Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА НАИЛУЧШЕГО ХАУСДОРФОВА ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

ТОДОР П. БОЯНОВ

Пусть $E(T_n;\varphi)$ — наилучшее хаусдорфово приближение тригонометрическими многочленами n-ого порядка 2π-периодической ограниченной функции φ. Доказывается, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{E(T_n;\varphi).[n/\ln(n\omega(n^{-1}))]:\varphi\in H^{\omega}_{2\pi}\}=1,$$

где $H^{\omega}_{2\pi}$ — класс всех 2π-периодических функций, модуль непрерывности которых не превосходит заданный модуль непрерывности $\omega(\delta)$ с некоторыми. свойствами. Аналогичный результат получен и в алгебраическом случае.

1. Обозначим через $E(H_n;f)$ наилучшее хаусдорфово приближение на интервале $[a, b]$ ограниченной функции f алгебраическими многочленами степени не выше n и через $E(T_n;\varphi)$ — наилучшее хаусдорфово приближение ограниченной 2π-периодической функции тригонометрическими многочленами порядка не выше n [2; 3; 4]:

$$E(H_n;f)=\inf\{r(f,\ p):p\in H_n\};\ E(T_n;\ \varphi)=\inf\{r(\varphi,\tau):\tau\in T_n\},$$

где H_n есть совокупность алгебраических многочленов степени не выше n, T_n — совокупность тригонометрических многочленов порядка не выше n, а $r(f_1, f_2)$ — хаусдорфовое расстояние между функциями f_1 и f_2.

В [5] найдена точная асимптотика $E(H_n:f)$ и $E(T_n;\varphi)$ на классе ограниченных функций:

$$\lim_{n\to\infty}\sup\{E(H_n;f).[n/\ln n]:f\in B^M_{[a,\,b]}\}=(b-a)/2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup\{E(T_n;\varphi).[n/\ln n]:\varphi\in B^M_{2\pi}\}=1,$$

где $B^M_{[a,\,b]}$ — класс всех функций, ограниченных по модулю константой M на отрезке $[a, b]$, а $B^M_{2\pi}$ — класс всех 2π-периодических функций, ограниченных по модулю константой M.

Здесь рассматривается вопрос о точной асимптотике $E(H_n;f)$ и $E(T_n;\varphi)$ на классе функций с заданным модулем непрерывности.

Оценка хаусдорфова приближения $E(T_n;\varphi)$ через модуль непрерывности $\omega(\varphi;\delta)$ функции φ получена в [6], где доказано, что если φ — 2π-периодическая непрерывная функция, то

$$E(T_n;\varphi)\leq\max\{cn^{-1}\ln(n\,\omega(\varphi;n^{-1})),\ cn^{-1}\} \tag{1}$$

(здесь c — абсолютная константа).

В [10] показано, что порядок оценки (1) неулучшаем в алгебраическом случае. Таким образом возник вопрос об оценке константы в (1). Частичный ответ был получен в [8] для приближения алгебраическими многочленами класса Lip α, $0<\alpha<1$.

В настоящей работе доказывается

Теорема 1. *Имеют место равенства*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \{E(T_n;\varphi) \,.\, [n/\ln(n\,\omega(n^{-1}))] : \varphi \in H_{2\pi}^{\omega}\} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \{E(H_n;\, f) \,.\, [n/\ln(n\,\omega(n^{-1}))] : f \in H_{[a,\, b]}^{\omega}\} = (b-a)/2,$$

где $\omega(\delta)$ — заданный выпуклый вверх модуль непрерывности, для которого обратная функция ω^{-1} существует, $\omega(\delta)\to 0$ и $\delta^{-1}\omega(\delta)\to\infty$ при $\delta\to 0$; $H_{2\pi}^{\omega}$ — класс всех 2π-периодических функций φ с модулем непрерывности $\omega(\varphi;\delta)\leqq\omega(\delta)$; $H_{[a,\, b]}^{\omega}$ — класс всех функций f, заданных на отрезке $[a,\, b]$ с модулем непрерывности $\omega(f;\delta)\leqq\omega(\delta)$.

2. В этом пункте получим оценку для $E(T_n;\varphi)$, используя некоторые идеи и результаты из [1; 5; 6; 9].

Теорема 2. *Если $\omega(\delta)$ — ограниченная функция типа модуля непрерывности, для которой $\delta^{-1}\omega(\delta)\to\infty$ и $\omega(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$ и $\varepsilon>0$ — заданное число, то существует натуральное число $n_0=n_0(\varepsilon,\omega)$ со свойством: для каждой $\varphi\in H_{2\pi}^{\omega}$ при $n>n_0$ существует тригонометрический многочлен $\tau_n^*(\varphi)\in T_n$, для которого*

$$r(\varphi,\ \tau_n^*(\varphi))\leqq(1+33\,.\,\varepsilon)\, n^{-1}\ln(n\,\omega(n^{-1})).$$

Эта теорема обобщает результат из [5].

