Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБ АБСОЛЮТНО НЕНУЛЕВЫХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СРАВНЕНИЙ

НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ

Обобщаются некоторые результаты К. Дочева и Д. Димитрова (1970) о существовании абсолютно ненулевых решений некоторых алгебраических сравнений от несколько неизвестных.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — комплексные числа. Рассмотрим число $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m (\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_m \varepsilon_m)^m$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Через S обозначим сумму всевозможных таких чисел (их число 2^m). Сумму S запишем символически следующим образом:

$$S = \sum_{(\varepsilon)} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m (\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_m a_m)^m.$$

Предложение 1 (Д. Скордев, 1970, неопубликовано; доказательство приведено в [1]) *Выполнено тождество* $S = 2^m m!\, a_1 a_2 \ldots a_m$.

При помощи малой теоремы Ферма получено следующее изящное приложение этого тождества:

Предложение 2 (К. Дочев и Д. Димитров, [1]). *Пусть p — простое число, $p > 2$ и $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ — целые числа, для которых $a_1 a_2 \ldots a_{p-1} \not\equiv 0 \pmod p$. При этих предположениях знаки ε_i можно подобрать таким образом, что $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_{p-1} a_{p-1} \equiv 0 \pmod p$.*

Заметим, что предложение 1 обобщается следующим образом:

Предложение 1′. *Для любых комплексных $a_1, a_2, \ldots, a_m$, a выполняется тождество* $\sum_{(\varepsilon)} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m (\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_m a_m + a)^m = 2^m . m!\, a_1 a_2 \ldots a_m$.

Из предложения 1′ и малой теоремы Ферма легко получить следующее обобщение предложения 2:

Предложение 2′. *Пусть p — простое и $p > 2$, а $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ — целые числа, для которых $a_1 a_2 \ldots a_{p-1} \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда для всякого целого a можно подобрать знаки ε_i таким образом, что $a \equiv \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_{p-1} a_{p-1} \pmod p$.*

Из предложения 2 легко получить следующее

Предложение 3 (К. Дочев и Д. Димитров [1]). *Пусть p — простое число и $a_1 a_2, \ldots, a_{p-1}$ — целые числа такие, что $a_1 a_2 \ldots a_{p-1} \not\equiv (\mathrm{mod}\, p)$. Если n — натуральное число и $(n, p-1) = (p-1)/2$, тогда сравнение $a_1 x_1^n + a_2 x_2^n + \ldots + a_{p-1} x_{p-1}^n \equiv 0 \pmod p$ обладает хотя бы одним абсолютно ненулевым решением.*

Напомним, что решение $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ сравнения $\mathcal{F}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \equiv 0 \pmod p$ называют абсолютно ненулевым, если $x_1 x_2 \ldots x_m \not\equiv 0 \bmod p$).

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 6, 1980, с. 73—75.

Из предложения 2′ нетрудно извлечь следующее обобщение предложения 3.

Предложение 3′. *Пусть p — простое число и $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ — целые числа, для которых $a_1 a_2 \ldots a_{p-1} \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда сравнение $a_1 x_1^{n_1} + a_2 x_2^{n_2} + \ldots + a_{p-1} x_{p-1}^{n_{p-1}} \equiv a \pmod p$ имеет абсолютно ненулевое решение, если $(n_k, p-1)$ делит $(p-1)/2$ для любого k, $k=1, 2, \ldots, p-1$.*

Во всем изложенном до сих пор особую роль играют решения уравнения $x^2=1$ или, что то же самое, решения сравнения $x^2 \equiv 1 \pmod p$. Рассмотрим теперь более общее сравнение

$$x^s \equiv 1 \pmod p, \tag{1}$$

где p — простое число, а s — натуральный делитель числа $p-1$. Сравнение (1) имеет в точности s решений. Пусть m — натуральное число и $m>(p-1)/s$. Положим $l=s-(p-1)/m$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — целые числа. Рассмотрим число $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m)^l (\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\ldots+\varepsilon_m a_m)^{p-1}$, где любое из чисел ε_i является решением сравнения (1). Результат сложения всевозможных таких чисел (их число — s^m) обозначим через $\mathcal{D}$. Будем пользоваться следующей символической записью:

$$\mathcal{D}=\sum_{(\varepsilon)} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m)^l (\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\ldots+\varepsilon_m a_m)^{p-1}.$$

Предложение 1′ (К. Дочев и Д. Димитров[1]). *Имеет место сравнение*

$$\mathcal{D} \equiv \frac{s^{m-1}(p-1)!}{((s-l)!)^m} (a_1 a_2 \ldots a_m)^{s-l} \pmod p.$$

Предложение 1″ является „обобщением“ предложения 1. Оно дает следующее обобщение предложения 2.

