Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О БАЗИСАХ ТОЖДЕСТВ АЛГЕБР ГРАССМАНА

АТАНАСА Н. СТОЯНОВА - ВЕНКОВА

Решается задача о нахождении базиса тождеств алгебры Грассмана над конечномерным линейным пространством.

Пусть K — произвольное поле, E — бесконечномерное линейное пространство, а E_n — линейное пространство размерностью n над K. Обозначим через G алгебру Грассмана пространства E и через G_n — алгебру Грассмана пространства E_n.

В [1] показано, что если K — поле нулевой характеристики, то тождество $[x_1, x_2, x_3]=0$ является базисом тождеств алгебры G, а в работе [2] П. Н. Сидерова доказано, что если поле K имеет положительную характеристику p, то базисом тождеств алгебры G являются тождества $x_1^p=0$ и $[x_1, x_2, x_3]=0$. Естественно, возникает задача о нахождении базиса тождеств алгебры G_n.

Введем обозначение $(x_1 \circ x_2)=x_1x_2+x_2x_1$;

$$(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_k)=(x_1 \circ x_2 \cdots \circ x_{k-1})\, x_k+x_k\,(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{k-1}).$$

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. *Пусть E_n — любое n-мерное линейное пространство над произвольным полем K произвольной характеристики и G_n — алгебра Грассмана пространства E_n. Следующие тождества являются базисом тождеств, выполняющихся в алгебре G_n:*

A. $x_1^2=0$ *и* $x_1x_2\ldots x_{n+1}=0$ *если* $\operatorname{char} K=2$;

B. $x_1^p=0$, $[x_1, x_2, x_3]=0, (x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_{n/2}+1)=0$, *если* $\operatorname{char} K=p>2$ и n— четное число;

C. $x_1^p=0, [x_1, x_2, x_3]=0, x_{(n+3)/2}(x_1 \circ x_2 \circ \cdots x_{(n+1)/2}=0, (x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{(n+1)/2}) \times x_{(n+3)2}=0$ и $\Pi_{j=1}^s [x_{2j-1}, x_{2j}]\, x_{2j-1}^{p-1}\, x_{2i}^{p-1}=0$, *где* $s=(n+1)/2(2p-1)$, *если* $\operatorname{char} K=>2$ *и* n — *нечетное число*;

D. $[x_1, x_2, x_3]=0$ *и* $(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{n\,2+1})=0$, *если* $\operatorname{char} K=0$ *и* n — *четное число*;

E. $[x_1, x_2, x_3]=0$, $x_{(n+3)/2}(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{(n+1)/2})=0$ *и* $(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{(n+1)/2}) \times x_{(n+3)\,2}=0$, *если* $\operatorname{char} K=o$ *и* n — *нечетное число.*

Замечание. Если число $n+1$ не делится на $2p-1$, то в случае C тождество $\Pi_{j=1}^s [x_{2j-1}, x_{2j}]\, x_{2j-1}^{p-1}\, x_{2j}^{p-1}=0$ не входит в базис.

Доказательство. Хорошо известно, что $[x_1, x_2, x_3]=0$ является тождеством любой алгебры Грассмана. В работе [2] показано, что если $\operatorname{char} K=p>0$, то тождество $x_1^p=0$ удовлетворено в алгебре G, а, следовательно, и в алгебрах G_n для любого натурального числа n.

Доказательство утверждения А тривиально. Из тождества $x_1^2=0$ следует антикоммутативность, которая ($\operatorname{char} K=2$) эквивалентна коммутативности. Легко заметить также, что алгебра G_n имеет класс нильпотентности $n+1$.

Пусть — U_n T-идеал в $K[x]$, порожденный полиномами x_1^2 и $x_1x_2\ldots x_{n+1}$, пусть также $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ — полином из $K[x]$, существенно зависящий от всех своих неизвестных. Тогда $f\equiv\alpha x_1x_2\ldots x_q \pmod{U_n}$, $\alpha\in K$. Если $f\notin U_n$, то $\alpha\neq 0$ и $q\leq n$. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства E_n, тогда $f(e_1, e_2, \ldots, e_q)=\alpha e_1e_2\ldots e_q\neq 0$ и f не является тождеством алгебры G_n.

Доказательство теоремы в случае $\operatorname{char} K=p>2$ основано на следующих утверждениях.

Лемма 1. *Пусть — U T-идеал алгебры $K[x]$, порожденный полиномом $[x_1, x_2, x_3]$. Выполнены следующие тождества:*

$$[x_1, x_2]x_3\equiv x_3[x_1, x_2] \pmod{U}, \tag{1}$$

$$[x_1, x_2][x_3, x_4]\equiv -[x_1, x_4][x_3, x_2] \pmod{U}, \tag{2}$$

$$[x_1, x_2][x_3, x_2]\equiv 0 \pmod{U}, \tag{3}$$

$$[x_1, x_i]fx_jx_1g\equiv[x_1, x_i]fx_1x_jg \pmod{U}, \tag{4}$$

$$[x, y^\beta]\equiv\beta[x, y]y^{\beta-1} \pmod{U}. \tag{5}$$

Доказательство тождеств (2) и (5) основано на хорошо известном тождестве $[xy, z]=x[y, z]+[x, z]y$. Остальные тождества легко следуют друг от друга.