При доказательстве теоремы будем использовать несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1 [5; 9]. *Для каждого $\lambda\in(0,\ \pi/4)$ существует четный тригонометрический многочлен $A_n(\lambda;t)$ n-ного порядка, для которого*

$$A_n(\lambda;t)\geqq \frac{1}{2}\exp\{n\lambda(1-2\,|t|/\lambda)\}, \qquad \text{если } |t|\leqq\lambda/2; \tag{2}$$

$$0\leqq A_n(\lambda;t)\leqq\exp\{n\lambda(1+\lambda-t^2/2\lambda^2)\}, \quad \text{если } |t|\leqq\lambda; \tag{3}$$

$$|A_n(\lambda;t)|\leqq 1, \qquad \text{если } \lambda\leqq|t|\leqq\pi. \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть заданы достаточно малое число $\varepsilon>0$ и ограниченная функция $\omega(\delta)$ типа модуля непрерывности, для которой $\delta^{-1}\omega(\delta)\to\infty$ при $\delta\to 0$, и пусть $\lambda=(1+\varepsilon)n^{-1}\ln(n\,\omega(n^{-1}))$. Существует четный тригонометрический многочлен $D_n(t)=D_n(\varepsilon,\omega;t)$ порядка не выше n и число $n_1=n_1(\varepsilon,\omega)$, для которых при $n>n_1$ выполняются соотношения*

$$D_n(t)\geqq 4(\pi e)^{-4}\exp(n\lambda), \qquad \text{если } |t|\leqq 1/2n; \tag{5}$$

$$0\leqq D_n(t)\leqq\exp\{n\lambda(1+\lambda-t^2/2\lambda^2)\}\,.\,(lt/\pi)^{-4}, \quad \text{если } 0<|t|\leqq\lambda; \tag{6}$$

$$0\leqq D_n(t)\leqq(lt/\pi)^{-4}, \qquad \text{если } \lambda\leqq|t|\leqq\pi. \tag{7}$$

Доказательство. Положим $C_m(t;\lambda)=[A_m(t;\lambda)+1]/2$, где $A_m(t;\lambda)$ — тригонометрический многочлен из леммы 1, и обозначим $D_n(t)=C_p(t;\lambda)$ $.[\sin(lt/2)/(l\sin t/2)]^4$, где $l=[1/\lambda]$, $p=n-2(l-1)$.

Пусть $|t|\leq 1/2n$. При достаточно больших n $1/2n\leq\lambda/2\leq\pi/8$ и оценка (2) применима. С другой стороны, $l|t|/2\leq|t|/2\lambda\leq(4n\lambda)^{-1}\to 0$ при $n\to\infty$ и тогда, если $n>n_1$, $l|t|/2\leq\pi/2$, следовательно $\sin(l|t|/2)\geq(2/\pi)\,.\,l|t|/2$. Кроме того, $\sin(|t|/2)\leq|t|/2$. Получаем

$$D_n(t)=\frac{1}{2}\,[A_p(t;\lambda)+1]\,.\,[\sin(lt/2)/(l\sin t/2)]^4$$

$$\geq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\exp\{p\lambda(1-2|t|/\lambda)\}\,.\,\left[\frac{2}{\pi}(lt/2)/(lt/2)\right]^4$$

$$\geq 4\pi^{-4}\exp\{p\lambda-p/n\}=4\pi^{-4}\exp\{n\lambda-1-2([1/\lambda]-1)(\lambda-1/n)\}$$

$$\geq 4\pi^{-4}\exp\{n\lambda-4\}=4(\pi e)^{-4}\exp(n\lambda).$$

Этим доказано (5).

Пусть $0\leq t/2\leq\pi/2$. Имеет место оценка

(8) $$[\sin(lt/2)/(l\sin t/2)]^4\leq[1/(l\,.\,2/\pi\,.\,t/2)]^4=(lt/\pi)^{-4}.$$

Тогда для $|t|\leq\lambda$ получаем, используя (3),

$$0\leq D_n(t)\leq\frac{1}{2}[\exp\{p\lambda(1+\lambda-t^2/2\lambda^2)\}+1]\,.\,(lt/\pi)^{-4}$$

и при достаточно больших n отсюда следует (6).

При $\lambda\leq|t|\leq\pi$ (7) получается из (4) и (8). Лема 2 доказана.

Обозначим через $\tau_n(\varphi)$ оператор в пространстве $C_{2\pi}$, который определяется равенством

(9) $$\tau_n(\varphi;\,x)=\mu_n\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t-x)\,\varphi(t)\,dt.$$

Здесь μ_n — нормирующий множитель, для которого $\mu_n\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)\,dt=1$. Очевидно $\tau_n(\varphi)$ является тригонометрическим многочленом порядка не выше n.

Получим оценку для μ_n при достаточно больших n, используя (5):

$$\mu_n^{-1}=\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)\,dt\geq\int_{-1/2n}^{1/2n}D_n(t)\,dt\geq n^{-1}\,.\,4(\pi e)^{-4}\exp(n\lambda),$$

откуда следует, что

(10) $$\mu_n\leq\frac{1}{4}(\pi e)^4\,.\,n\,.\,\exp(-n\lambda).$$

Введем в рассмотрение одностороннее расстояние от f к g,

$h(f,g)=\max_x\,\min_t\,\max\{|x-t|,\,|f(x)-g(t)|\}$,

где $f,\,g\in C_{2\pi}$.