Предложение 2″ (К. Дочев и Д. Димитров [1]. *Пусть p — простое, а s — натуральное и $s \mid (p-1)$. Предположим, что m — натуральное, $m \mid (p-1)$ и $m>(p-1)/s$, а $a_1 a_2, \ldots, a_m$ — целые числа и $a_1 a_2 \ldots a_m \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда существуют решения ε_i сравнения* (1), *для которых $\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\ldots+\varepsilon_m a_m \equiv 0 \pmod p$.*

Это предложение является основным в [1]. В его основе стоят предложение 1 и его „обобщение“ — предложение 1″, из которого оно следует применением малой теоремы Ферма.

Из предложения 2″ легко вывести следующее обобщение предложения 3.

Предложение 3″ (К. Дочев и Д. Димитров [1]). *Пусть p — простое, а m и n — натуральные, $m \mid (p-1)$ и $m>(n, p-1)$. Если $a_1 a_2 \ldots, a_m$ — целые числа и $a_1 a_2 \ldots a_m \not\equiv 0 \pmod p$, тогда сравнение $a_1 x_1^n+a_2 x_2^n+\ldots+a_m x_m^n \equiv 0 (\mathrm{mod} p)$ имеет хотя бы одно абсолютно ненулевое решение.*

Теперь обобщим предложения 1″, 2″ и 3″.

Предложение 1‴. *Пусть p — простое, а s — натуральное и $s \mid (p-1)$. Предположим еще, что m и q — натуральные числа, $m \mid q$ и $m>q/s$. Положим $l=s-q/m$. В этих предположениях, если $a_1, a_2, \ldots, a_m$, a — цѐлые числа, тогда*

$$\sum_{(\varepsilon)} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m)^l (\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\ldots+\varepsilon_m a_m+a)^q \equiv \frac{q!\, s^m}{((s-l)!)^m} (a_1 a_2 \ldots a_m)^{s-l} \pmod p.$$

Предложение $2'''$. *Пусть p — простое, а s — натуральное и $s\ (p-1)$. Пусть, кроме того, m — натуральное, $m\,|\,(p-1)$, а также $m>(p-1)/s$. Предположим еще, что $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — целые числа и $a_1 a_2 \ldots a_m \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда для любого целого a можно найти такие решения ε_i сравнения* (1), *для которых $a \equiv \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_m a_m \pmod p$.*

Предложение $3'''$, *Пусть p — простое, а $n_1, n_2, \ldots, n_m$ — натуральные числа, $m\,|\,(p-1)$ и $m>[(n_1, p-1), (n_2, p-1), \ldots, (n_m, p-1)]$. Предположим еще, что $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — целые числа и $a_1 a_2 \ldots a_m \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда для любого целого a сравнение $a_1 x_1^{n_1} + a_2 x_2^{n_2} + \ldots + a_m x_m^{n_m} \equiv a \pmod p$ обладает абсолютно ненулевым решением.*

Основным утверждением в этой работе является предложение $2'''$. Оно существенно обобщает предложение $2'''$. С другой стороны, новым элементом здесь является только наблюдение, что предложение 1 и предложение $1''$ можно обобщить так, как это сделано в предложениях $1'$ и $1'''$, впрочем, без необходимости привнести новые идеи. Поэтому доказательств сформулированных теорем здесь приводить не будем. Полное их изложение можно найти в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Дочев, Д. Димитров. Някои свойства на хомогенните уравнения в крайни полета. *Годишник на Соф. унив., Фак. мат. мех.*, **64**, 1970, 269—276.
2. Н. Хадживанов. Етюди по теория на числата. София (в печати).

Единый центр математики и механики
1090 София *П. Я. 373*

Поступила 5. 12. 1978