Лемма 2. А. *Если n — четное число, $f(x)=0$ — полилинейное тождество алгебры G_n, y — неизвестное, которое не встречается в записи полинома $f(x)$, то $(f(x)\circ y)=0$ — тождество алгебры G_{n+2}.*

В. *Если n — натуральное число и $f(x)=0$ — полилинейное тождество алгебры G_n, y — неизвестное, которое не встречается в записи $f(x)$, то $f(x)y=0$ и $yf(x)=0$ — тождества алгебры G_{n+1}.*

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства E_n. Будем называть элементы алгебр Грассмана полиномами, а элементы вида $e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k}$ мономами. Моном $e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k}$ будем называть четным, если k — четное число, и нечетным, если k — нечетное число.

Из полилинейности вытекает, что $(f(x)\circ y)=0$ будет тождеством алгебры G_{n+2}, если оно удовлетворяется при произвольной замене неизвестных мономами из G_{n+2}. Пусть $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Положим $x_i=u_i$, ($i=1, 2, \ldots, k$), $y=v$, где все u_i и v — мономы из G_{n+2}. Из свойств алгебр Грассмана и полилинейности $f(x)$ вытекает, что $f(u_1, u_2, \ldots, u_k)=0$ или $f(u_1, u_2, \ldots, u_k)=\alpha e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_s}$, где $\alpha\in K$, $k\leq s\leq n+2$ и $i_1<i_2<\cdots<i_s$. Если $s\leq n$, то $\alpha=0$, так как $f(x)=0$ — тождество алгебры G_n. Если $s=n+2$, то $(f(u_1, u_2, \ldots, u_k)\circ v)=0$, так как в запись $f(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ входят все базисные элементы E_{n+2} и при любом выборе v некоторое e_i, ($1\leq i\leq n+2$) встретится второй раз. Пусть, наконец, $s=n+1$ и $f(u_1, u_2, \ldots, u_k)=\alpha e_1\ldots e_{t-1}e_{t+1}\ldots e_{n+2}$. Тогда тоже $(f(u_1, u_2, \ldots, u_k)\circ v)=0$. Действительно, если $v=l_t$, то утверждение следует из того, что $f(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ и v являются нечетными мономами и если $v\neq l_t$, то для некоторого i, ($1\leq i\leq n+2$), e_i встретится второй раз. Этим показано, что $(f(x)\circ y)=0$ тождество алгебры G_{n+2}.

Утверждение В леммы доказывается аналогично утверждению А.

Так как $(x_1 \circ x_2)=0$ тождество алгебры G_2, непосредственно из леммы 2 вытекает

Следствие 3. A. *Если n — четное число, то $(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{(n+1/2)})=0$ — тождество алгебры G_n.*

B. *Если n — нечетное число, то $x_{(n+3)/2}(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{(n+1)/2}=0$ и $(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{(n+1)/2}\, x_{(n+3)/2}=0$ — тождества алгебры G_n.*

Лемма 4. *Пусть n — четное число и V_n — T-идеал $K[x]$, порожденный полиномами x_1^p, $[x_1, x_2, x_3]$ и $(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{n/2+1})$. Выполнены следующие тождества:*

(6) $(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_s)\, x_{s+1} \ldots x_{n-s+2} \equiv 0 \pmod{V_n}$ *для* $1 \leqq s \leqq n/2+1$;

$$x_1 x_2 \ldots x_{n+1} \equiv 0 \pmod{V_n}; \tag{7}$$

$$x_1^{n/2+1} \equiv 0 \pmod{V_n}. \tag{8}$$

Доказательство. Тождество (6) докажем нисходящей индукцией по s. Если $s=n/2+1$, получим очевидное тождество $0(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{n/2+1}) \equiv 0 \pmod{V_n}$. Пусть $(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_s \circ x_{s+1})\, x_{s+2} \ldots x_{n-s+1} \equiv 0 \pmod{V_n}$. Обозначим $(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_s)=u$, $x_{s+2} \ldots x_{n-s+1}=v$, тогда $ux_{s+1}v \equiv -x_{s+1}uv \pmod{V_n}$. Если положим $x_{s+1}=yz$, где y и z — новые неизвестные, то $uyzv \equiv -yzuv \equiv yuzv \equiv -uyzv \pmod{V_n}$. Так как $\operatorname{char} K \neq 2$, то $uyzv \equiv 0 \pmod{V_n}$. Пусть ξ — эндоморфизм в $K[x]$, такой, что

$$x_i\xi=\begin{cases} x_i & \text{для } i=1, 2, \ldots, s; \\ x_{i+1} & \text{для } i=s+2, \ldots, n-s+1; \end{cases} \quad y\xi=x_{s+1}; \quad z\xi=x_{s+2}.$$

При помощи эндоморфизма ξ из последнего тождества получаем (6).

Тождество (7) получается из (6) при $s=1$. Тождество (8) получается из тождества $(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{n/2+1}) \equiv 0 \pmod{V_n}$, если $x_1=x_2=\cdots=x_{n/2+1}$.