Л е м м а 3. *Если $\omega(\delta)$ — ограниченная функция типа модуля непрерывности, для которой $\delta^{-1}\omega(\delta)\to\infty$ и $\omega(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$ и $\varepsilon>0$ — заданное число, то существует натуральное число $n_2=n_2(\varepsilon,\omega)$ со свойством: для каждой $\varphi\in H_{2\pi}^{\omega}$ при $n>n_2$ выполняется $h(\tau_n(\varphi),\varphi)\leq\lambda$, где $\lambda=(1+\varepsilon)\,n^{-1}\ln(n\,\omega(n^{-1}))$, а $\tau_n(\varphi)$ задается формулой* (9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеет место равенство

$$\tau_n(\varphi;\,x)-\varphi(x)=\mu_n\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t-x)[\varphi(t)-\varphi(x)]\,dt=\mu_n\int_0^{\pi}[\varphi(x+t)-2\varphi(x)$$
$$+\varphi(x-t)]\,D_n(t)\,dt.$$

Если $t \in [-\lambda, \lambda]$, то

$$2\min_{|x-u|\leq\lambda} [\varphi(u)-\varphi(x)] \leq \varphi(x+t)-2\varphi(x)+\varphi(x-t) \leq 2\max_{|x-u|\leq\lambda} [\varphi(u)-\varphi(x)].$$

Следовательно,

$$a=\min_{|x-u|\leq\lambda} [\varphi(u)-\varphi(x)] = 2\mu_n \int_0^\pi \min_{|x-u|\leq\lambda} [\varphi(u)-\varphi(x)]\, D_n(t)\, dt$$

$$\leq \mu_n \int_0^\lambda [\varphi(x+t)-2\varphi(x)+\varphi(x-t)]\, D_n(t)\, dt$$

$$\leq 2\mu_n \int_0^\pi \max_{|x-u|\leq\lambda} [\varphi(u)-\varphi(x)]\, D_n(t)\, dt = \max_{|x-u|\leq\lambda} [\varphi(u)-\varphi(x)] = A,$$

так как $D_n(t)\geq 0$, $a\leq 0$ и $A\geq 0$. Из этих неравенств и непрерывности φ следует, что существует точка $y_x \in [x-\lambda, x+\lambda]$, для которой $\varphi(y_x)-\varphi(x)=\mu_n \int_0^\lambda [\varphi(x+t)-2\varphi(x)+\varphi(x-t)]\, D_n(t)\, dt$.

Этим показано, что

$$\tau_n(\varphi; x)-\varphi(x)=\varphi(y_x)-\varphi(x)+\mu_n \int_\lambda^\pi [\varphi(x+t)-2\varphi(x)+\varphi(x-t)]\, D_n(t)\, dt$$

и, следовательно, $h(\tau_n(\varphi), \varphi) \leq \max\{\lambda, \sup_x \varrho_n(x)\}$, где $\varrho_n(x) = \left|\mu_n \int_\lambda^\pi [\varphi(x+t)-2\varphi(x)+\varphi(x-t)]\, D_n(t)\, dt\right|$.

Оценим $\varrho_n(x)$:

$$\varrho_n(x) \leq \mu_n \int_\lambda^\pi 2\omega(\varphi; t)\, D_n(t)\, dt$$

$$\leq 2\omega(n^{-1})\, \mu_n \int_\lambda^\pi (nt+1)\, [\sin(lt/2)/(l\sin t/2)]^4\, dt$$

$$\leq 2\omega(n^{-1})\, \mu_n \int_0^{\pi/2} (2nt+1)\, [\sin lt/(l \sin t)]^4\, dt.$$

Для оценки интеграла используем [1, с. 113] и (10) и получаем

$$\varrho_n(x) \leq 2\omega(n^{-1}) \cdot \frac{1}{4} (\pi e)^4 \cdot n \cdot \exp(-n\lambda) \cdot l^{-4} [2n \cdot \pi^2 l^2/4 + \pi l (2l^2+1)/6].$$

При достаточно больших n имеем $l \geq 1/2\lambda$, $1 \leq \lambda^{-2}$, $\lambda \leq \lambda^2 \cdot n$ и, следовательно,

$$\varrho_n(x) \leq \frac{1}{2} (\pi e)^4 \cdot n\omega(n^{-1}) \cdot \exp\{-(1+\varepsilon) \ln(n\omega(n^{-1}))\} \cdot (2\lambda)^4 \cdot \Big[\frac{\lambda}{2} n \pi^2 \lambda^- + \pi \lambda^{-1} (2\lambda^{-2}+1)/6\Big]$$

$$\leq \frac{1}{2} (2\pi e)^4 [n\omega(n^{-1})]^{-\varepsilon} \cdot \Big[\frac{1}{2} \pi^2 n \cdot \lambda^2 + \frac{\lambda}{2} \pi \lambda\Big]$$

$$\leq \frac{1}{2} (2\pi e)^4 [n\,\omega(n^{-1})]^{-\varepsilon} \cdot \pi^2 (1+\varepsilon)^2 \cdot [\ln(n\omega(n^{-1}))]^2 \cdot n^{-1}.$$

Этим доказательство леммы получено, так как $[n\,\omega(n^{-1})]^{-\varepsilon}\,.\,[\ln(n\omega(n^{-1}))]^2 \to 0$ при $n\to\infty$ и, следовательно, при $n>n_2$, $\varrho_n(x)\leq\lambda=(1+\varepsilon)\ln(n\,\omega(n^{-1}))\,.\,n^{-1}$ а тогда и $h(\tau_n(\varphi),\ \varphi)\leq\lambda$.

