigma([0,\infty))$;

β''') $p(u_j)=\sum_{i=1}^m\mu_i\Phi(u_j t_i)$ $(j=1,\ldots,n)$; *(здесь при $0<u<\infty$ и $t_m=\infty$ мы положили для единства обозначений $A=\Phi(ut_m)$)*;

γ''') *для любого $u\in[0,\infty)$ имеет место неравенство*

$$|p(u)-\sum_{i=1}^m\mu_i\Phi(ut_i)|<\varepsilon$$

(здесь при $u=0$ и $t_m=\infty$ мы положили $\Phi(0)=\Phi(ut_m)$). Притом, если $a=\lim_{t\to 0}\sigma(t)-\sigma(0)$ и $\Phi(0)\,a\,(\Phi(0)-A)\neq 0$, то для каждого $\varepsilon<|\Phi(0)\,a\,(\Phi(0)-A)|\,/\,(|\Phi(0)|+|A|)$ имеют место сооотношения $t_1=0$ и

$$|a-\mu_1| \leq \varepsilon(|\Phi(0)|+|A|)\,/\,|\Phi(0)-A|\,|\Phi(0)|.$$

Последнее неравенство имеет место и в случае, когда $a=0$, но при условии, что $t_1=0$.

Если $t_m=\infty$ и $\Phi(0)\neq A$, то $|\mu_m|<2\varepsilon/|\Phi(0)-A|$.

Рассмотрим теперь частный случай, когда $\Phi(x)=e^{-x}$ для $x\in[0,\infty)$. В этом случае положим

$$p(u)=\int_0^\infty e^{-ut}\,d\sigma(t), \tag{14}$$

где σ — функция с ограниченной вариацией на промежутке $[0, \infty)$. Очевидно, что каждая из этих функций абсолютно ограничена на промежутке $[0, \infty)$, т. е. допускает разложение в виде разницы двух абсолютно монотонных функций p^+ и p^- на этом промежутке. Притом, функция $q:[0, \infty) \to R^1$ абсолютно монотонна, если она непрерывна в точке $u=0$ и если удовлетворяет условиям $(-1)^n q^{(n)}(u) \geqq 0$ для всех $u \in (0, \infty)$.

Так как функция $\Phi(x)=e^{-x}$ удовлетворяет условиям теоремы 3, то для любой абсолютно ограниченной функции выполняются и утверждения этой теоремы. Отметим также, что в нашем случае имеем $A=\lim_{x\to\infty} \Phi(x) =\lim_{x\to\infty} e^{-x}=0$, следовательно, если $t_m=\infty$, то не нарушая равенство в правой стороне $\beta''')$, можно вычеркнуть слагаемое $\mu_m \Phi(u_j, t_m)$. Очевидно, что вычеркнув $|\mu_m|$ в $\alpha''')$, мы уменьшим левую сторону так, что равенство перейдет в неравенство. Отметим, наконец, что при $t_m=\infty$ и $u \in (0, \infty)$ мы можем вычеркнуть в $\gamma''')$ нулевой член $\mu_m \Phi(u\infty)=0$. Полученная после вычеркивания сумма аппроксимирует p с точностью ε на интервале $(0, \infty)$. Но эта сумма, также как и p, непрерывна в точке $u=0$, так что она аппроксимирует p с той же самой точностью и на промежутке $[0, \infty)$. Имея в виду сказанное выше, мы можем высказать следующую теорему, как непосредственное следствие теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть $p:[0, \infty) \to R^1$ — абсолютно ограниченная функция, т. е. p имеет интегральное представление* (14), *где $\sigma:[0, \infty)\to R^1$ — функция с ограниченной вариацией V_σ* ([0, ∞)). *При этих условиях для любого выбора числа $\varepsilon>0$ и чисел $0<u_1<\cdots<u_n<\infty$ существует конечное число узлов $0\leqq t_1<\cdots<t_m<\infty$ и действительных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_m$ так, что имеют место соотношения*

1) $\sum_{i=1}^m |\mu_i| \leqq V_\sigma([0, \infty)]$;

2) $p(u_j)=\sum_{i=1}^m \mu_i e^{-u_j t_i}$ $(j=1, \ldots, n)$;

3) *для любого $u \in [0, \infty)$ выполняется неравенство*

$$\left|p(u)-\sum_{i=1}^m \mu_i e^{-ut_i}\right|<\varepsilon.$$

Притом, если $t_1=0$ (а это равенство выполняется, например, когда $a\neq 0$ и $\varepsilon<|a|$), то $|a-\mu_1|\leqq\varepsilon$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Чакалов, Е. Димитров. Интерполяционные процессы, равномерно сходящиеся к позитивным функциям. *Плиска*, 1, 1977, 3—20.

2. Н. Бурбаки. Интегрирование. Москва, 1967.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 12. 7. 1978