Пусть M — множество полиномов вида

$$u_\lambda=\prod_{k=1}^{t_\lambda} x_{i_k}^{\alpha_k} \cdot \prod_{l=1}^{s_\lambda} [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}]\, x_{j_{2l-1}}^{\beta_{2l-1}-1}\, x_{j_{2l}}^{\beta_{2l}-1}, \tag{9}$$

где $i_1<i_2<\cdots<i_{t_\lambda}$; $j_1<j_2<\cdots<j_{2s_\lambda}$;

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_{t_\lambda}\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_{2s_\lambda}\}=\Phi.$$

Определение 5. *Если u_1 и u_2 — два элемента из M, будем говорить что $u_1>u_2$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

а) $\deg u_1<\deg u_2$;

б) $\deg u_1=\deg u_2$, *но в записи полинома u_2 участвуют больше коммутаторов, чем в записи полинома u_1;*

в) $\deg u_1=\deg u_2$; *в записи полиномов u_1 и u_2 участвует одинаковое число коммутаторов; существует индекс $i \geqq 1$, такой, что для каждого $j<i$, $\deg_{x_j} u_1=\deg_{x_j} u_2$, но $\deg_{x_i} u_1<\deg_{x_i} u_2$;*

г) $\deg u_1=\deg u_2$; *в записи полиномов u_1 и u_2 участвует одинаковое число коммутаторов; для каждого $i \geqq 1$, $\deg_{x_i} u_1=\deg_{x_i} u_2$; существует индекс $j \geqq 1$, такой, что для каждого $i \leqq j$ x_i встречается в коммутаторе элемента u_1 тогда и только тогда, когда x_i встречается в коммутаторе элемента u_2, но x_j встречается в коммутаторе элемента u_1 и не встречается в коммутаторе элемента u_2.*

Таким образом множество M линейно упорядочено.

Лемма 6. *Пусть n — четное число и $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ — полином из $K[x]$, существенно зависящий от всех своих неизвестных. По модулю V_n, $f(x)$ сравним с линейной комбинацией полиномов u_λ $(\lambda \in \Lambda)$ из M, где для каждого u_λ имеем $t_\lambda+2_{s_\lambda}=q$; α_k, $\beta_l-1<\min\{p, n/2+1\}$ для $1\leqq k\leqq t_\lambda$ и $1\leqq l\leqq 2s_\lambda$; $\deg u_\lambda=a_\lambda\leqq n$; если $b_\lambda=a_\lambda-2s_\lambda$, то $b_\lambda\leqq n-a_\lambda$.*

Доказательство. Так как $x_2x_1=x_1x_2-[x_1, x_2]$, то применяя тождества леммы 1, получим, что по модулю V_n $f(x)$ сравним с линейной комбинацией полиномов вида (9). В V_n содержатся полиномы x_1^p и $x_1^{n/2+1}$, следовательно в линейной комбинации можно пропустить те члены, в которых для некоторого k, $(1\leqq k\leqq t_\lambda)$, $\alpha_k\geqq\min\{p, n/2+1\}$ или для некоторого l, $(1\leqq l\leqq 2s_\lambda)$, $\beta_l-1\geqq\min\{p, n/2+1\}$. Из тождества 7 леммы 4 вытекает, что можно пропустить и все полиномы вида (9), степень которых выше n. Для полного доказательства леммы достаточно показать, что по модулю V_n каждый полином из M, не содержащийся в T-идеале V_n, можно записать как линейную комбинацию полиномов того же вида, для которых выполнены все требования леммы 6.

Пусть u (9) — элемент из M, не содержащийся в V_n, $\deg u=a$, $b=a-2s>n-a$ и в u участвуют неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_q$. Так как числа a и b одинаковой четности и число n четно, то $b\geqq n-a+2$. Нетрудно показать, что

$$(x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_b)\,x_{b+1}\ldots x_a\equiv 0(\operatorname{mod} V_n). \tag{10}$$

Действительно, если $b\geqq n/2+1$, (10) очевидно выполнено; если $b<n/2+1$ то тождество (10) — следствие тождества (6) леммы 4, так как $a\geqq n-b+2$ Из тождества (10) вытекает, что полином

$$\bar{u}=(x_1\circ x_1\circ\cdots\circ x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_q)\,\Pi_{l=1}^{s}[x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}]\equiv 0\,(\operatorname{mod} V_n),$$

где $\{i_1, \ldots, i_t\}\cup\{i_1, \ldots, j_{2s}\}=\{1, \ldots, q\}$; $\deg_{x_{i_k}}\bar{u}=\alpha_k$; $\deg_{x_{j_l}}\bar{u}=\beta_l$, для $1\leqq k\leqq t$ и $1\leqq l\leqq 2s$. Применяя тождества (1) и (4) леммы 1, элемент u можно записать как

$$u\equiv x_1x_1\ldots x_1x_2\ldots x_q\,\Pi_{l=1}^{s}[x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}]\,(\operatorname{mod} V_n),$$

где вне коммутаторов все неизвестные входят в восходящий порядок, притом каждое x_{i_k}, $(1\leqq k\leqq t)$ α_k раз и каждое x_{j_l}, $(1\leqq l\leqq 2s)$ β_l-1 раз.

Так как $(u\circ x)=2ux+[x, u]$, то антикоммутатор из записи полинома $\bar{u}$ можно записать следующим образом:

$$(x_1\circ x_1\circ\cdots\circ x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_q)=2^{b-1}x_1x_1\ldots x_1x_2\ldots x_q+v(x),$$

где $v(x)$ — полином из T-идеала $\{[x_1, x_2]\}^T$. Тогда

$$u\equiv u-\frac{1}{2^{b-1}}\bar{u}\equiv\frac{1}{2^{b-1}}v(x)\,.\,\Pi_{l=1}^{s}[x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}]\,(\operatorname{mod} V_n).$$

Применяя простые свойства коммутаторов и тождества леммы 1, получим, что u можно записать как линейную комбинацию элементов u_ν, $(\nu\in N)$ из M такие, что для каждого из них $b_\nu<b$. Повторяя те же преобразования достаточно число раз, получим утверждение леммы.