Лемма 4. *Если* $\lambda=(1+\varepsilon)\,n^{-1}\ln(n\,\omega(n^{-1}))$, $m=[n/\varepsilon\ln(n\,\omega(n^{-1}))]$ *и* $t_i=i.\ \pi/m$, $i=0,\ \pm1,\ldots,\pm m$, *то при* $n>n_3(\varepsilon,\ \omega)$

$$\max_{t\in[-\pi,\pi]}\Big\{\sum_{|t-t_i|\geq\lambda}D_n(t-t_i)\Big\}\leq C_1(\varepsilon) \tag{11}$$

и для каждого $j=0,\ \pm1,\ldots,\pm m$

$$\sum_{\substack{i\neq j\\ |t_i-t_j|\leq\lambda}}D_n(t_j-t_i)\leq C_2(\varepsilon)\,[n\,\omega(n^{-1})]^{1+\varepsilon-\alpha(\varepsilon)}\ , \tag{12}$$

где $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$ *и* $\alpha(\varepsilon)$ — *положительные константы, зависящие только от* ε,ω, *причем* $\alpha(\varepsilon)\to0$ *при* $\varepsilon\to0$.

Доказательство. Чтобы получить (11), из-за симметрии достаточно рассмотреть случай $t\in[-\pi,\ 0]$. Используя (7), имеем

$$\sum_{|t-t_i|\geq\lambda}D_n(t-t_i)\leq\sum_{|t-t_i|\geq\lambda}[l\,(t-t_i)/\pi]^{-4}$$

$$\leq 2l^{-4}\sum_{t_i\geq t+\lambda}[\pi/(t_i-t)]^4\leq 2l^{-4}\sum_{k=1}^{\infty}[\pi/(k\,\pi/m)]^4=2(m/l)^4\sum_{k=1}^{\infty}k^{-4}\leq C_1(\varepsilon).$$

Для доказательства (12) воспользуемся (6), предполагая, что $n\,\omega(n^{-1})>1$:

$$\sum_{\substack{i\neq j\\ |t_i-t_j|\leq\lambda}}D_n(t_j-t_i)\leq\sum_{\substack{i\neq j\\ |t_i-t_j|\leq\lambda}}\exp\{n\,\lambda\,(1+\lambda-(t_i-t_j)^2/2\lambda^2)\}\,.\,[l\,(t_i-t_j)/\pi]^{-4}$$

$$=\exp\,(n\,\lambda)\,.\,\exp(n\,\lambda^2)\,(m/l)^4\sum_{\substack{i\neq j\\ |t_i-t_j|\leq\lambda}}\exp\{-(i-j)^2\,.\,\pi^2\,m^{-2}\,.\,n/2\lambda\}\,(i-j)^{-4}$$

$$\leq C_2'(\varepsilon)\exp(n\,\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-k^2\,\pi^2\,m^{-2}\,.\,n/2\lambda)\,.\,k^{-4}\leq C_2'(\varepsilon)\,.\,\exp(n\,\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}\exp\{-k\,.\,\alpha(\varepsilon)\,.\ln(n\,\omega(n^{-1}))\}$$

$$=C_2'(\varepsilon)\,[n\,\omega(n^{-1})]^{1+\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}[(n\,\omega(n^{-1}))^{-\alpha(\varepsilon)}]^k\leq C_2(\varepsilon)\,.\,[n\,\omega(n^{-1})]^{1+\varepsilon-\alpha(\varepsilon)}.$$

Лемма 5. [9]. *Пусть* $f,\ g\in C_{2\pi}$ *и* $h(f,\ g)\leq\theta$. *Если* $\psi\in C_{2\pi}$, $\psi(x)\geq0$ *для* $x\in[x_0-\theta,\ \ x_0+\theta]=\Delta_0$ *и* $\max\{f(x)+\psi(x):x\in\Delta_0\}\leq g(x_0)-\theta$, *то*

$$\max_{x\in\Delta_0}\ \min_{\xi}\ \max\{|x-\xi|,\ |f(x)+\psi(x)-g(\xi)|\}\leq\theta.$$

Введем для краткости записи операторы $I(\delta,\varphi)$ и $S(\delta,\varphi)$, действующие в $C_{2\pi}$: $I(\delta,\ \varphi;\ t)=\min\{\varphi(x):|x-t|\leq\delta\}$, $S(\delta,\ \varphi;\ t)=\max\{\varphi(x):|x-t|\leq\delta\}$.