Полином $g\in G_n$ будем называть четным, если он является линейной комбинацией четных мономов, и нечетным, если он линейная комбинация нечетных мономов. Обозначим через C_n множество четных полиномов из G_n и через H_n — множество нечетных полиномов из G_n. Каждый элемент $g \in G_n$ записывается в виде $g = c + h$, где $c \in C_n$ и $h \in H_n$.

Лемма 7. *Если $g = c + h$, $(c \in C_n, h \in H_n)$ и k — натуральное число, то*

$$g^k = c^k + kc^{k-1} h. \tag{11}$$

Если $g_1 = c_1 + h_1$ и $g_2 = c_2 + h_2$, где $c_1, c_2 \in C_n$ и $h_1, h_2 \in H_n$, то

$$[g_1, g_2] g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} = 2 c_1^{\beta_1} c_2^{\beta_2} h_1 h_2. \tag{12}$$

Если $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_s u_s$, где u_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ — мономы из G_n и α_i, $(i = 1, 2, \ldots, s)$ элементы поля K, то

$$v^{s+1} = 0. \tag{13}$$

Если $w = e_{i_1} e_{i_2} + \cdots + e_{i_{2s-1}} e_{i_{2s}}$ и при $k \neq l$, $e_{i_k} \neq e_{i_l}$; $(1 \leq k, l \leq 2s)$, то

$$w^s = s!\, e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_{2s-1}} e_{i_{2s}}. \tag{14}$$

Доказательство леммы 7 вытекает из того, что множество C_n содержится в центре алгебры G_n, а если h_1 и h_2 — элементы из H_n, то $h_1 h_2 = -h_2 h_1$. Более подробное доказательство леммы можно найти в [2].

Лемма 8. *Пусть $f(x)$ — полином, существенно зависящий от всех своих неизвестных. Если n — четное число и $f(x)$ — тождество алгебры G_n, то $f(x) \equiv 0 \pmod{V_n}$.*

Доказательство. По модулю T-идеала V_n полином $f(x)$ можно записать как линейную комбинацию элементов из M, для которых выполнены все условия леммы 6. Допустим, что $f(x) \not\equiv 0 \pmod{V_n}$, тогда в линейной комбинации будут участвовать члены с ненулевыми коэффициентами. Среди них будет старший член относительно введенного нами порядка в M (определение 5). Пусть старший член $\alpha_1 u_1$, где $0 \neq \alpha_1 \in K$ и u_1 — элемент из M. Если $u_1 = \Pi_{k=1}^{t_1} x_{i_k}^{\alpha_k} \cdot \Pi_{l=1}^{s_1} [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] x_{j_{2l-1}}^{\beta_{2l-1}} x_{j_{2l}}^{\beta_{2l-1}}$, то положим в $f(x)$ $x_{i_k} = g_{i_k}$, $x_{j_l} = g_{j_l}$, где $g_{i_k} = c_{i_k}$, $c_{i_k} = e_{i_k 1} e_{i_k 2} + \cdots + e_{i_k 2\alpha_k - 1} e_{i_k 2\alpha_k}$; $g_{j_l} = c_{j_l} + h_{j_l}$, $h_{j_l} = e_{j_l}$ $c_{j_l} = e_{j_l 1} e_{j_l 2} + \cdots + e_{j_l 2\beta_l - 3} e_{j_l 2\beta_l - 2}$ для $1 \leq k \leq t_1$ и $1 \leq l \leq 2s_1$ и все e_{j_l}, $e_{i_k \gamma_k}$, $e_{j_l \delta_l}$, $(1 \leq k \leq t_1$, $1 \leq l \leq 2s_1$, $1 \leq \gamma_k \leq 2\alpha_k$, $1 \leq \delta_l \leq 2\beta_l - 2)$ — различные элементы базиса E_n. Для этой цели нам понадобятся $a_1 + b_1$ различных элементов базиса E_n. Такое число различных элементов в базисе E_n найдутся, так как по лемме 6 $a_1 + b_1 \leq n$. Применяя лемму 7, получим, что после замены значение полинома u_1 будет $\gamma e_1 e_2 \ldots e_{a_1 + b_1} \neq 0$.

Проверим, что произойдет с остальными членами линейной комбинации после замены неизвестных указанными элементами алгебры G_n. Пусть $\alpha_m u_m$ — один из них. Согласно выбору полинома u_1 будем иметь $u_1 > u_m$. Тогда выполнены некоторые из условий определения 5. Пусть

а. $\deg u_1 < \deg u_m$. Так как все эти полиномы написаны одними и теми же неизвестными, то существует неизвестное x_r, такое, что $\deg_{x_r} u_1 < \deg_{x_r} u_m$. Рассмотрим четыре случая.

Случай 1. Неизвестное x_r не участвует в коммутаторах полиномов u_1 и u_m. Тогда мы положили $x_r = g_r = c_r$ и в записи полинома c_r число участвующих мономов из G_n равно степени x_r в полиноме u_1. Из предположенного неравенства между степенями и равенством (13) леммы 7 получаем, что после замены полином u_m аннулируется.