Пусть $m=[n/\varepsilon\ln(n\,\omega(n^{-1}))]$ и $t_i=i\,.\,\pi/m$, $i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$ Определим в $C_{2\pi}$ оператор $F_n(\varphi)$. Если обозначим

$$m_i=I(\pi/m,\ \varphi;\ t_i),\ \ M_i=S(\pi/m,\ \varphi;\ t_i),$$

то $F_n(\varphi;\ t_{2i})=m_{2i}$, $F_n(\varphi;\ t_{2i+1})=M_{2i+1}$ и $F_n(\varphi;\ x)$ линейна на каждом сегменте $[t_i,\ t_{i+1}]$, $i=0,\ \pm1,\ldots$ Непосредственно видно, что $r(\varphi,\ F_n(\varphi))\leq2\pi/m$.

Найдем оценку для $\omega(F_n(\varphi);\ \delta)$ через $\omega(\varphi;\delta)$.

Лемма 6. *$\omega(F_n(\varphi);\ \delta)\leqq(s+4)\,.\,\omega(\varphi;\ \delta)$, где $s=\delta\,.\,m/\pi$.*

Доказательство. Обозначим $M=\max_i \max\{M_{2i+1}-m_{2i},\ M_{2i-1}-m_{2i}\}$. Тогда из определений получаем

$$M\leqq\omega(\varphi;4\pi/m)\leqq(1+4\pi(m\,\delta)^{-1})\,.\,\omega(\varphi;\delta)$$

$$=(\pi\, s\,(m\,\delta)^{-1}+4\pi\,(m\,\delta)^{-1})\,.\,\omega\,(\varphi;\delta)=(s+4)\,\pi\,(m\,\delta)^{-1}\,.\,\omega\,(\varphi;\delta),$$

или $(s+4)\,\omega\,(\varphi;\ \delta)\geqq M\,.\,m\,\delta/\pi$. С другой стороны, имеем $\omega(F_n(\varphi);\delta)\leqq\delta\,.\,Mm/\pi$ и, следовательно, $\omega(F_n(\varphi);\ \delta)\leqq(s+4)\,.\,\omega\,(\varphi;\ \delta)$, что и требовалось доказать.

Лемма 7. [9]. *Пусть $\varphi\in C_{2\pi}$ и $F_n(\varphi)$ — определенный выше оператор. Если для функции $\tau_n^*\in C_{2\pi}$ имеет место*

$$I(\theta,\ \tau_n^*;\ t_{2i})\leqq F_n(\varphi;\ t_{2i})+\theta=m_{2i}+\theta,$$

$$S(\theta,\ \tau_n^*;\ t_{2i+1})\geqq F_n(\varphi;\ t_{2i+1})-\theta=M_{2i+1}-\theta,$$

для $i=0,\ \pm1,\ldots,\pm m$, то $h(F_n(\varphi),\ \tau_n^*)\leqq\theta+\pi/m$.

Из определений хаусдорфова и одностороннего расстояния следует, что $r(f,\ g)=\max\{h(f,\ g),\ h\ (g,\ f)\}$.

В лемме 3 утверждается, что $h(\tau_n(\varphi),\varphi)\leqq\lambda$, но аналогичная оценка для $h(\varphi,\tau_n(\varphi))$ неверна. Поэтому постараемся скорригировать $\tau_n(\varphi)$ прибавлением некоторого многочлена из T_n и получить $\tau_n^*(\varphi)$ так, чтобы $h(\tau_n^*(\varphi),\ \varphi)$ и $h(\varphi,\ \tau_n^*(\varphi))$ оценивались величинами $\lambda+\nu$, где ν/λ может быть сделано сколь угодно малым.

Исходя из $\tau_n(\varphi)$, будем последовательно улучшать по итеративной процедуре одностороннее расстояние от $F_n(\varphi)$ к многочлену, используя лемму 7. При этом одностороннее расстояние от многочлена к $F_n(\varphi)$ не будет существенно ухудшаться по лемме 5.

Приступим к доказательству теоремы 2.

Пусть $\tau_n(\varphi)$ — полученный согласно лемме 3 многочлен, для которого $h(\tau_n(\varphi),\ \ \varphi)\leqq\lambda=(1+\varepsilon)n^{-1}\ \ln\ (n\,\omega\,(n^{-1}))$. Так как $r\ (\varphi,\ F_n(\varphi))\leqq 2\pi/m=2\pi/[n/\varepsilon\ln(n\,\omega\,(n^{-1}))]$, то при больших n $r(\varphi,\ F_n(\varphi))\leqq 4\pi\varepsilon.\ n^{-1}\ln(n\,\omega\,(n^{-1}))$. Обозначим для краткости $\lambda_0=(1+\varepsilon+4\pi\varepsilon)\,n^{-1}\ln(n\,\omega\,(n^{-1}))$. Тогда $h(\tau_n(\varphi),\ F_n(\varphi))\leqq h(\tau_n(\varphi),\ \varphi)+h(\varphi,\ F_n(\varphi))\leqq\lambda_0$.

Теперь опишем итеративную процедуру построения последовательности $\{p_j\}_{j=0}^{\infty},\ p_j\in T_n$.