Случай 2. Неизвестное x_r не участвует в коммутаторах полинома u_1 и встречается в записи коммутаторов u_m. Тогда u_m аннулируется, так как $x_r = c_r \in C_n$.

Случай 3. x_r встречается в записи коммутатора u_1 и не встречается в коммутаторах u_m. Тогда мы положили $x_r = g_r = c_r + h_r$ и в записи элемента g_r число участвующих мономов из G_n равно степени x_r в u_1. После замены полином u_m аннулируется, как в случае 1.

Случай 4. x_r участвует в коммутаторах обоих полиномов u_1 и u_m. И в этом случае аналогично остальным получаем, что u_m аннулируется.

б. В записи полинома u_m участвует больше коммутаторов, чем в записи u_1. Существует неизвестное x_r, фигурирующее в записи коммутаторов u_m, но не участвующее в записи коммутаторов u_1. В таком случае положили $x_r = c_r \in C_n$ и u_m аннулируется.

в. аналогичен случаю а).

г. аналогичен случаю б).

После замены неизвестных выбранными нами элементами алгебры G_n полином $f(x)$ принимает значение старшего члена $\gamma e_1 e_2 \ldots e_{a_1+b_1} \neq 0$. С другой стороны, полином $f(x)$ — тождество алгебры G_n. Следовательно, $f(x) \equiv 0 \pmod{V_n}$.

Приступим к доказательству утверждения C теоремы 1. Теперь n — нечетное число.

Лемма 9. *Если* $w(x) = \Pi_{j=1}^{s} [x_{2j-1}, x_{2j}]\, x_{2j-1}^{p-1} x_{2j}^{p-1}$, *где* s — *натуральное число* $s \geq (n+1)/2(2p-1)$, *то* $w(x) = 0$ *является тождеством в алгебре* G_n.

Доказательство. Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_{2s}$ — элементы алгебры G_n, такие, что $w(g_1, g_2, \ldots, g_{2s}) \neq 0$. Из того, что C_n содержится в центре алгебры G_n и квадрат любого элемента множества H_n равен нулю, вытекает, что $g_i = c_i + h_i$, где $0 \neq c_i \in C_n$ и $0 \neq h_i \in H_n$ для любого $i = 1, 2, \ldots, 2s$. С помощью леммы 7 находим значение $w(x)$: $w(g_1, g_2, \ldots, g_{2s}) = 2^s c_1^{p-1} c_2^{p-1} c_{2s}^{p-1} h_1 h_2 \ldots h_{2s}$. Для того, чтобы это выражение было различно от нуля, нам нужны не менее $2s(2p-1) \geq n+1$ различные базисные элементы пространства E_n. Следовательно, $w(x) = 0$ — тождество алгебры G_n.

Пусть n — нечетное число и W_n — T-идеал алгебры $K[x]$, порожденный полиномами x_1^p, $[x_1, x_2, x_3]$, $x_{(n+3)/2}(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{(n+1)/2})$, $(x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_{(n+1)/2}) x_{(n+3)/2}$ и $w(x) = \Pi_{j=1}^{s} [x_{2j-1}, x_{2j}]\, x_{2j-1}^{p-1} x_{2j}^{p-1}$, где $s = (n+1)/2(2p-1)$. (Если $n+1$ не делится на $2p-1$, полином $w(x)$ не входит в базис T-идеала W_n.)

Лемма 10. *Имеют место следующие тождества:*

$$(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_s)\, x_{s+1} \ldots x_{n-s+2} \equiv 0 \pmod{W_n}, \quad (1 \leq s \leq (n+1)/2), \tag{15}$$

$$x_1 x_2 \ldots x_{n+1} \equiv 0 \pmod{W_n}, \tag{16}$$

$$x_1^{(n+3)/2} \equiv 0 \pmod{W_n}, \tag{17}$$

$$(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_s)(x_{s+1} \circ \cdots \circ x_t)\, x_{t+1} \ldots x_{n-t+3} \equiv 0 \pmod{W_n}, \tag{18}$$

$$(2 \leq s \leq (n-1)/2), \quad (s+1 \leq t \leq (n+3)/2).$$

Доказательство. Тождества (15), (16) и (17) доказываются аналогично соответствующим тождествам леммы 4. Докажем тождество (18).

Если x, y, z и t такие элементы алгебры $K[x]$, что

$$(19)\qquad \begin{cases} 0\equiv(x\circ y)zt=xyzt+yxzt \pmod{W_n}\\ 0\equiv z(x\circ y)t=zxyt+zyxt \pmod{W_n}\\ 0\equiv[x, y, z]t=xyzt-yxzt-zxyt+zyxt \pmod{W_n},\end{cases}$$

то

$$(20)\qquad 0\equiv x(y\circ z)t\equiv(y\circ z)xt \pmod{W_n}.$$

Действительно, просуммировав все сравнения (19), получим $0\equiv 2xyzt+2zyxt \pmod{W_n}$. Так как $\operatorname{char} K=p\neq 2$, то $xyzt\equiv -zyxt \pmod{W_n}$. Из последнего сравнения и (19) вытекает $xyzt\equiv -zyxt\equiv zxyt\equiv -xzyt \pmod{W_n}$ и $zyxt\equiv -xyzt\equiv yxzt\equiv -yzxt \pmod{W_n}$. Таким образом мы получили сравнения (20).