Полагаем $p_0=\tau_n(\varphi)$. Следующие элементы последовательности $\{p_j\}$ будем получать сериями, состоящими из $2m$ многочленов. Пусть $t_1,t_2,\ldots,t_m$ — узлы, участвующие в определении $F_n(\varphi)$. Тогда, если $p_{j-1},\ j=1,2,\ldots,2m$ уже построен, то p_j получается следующим образом при $k=0$:

а. Если $j=2mk+2i$, то проверяем неравенство

$$I(\lambda_k,\ p_{j-1};\ t_{2i})\leqq F_n(\varphi;\ t_{2i})+\lambda_k=m_{2i}+\lambda_k. \tag{13}$$

Если (13) выполнено, то $p_j=p_{j-1}$ и $a_{k,\,2i}=0$. В противном случае определяем положительное число $a_{k,2i}$ так, чтобы

$$\min\{v_{j-1}(x)-a_{k,2i}\,.\,D_n(x-t_{2i}):\ |x-t_{2k}|\leqq\lambda_k\}=m_{2i}+\lambda_k. \tag{14}$$

Тогда $p_j(x)=p_{j-1}(x)-a_{k,2i}\,.\,D_n(x-t_{2i})$.

б. Если $j=2mk+2i+1$, то проверяем неравенство

$$S(\lambda_k, p_{j-1}; t_{2i+1})\geq F_n(\varphi; t_{2i+1})-\lambda_k=M_{2i+1}-\lambda_k. \tag{15}$$

Если (15) выполнено, то $p_j=p_{j-1}$ и $a_{k,2i+1}=0$. В противном случае определяем положительное число $a_{k,2i+1}$ так, чтобы

$$\max\{p_{j-1}(x)+a_{k,2i+1}\,.\,D_n(x-t_{2i+1}): |x-t_{2i+1}|\leq\lambda_k\}=M_{2i+1}-\lambda_k.$$

Тогда $p_j(x)=p_{j-1}(x)+a_{k,2i+1}\,.\,D_n(x-t_{2i+1})$.

Остановимся подробнее на оценке величин $a_{0,j}$, $j=1, 2,\ldots,2m$ и на свойстве p_{2m}. Пусть b_0 — число, для которого $b_0\geq\max\{a_{0,j}: j=1, 2,\ldots,2m\}$.

По лемме 5 $h(p_j, F_n(\varphi))$ рассматриваемое только на интервале $[t_j-\lambda_0, t_j+\lambda_0]$ не отличается от $h(p_{j-1}, F_n(\varphi))$. Таким образом на $[-\pi, \pi]$

$$h(p_j, F_n(\varphi))\leqq h(p_{j-1}, F_n(\varphi))+b_0\,.\max\{D_n(t-t_j): |t-t_j|\geq\lambda_0\}$$

и, следовательно, согласно (11),

$$h(p_j, F_n(\varphi))\leqq h(p_0, F_n(\varphi))+b_0\,.\max_{t\in[-\pi,\pi]}\{\sum_{|t-t_k|\geqq\lambda_0} D_n(t-t_k)\}\leq \tag{16}$$

$$\leq\lambda_0+b_0\,.\,C_1(\varepsilon).$$

Отметим, что здесь по существу утверждается: для любого x можно найти $\xi\in[x-\lambda_0, x+\lambda_0]$ так, чтобы $|p_j(x)-F_n(\varphi; \xi)|\leq\lambda_0+b_0\,.\,C_1(\varepsilon)$.

Оценим также $|p_0(t_{j+1})-p_j(t_{j+1})|$. Объединяя оценки (11) и (12) при достаточно малом ε, имеем для любого $s=1,\ldots,2m$

$$\sum_{\substack{j=1\\ s\neq j}}^{2m} D_n(t_j-t_s)\leq C_3(\varepsilon)\,.\,[n\,\omega(n^{-1})]^{1+\varepsilon-\alpha(\varepsilon)}$$

и тогда для $j=1, 2,\ldots,2m-1$

$$|p_0(t_{j+1})-p_j(t_{j+1})|\leq b_0\sum_{s\leq j} D_n(t_s-t_{j+1})\leq b_0\,.\,C_3(\varepsilon)\,[n\,\omega(n^{-1})]^{1+\varepsilon-\alpha(\varepsilon)}.$$

Рассмотрим случай а). В интервале $[t_{2i}-\lambda_0, t_{2i}+\lambda_0]$ $F_n(\varphi)$ не может подняться выше $m_{2i}+\omega(F_n(\varphi); \lambda_0)$. Применяем лемму 6 и получаем при достаточно больших n

$$m_{2i}+\omega(F_n(\varphi); \lambda_0)\leq m_{2i}+(\lambda_0\,.\,m/\pi+4)\,.\,\omega(\varphi; \lambda_0)$$

$$\leqq m_{2i}+C_4(\varepsilon)\,n^{-1}\ln(n\,\omega(n^{-1}))\,.\,[n\,\omega(n^{-1})].$$

Теперь воспользуемся (16):

$$p_{2i-1}(t_{2i})\leqq m_{2i}+C_4(\varepsilon)\,n^{-1}\ln(n\,\omega(n^{-1}))\,[n\,\omega(n^{-1})]+\lambda_0+b_0\,.\,C_1(\varepsilon).$$

Для того, чтобы (14) выполнялось, достаточно скорригировать $p_{2i-1}(t_{2i})$ до $m_{2i}+\lambda_0$, и поэтому b_0 можно определить из равенства $b_0\,.\,D_n(0)=C_4(\varepsilon)\,.\,n^{-1}\ln(n\,\omega(n^{-1}))\,[n\,\omega(n^{-1})]+b_0\,.\,C_1(\varepsilon)$ или $b_0=[D_n(0)-C_1(\varepsilon)]^{-1}\,.\,C_4(\varepsilon)\,n^{-1}\,.\ln(n\,\omega(n^{-1}))\,.\,[n\,\omega(n^{-1})]$. Отсюда при достаточно больших n, используя и (5), получаем

$$b_0\leqq 2\,.\,\frac{1}{4}(\pi\,e)^4\exp(-n\,\lambda)\,.\,C_4(\varepsilon)\,n^{-1}\ln(n\,\omega(n^{-1}))\,[n\,\omega(n^{-1})]$$

$$=C_5\,.\,C_4(\varepsilon)\,n^{-1}\ln(n\,\omega(n^{-1}))\,[n\,\omega(n^{-1})]^{-\varepsilon},$$

где C_5 — абсолютная константа.

Случай б) рассматривается аналогично.

Из предыдущего видно, что

$$h(p_{2m}, F_n(\varphi)) \leq \lambda_1 = \lambda_0 + C_1(\varepsilon) . C_5 . C_4(\varepsilon)\, n^{-1} \ln(n\,\omega(n^{-1})) . [n\,\omega(n^{-1})]^{-\varepsilon},$$

а также что

$$|p_0(t_j) - p_{2m}(t_j)| \leqq C_4(\varepsilon)\,[C_5 . C_3(\varepsilon) . (n\,\omega(n^{-1}))^{-\alpha(\varepsilon)}] . n^{-1} \ln(n\,\omega(n^{-1})) . [n\,\omega(n^{-1})].$$

Дальше предположим по индукции, что при k-ой серии из последовательности $\{p_j\}$ получены

$$(17)\quad b_{k-1} = C_5 . C_4(\varepsilon) . [C_5 . C_3(\varepsilon) . (n\,\omega(n^{-1}))^{-\alpha(\varepsilon)}]^{k-1} . n^{-1} \ln(n\,\omega(n^{-1}))\,[n\,\omega(n^{-1})]^{-\varepsilon}$$

и полином $p_{2mk} \in T_n$, для которого

$$(18)\quad h(p_{2mk}, F_n(\varphi)) \leq \lambda_k = \lambda_0 + C_1(\varepsilon) . C_5 . C_4(\varepsilon)\, n^{-1} \ln(n\,\omega(n^{-1}))\,[n\,\omega(n^{-1})]^{-\varepsilon} . \sum_{s=0}^{k-1} [C_5 . C_3(\varepsilon) . (n\,\omega(n^{-1}))^{-\alpha(\varepsilon)}]^s$$

и

$$(19)\quad |p_{2m(k-1)}(t_j) - p_{2mk}(t_j)| \leqq C_4(\varepsilon)\,[C_5 . C_3(\varepsilon)\,(n\,\omega(n^{-1}))^{-\alpha(\varepsilon)}]^k . n^{-1} \ln(n\,\omega(n^{-1}))\,[n\,\omega(n^{-1})].$$

Для получения $k+1$-ой серии предположим, что p_{j-1}, $j = 2mk+1, \dots, 2m.(k+1)$ уже построен и тогда p_j определяется согласно пунктам а) и б). Так как p_{j-1} нужно скорригировать не больше чем на величину (19), видно, что (17), (18) и (19) будут выполняться для всех k.

При достаточно больших n $C_5 C_3(\varepsilon)(n\,\omega(n^{-1}))^{-\alpha(\varepsilon)} < 1$ и, следовательно

$$\sum_{s=0}^{\infty} [C_5 C_3(\varepsilon)\,(n\,\omega(n^{-1}))^{-\alpha(\varepsilon)}]^s \leqq \gamma(\varepsilon) < \infty.$$

Тогда последовательность $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$ будет сходиться к тригонометрическому многочлену

$$\tau_n^*(\varphi; x) = \tau_n(\varphi; x) + \sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^{i-1} a_i D_n(x - t_i),$$

где

$$a_i = a_{0,i} + a_{1,i} + \dots \leq \sum_{s=0}^{\infty} b_s \leqq C_5 . C_4(\varepsilon)\, n^{-1} \ln(n\,\omega(n^{-1}))\,(n\,\omega(n^{-1}))^{-\varepsilon} . \gamma(\varepsilon).$$

Видно, что многочлен $\tau_n^*(\varphi)$ удовлетворяет условию леммы 7 для $\theta = \theta_n = \lambda_0 + C_1(\varepsilon) . C_5 . C_4(\varepsilon)\, n^{-1} \ln(n\,\omega(n^{-1}))\,(n\,\omega(n^{-1}))^{-\varepsilon} . \gamma(\varepsilon)$ и так как $(n\,\omega(n^{-1}))^{-\varepsilon} \to 0$ при $n \to \infty$, то при достаточно больших n $h(F_n(\varphi), \tau_n^*(\varphi)) \leqq (1 + 13{,}6\,\varepsilon)\, n^{-1} \ln(n\,\omega(n^{-1})) + \pi/m \leq (1 + 20\,\varepsilon)\, n^{-1} \ln(n\,\omega(n^{-1}))$.