Из тождества (15) следует, что $(x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_{t-1})x_t x_{t+1}\ldots x_{n-t+3}\equiv 0 \pmod{W_n}$. Аналогичным способом получается также, что $x_t(x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_{t-1})x_{t+1}\ldots x_{n-t+3}\equiv 0 \pmod{W_n}$. Если положим $(x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_{t-2})=x$, $x_{t-1}=y$, $x_t=z$ и $x_{t+1}\ldots x_{n-t+3}=t$, то полиномы x, y, z и t удовлетворяют (19). Согласно доказанному они удовлетворяют также (20). Следовательно,

$$(x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_{t-2})(x_{t-1}\circ x_t)x_{t+1}\ldots x_{n-t+3}\equiv 0 \pmod{W_n} \text{ и}$$

$$(x_{t-1}\circ x_t)(x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_{t-2})x_{t+1}\ldots x_{n-t+3}\equiv 0 \pmod{W_n}.$$

Теперь пусть $(x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_{t-3})=x$, $x_{t-2}=y$, $(x_{t-1}\circ x_t)=z$ и опять $x_{t+1}\ldots x_{n-t+3}=t$. Тем же путем переместим неизвестное x_{t-2} с одного антикоммутатора в другой. Применяя этот процесс достаточное число раз, получим тождество (18).

Лемма 11. *Пусть $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ — полином из $K[x]$, существенно зависящий от всех своих неизвестных. По модулю T-идеала W_n $f(x)$ сравним с линейной комбинацией полиномов u_λ, $(\lambda\in\Lambda)$ из множества M (9), где для каждого u_λ $t_\lambda+2s_\lambda=q$; α_k, $\beta_l-1<\min\{p, (n+3)/2)\}$ за $1\leq k\leq t_\lambda$ и $1\leq l\leq 2s_\lambda$; $\deg u_\lambda=a_\lambda\leq n$ и если $b_\lambda=a_\lambda-2s_\lambda$, то*

I. $b_\lambda\leq n-a_\lambda+1$, *если x_{j_λ}—первое из неизвестных $x_1, \ldots, x_q$ со степенью в u_λ меньше p.*

II. $b_\lambda\leq n-a_\lambda-1$ *во всех остальных случаях.*

Доказательство. То, что $f(x)$ сравним по модулю W_n с линейной комбинацией элементов из M, вытекает из тождеств леммы 1. Из тождеств (16) и (17) леммы 10 видно, что по модулю W_n в линейной комбинации останутся только те элементы u_λ, $(\lambda\in\Lambda)$, для которых $a_\lambda\leq n$ и все степенные показатели неизвестных α_k, $(1\leq k\leq t)$ и β_l-1, $(1\leq l\leq 2s_\lambda)$ меньше $\min(p, (n+3)/2)$.

Покажем, что по модулю W_n каждый полином из M можно записать как линейную комбинацию полиномов того же вида, для которых выполнены все требования леммы 11.

Пусть u — полином из W, не содержащийся в W_n, и такой, что если $\deg u=a$ и $b=a-2s$, то $b>n-a+1$. Так как числа a и b одинаковой четности и n — нечетное число, то из последнего неравенства получаем $b\geq n-a+3$. В таком случае показывается (аналогично доказательству леммы 6), что по модулю W_n полином u равен линейной комбинации полиномов u_ν, $(\nu\in N)$ из M, для каждого из которых $b_\nu\leq n-a_\nu+1$.

Пусть u — полином из M, такой, что $b=n-a+1$. Если $\deg_{x_i} u=p$ для всех $i=1, 2, \ldots, q$, то $u=w(x)\in W_n$ и его исключим из линейной комбинации. Остается рассмотреть тот случай, когда $a=n-b+1$ и хотя бы для одного из неизвестных x_i, $(i=1, \ldots, q)$ имеем $\deg_{x_i} u<p$. Если x_{i_1} — первое из неизвестных $x_1, \ldots, x_q$ со степенью меньше p, то u выполняет все требования леммы 11.

Пусть x_{j_m}, $(1\leqq m\leqq 2s)$ — первое из неизвестных со степенью в полиноме u меньше p. В записи u содержится коммутатор $\varepsilon[x_{j_m}, x_{j_{m+\varepsilon}}]$, $(\varepsilon=\pm 1)$. Обозначим

$$v(x)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j_m}}^{t+2s} x_i^{\gamma_i}\cdot \prod_{\substack{l=1\\ l\neq m/2,\\ (m+\varepsilon)/2)}}^{s} [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}],$$

где $\gamma_i=\beta_i-1$, если x_i встречается в коммутаторах u и $\gamma_i=\alpha_i$, если x_i в коммутаторах u не встречается для всех $i=1, 2, \ldots, q$. Из леммы 1 вытекает, что

$$u\equiv \varepsilon x_{j_m}^{\beta_m-1}[x_{j_m}, x_{j_{m+\varepsilon}}]\,v(x)\equiv \frac{\varepsilon}{\beta_m}[x_{j_m}^{\beta_m}, x_{j_{m+\varepsilon}}]\,v(x)$$

$$=\frac{2\varepsilon}{\beta_m} x_{j_m}^{\beta_m} x_{j_{m+\varepsilon}} v(x)-\frac{\varepsilon}{\beta_m}(x_{j_m}^{\beta_m}\circ x_{j_{m+\varepsilon}})\,v(x) \pmod{W_n}.$$

Если в тождестве (18) леммы 10 поставим $s=\beta_m$, $t=b+2$ и $a=n-b+1$, получится

$$(x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_{\beta_m})(x_{\beta_m+1}\circ\cdots\circ x_{b+2})\,x_{b+3}\ldots x_a\equiv 0 \pmod{W_n} \text{ и}$$

$$(x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_{\beta_m+1})(x_{\beta_m+2}\circ\cdots\circ x_{b+2})\,x_{b+3}\cdots x_a\equiv 0 \pmod{W_n}.$$

Из последних тождеств вытекает, что

$$v_1(x)=x_{j_m}^{\beta_m}(x_{j_{m+\varepsilon}}\circ x_1\circ x_1\circ\cdots x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_q)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq m/2,\\ (m+\varepsilon)/2}}^{s}[x_{j_{2l-1}}), x_{j_{2l}}]\equiv 0 \pmod{W_n}$$

$$v_2(x)=(x_{j_m}^{\beta_m}\circ x_{j_{m+\varepsilon}})(x_1\circ x_1\circ\cdots\circ x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_q)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq m/2,\\ (m+\varepsilon)/2}}^{s}[x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}]\equiv 0 \pmod{W_n}.$$

В полиномах $v_1(x)$ и $v_2(x)$ все неизвестные встречаются в таких степенях, как в полиноме u. Аналогично доказательству леммы 6 получаем, что полиномы

$$v_1(x)=x_{j_m}^{\beta_m} x_{j_{m+\varepsilon}} v(x)+x_{j_m}^{\beta_m}\bar{v}_1(x)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq m/2,\\ (m+\varepsilon)/2}}^{s}[x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}],$$

$$v_2(x)=(x_{j_m}^{\beta_m}\circ x_{j_{m+\varepsilon}})v(x)+(x_{j_m}^{\beta_m}\circ x_{j_{m+\varepsilon}})\bar{v}_2(x)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq m/2,\\ (m+\varepsilon)/2}}^{s}[x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}]$$

$$=(x_{j_m}^{\beta_m}\circ x_{j_{m+\varepsilon}})v(x)+2x_{j_m}^{\beta_m}x_{j_{m+\varepsilon}}\bar{v}_2(x)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq m/2,\\ (m+\varepsilon)/2}}^{s}[x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}]$$

$$-[x_{j_m}^{\beta_m}, x_{j_{m+\varepsilon}}]\bar{v}_2(x) \prod_{\substack{l=1\\ l\neq m/2,\\ (m+\varepsilon)/2}}^{s} [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}],$$

где $\bar{v}_1(x)$ и $\bar{v}_2(x)$ принадлежат T-идеалу, порожденному полиномом $[x_1, x_2]$. Тогда

$$u \equiv u - \frac{2\varepsilon}{\beta_m} v_1(x) + \frac{\varepsilon}{\beta_m} v_2(x) = \Big[-\frac{2\varepsilon}{\beta_m} x_{j_m}^{\beta_m} \bar{v}_1(x) + \frac{2\varepsilon}{\beta_m} x_{j_m}^{\beta_m} x_{j_{m+\varepsilon}} \bar{v}_2(x)$$

$$-\varepsilon [x_{j_m}, x_{j_{m+\varepsilon}}] x_{j_m}^{\beta_m - 1} \bar{v}_2(x)\Big] \prod_{\substack{l=1\\ l\neq m/2,\\ (m+\varepsilon)/2}}^{s} [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] \pmod{W_n}.$$

Применяя к последнему результату хорошо известные свойства коммутаторов и тождества леммы 1, получим, что по модулю W_n можно записать полином u как линейную комбинацию элементов из M, выполняющих все требования леммы 11. Этим лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots x_q)$ — полином, существенно зависящий от всех своих неизвестных. Если n — нечетное число и $f(x) = 0$ — тождество алгебры G_n, то $f(x) \equiv 0 \pmod{W_n}$.*

Доказательство. По модулю T-идеала W_n полином $f(x)$ можно записать как линейную комбинацию элементов множества M, для которых выполнены все требования леммы 11. Допустим, что $f(x) \not\equiv 0 \pmod{W_n}$. Тогда в линейной комбинации будут участвовать члены с ненулевыми коэффициентами. Среди последних будет старший член относительно введенным нами порядком в M (определение 5). Пусть старшим членом является $\alpha_1 u_1$, где $0 \neq \alpha_1 \in K$, $u_1 \in M$ и пусть $\deg u_1 = a_1$ и $b_1 = a_1 - 2s_1$. Рассмотрим два случая.

I. $b_1 \leq n - a_1 - 1$. В этом случае, как в доказательстве леммы 8, можно найти такие элементы g_{i_k}, $(k = 1, 2, \ldots, t_1)$ и g_{j_l}, $(l = 1, 2, \ldots, 2s_2)$ алгебры G_n, что $f(\ldots, g_{i_k}, \ldots; \ldots, g_{j_l}, \ldots) = \gamma e_1 e_2 \ldots e_{a_1+b_1} \neq 0$. Случай I привел нас к противоречию, так как $f(x) = 0$ — тождество алгебры G_n.

II. $b_1 = n - a_1 + 1$. Теперь $t_1 \geq 1$ и x_{i_1} — первое из неизвестных $x_1, \ldots, x_q$, такое, что $\deg_{x_{i_1}} u_1 < p$. Положим в $f(x)$ $x_{i_k} = g_{i_k}$, $x_{j_l} = g_{j_l}$, где

$$g_{i_1} = c_{i_1} + h_{i_1},\quad c_{i_1} = e_{i_1 1} e_{i_1 2} + \cdots + e_{i_1 2\alpha_1 - 3} e_{i_1 2\alpha_1 - 2},\quad h_{i_1} = e_{i_1};$$

$$g_{i_k} = c_{i_k},\qquad c_{i_k} = e_{i_k 1} e_{i_k 2} + \cdots + e_{i_k 2\alpha_k - 1} e_{i_k 2\alpha_k},\quad (2 \leq k \leq t_1);$$

$$g_{j_l} = c_{j_l} + h_{j_l},\quad c_{j_l} = e_{j_l 1} e_{j_l 2} + \cdots + e_{j_l 2\beta_l - 3} e_{j_l 2\beta_l - 2},\quad h_{j_l} = e_{j_l},\ (1 \leq l \leq 2s_1),$$

и все e_{i_1}, $e_{i_k \gamma_k}$, $e_{j_l \delta_l}$, e_{j_l}, $(1 \leq k \leq t_1,\ 1 \leq l \leq 2s_1,\ 1 \leq \gamma_k \leq 2\alpha_k,\ 1 \leq \delta_l \leq 2\beta_l - 2)$ — различные элементы базиса E_n. Для этой цели нам понадобятся $a_1 + b_1 - 1 = n$ различных элементов базиса E_n. Применяя лемму 7, получим:

$$u_1(\ldots, g_{i_k}, \ldots; \ldots, g_{j_l}, \ldots) = 2^s \alpha_1 c_{i_1}^{\alpha_1 - 1} h_{i_1} \prod_{k=2}^{t_1} c_{i_k}^{\alpha_k} \cdot \prod_{l=1}^{s_1} c_{j_{2l-1}}^{\beta_{2l-1}-1} c_{j_{2l}}^{\beta_{2l}-1} h_{j_{2l-1}} h_{j_{2l}}$$

$$= \gamma e_1 e_2 \ldots e_n \neq 0.$$

Проверим, что произойдет с остальными членами линейной комбинации после замены неизвестных с выбранными элементами алгебры G_n. Если $\alpha_m u_m$ —

один из членов линейной комбинации, различный от $\alpha_1 u_1$, то $u_1 > u_m$ и выполнено некоторое из условий определения 5. Пусть

а) $\deg u_1 < \deg u_m$. Тогда $u_m(\ldots, g_{i_k}, \ldots; \ldots, g_{j_l}, \ldots) = 0$. Доказательство проводится аналогично соответствующему случаю леммы 8;

б) в записи полинома u_m участвуют больше коммутаторов, чем в записи u_1. Тогда некоторое из x_{i_k}, $(k = 2, \ldots, t_1)$ участвует в коммутаторах u_m и так как $g_{i_k} = c_{i_k} \in C_n$, то $u_m(\ldots, g_{i_k}, \ldots; \ldots, g_{j_l}, \ldots) = 0$;

в) аналогичен случаю а);

г) Теперь $\deg_{x_i} u_1 = \deg_{x_i} u_m$, для каждого $i = 1, 2, \ldots, q$. Кроме того, в полиномах u_1 и u_m — одинаковое число коммутаторов. Существует неизвестное x_{i_k}, $2 \leq k \leq t_1$, которое участвует в коммутаторах u_m. Здесь $k > 1$, так как если x_{i_1} участвует в коммутаторах полинома u_m, то по определению 5 случай г $u_m > u_1$ в противоречии с выбором полинома u_1. (Вспомним, что для всех $i < i_1$ $\deg_{x_i} u_1 = p$ и, следовательно, x_i участвует в коммутаторах как u_1, так и u_m.) Далее случай аналогичен б). Итак, в случае II $f(\ldots, g_{i_k}, \ldots; \ldots, g_{j_l}, \ldots) = \alpha_1 u_1(\ldots, g_{i_k}, \ldots; \ldots, g_{j_l}, \ldots) = \alpha_1 \gamma e_1 e_2 \ldots e_n \neq 0$.

Этот результат противоречит тому, что $f(x) = 0$ — тождество алгебры G_n. Следовательно, в линейной комбинации нет ненулевых членов $f(x) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, W_n)$. Лемма 12 доказана, и этим доказано утверждение C теоремы 1.

Доказательство утверждений D и E теоремы 1 аналогично случаю, когда $\mathrm{char}\, K = p > 2$, причем существенно опрощается потому, что когда $\mathrm{char}\, K = 0$, все тождества являются следствиями полилинейных тождеств

Автор статьи приносит благодарность П. Н. Сидерову и всем участникам в семинаре по многообразиям алгебр за помощь и ценные указания

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Krakovski, A. Reger. The Polynomial Identities of the Grassman-algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181, 1973, 429—438.
2. П. Ж. Чирипов, П. Н. Сидеров. О базисах тождеств некоторых многообразий ассоциативных алгебр. *Плиска*, 2, 1980 (в печати).

Пловдивский университет, 4000 Пловдив *Поступила 2. 11. 1978*