С другой стороны, переходя к пределу при $k \to \infty$ в (18), получаем $h(\tau_n^*(\varphi), F_n(\varphi)) \leqq (1 + 13{,}6\,\varepsilon)\, n^{-1} \ln(n\,\omega(n^{-1}))$.

Этим доказано, что $r(\tau_n^*(\varphi), F_n(\varphi)) \leq (1 + 20\,\varepsilon)\, n^{-1} \ln(n\,\omega(n^{-1}))$ и, следовательно, $r(\varphi, \tau_n^*(\varphi)) \leqq r(\varphi, F_n(\varphi)) + r(F_n(\varphi), \tau_n^*(\varphi)) \leqq (1 + 33 . \varepsilon)\, n^{-1} \ln(n\,\omega(n^{-1}))$ что и требовалось доказать.

3. Теорема 2 утверждает, что (1) будет выполняться при $c=1+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, одновременно для всех функций $\varphi \in H_{2\pi}^{\omega}$, если только $n>n_{\varepsilon}$. Теперь рассмотрим поведение величины $E(T_n;\varphi).[n/\ln(n\omega(n^{-1}))]$ при $n\to\infty$ для индивидуальных функций $\varphi\in H_{2\pi}^{\omega}$. При помощи модификации метода из [7] доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $\omega(\delta)$ — заданный выпуклый вверх модуль непрерывности, для которого обратная функция ω^{-1} существует, $\omega(\delta)\to 0$ и $\delta^{-1}\omega(\delta)\to\infty$ при $\delta\to 0$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такая функция $\varphi_{\varepsilon}\in H_{2\pi}^{\omega}$, что*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\{E(T_n;\varphi_{\varepsilon}).[n/\ln(n\omega(n^{-1}))]\}>1-\varepsilon.$$

Докажем сначала три вспомогательные леммы.

Лемма 8. *Пусть при $K>0$ и при заданном модуле непрерывности $\omega(\delta)$, для которого $\delta^{-1}\omega(\delta)\to\infty$ при $\delta\to 0$, определена последовательность 2π-периодических функций*

$$\delta_n(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0;\ x\in[-\pi,\pi],\ n=1,2,\dots\\ M_n=\omega(Kn^{-1}\ln(n\omega(n^{-1}))), & x=0.\end{cases}$$

Пусть $\eta\in(0,1)$ и $m=m(n)$ — последовательность натуральных чисел, для которых $0<\nu\leqq n/m\leqq\mu<\infty$. Тогда для достаточно больших n выполнено

$$1-\eta\leqq E(T_n;\delta_m).[n/\ln(m\omega(m^{-1}))]\leqq 1+\eta.$$

Доказательство. Будем использовать равенство из [3]:

$$M_m-\lambda_n=\frac{\lambda_n}{2}\left[\left(\frac{1+\operatorname{tg}\lambda_n/4}{1-\operatorname{tg}\lambda_n/4}\right)^{2n}+\left(\frac{1-\operatorname{tg}\lambda_n/4}{1+\operatorname{tg}\lambda_n/4}\right)^{2n}\right], \tag{20}$$

где $\lambda_n=E(T_n;\delta_m)$.

Введем для краткости обозначение $A_n=n\omega(n^{-1})$.

Допустим сначала, что $\lambda_n\geqq(1+\eta)n^{-1}\ln A_m$. Используя, что $\lambda_n\to 0$ при $n\to\infty$ и неравенства $x\leqq\operatorname{tg}x\leqq 2x$ для $0\leqq x\leqq\pi/4$, $(1+\lambda)/(1-\lambda)\geqq\exp(2\lambda)$ для $0<\lambda<1$, из (20) получаем для больших n

$$\omega(Km^{-1}\ln A_m)=M_m\geqq\lambda_n\left[1/2\left(\frac{1+\operatorname{tg}\lambda_n/4}{1-\operatorname{tg}\lambda_n/4}\right)^{2n}+1\right]$$

$$\geqq\lambda_n\left[1/2\left(\frac{1+\lambda_n/4}{1-\lambda_n/4}\right)^{2n}+1\right]\geqq(1+\eta)n^{-1}\ln A_m\left[1/2\exp\left(\frac{\lambda_n}{2}.2n\right)+1\right]$$

$$\geqq(1+\eta)n^{-1}\ln A_m[1/2\exp\{(1+\eta)\ln A_m\}+1]=(1+\eta)n^{-1}\ln A_m[1/2A_m^{1+\eta}+1].$$

Так как $\omega(\lambda\delta)\leqq(1+\lambda)\omega(\delta)$ для $\lambda>0$, отсюда следует

$$(1+K\ln A_m).\omega(m^{-1})\geqq(1+\eta)n^{-1}\ln A_m[1/2A_m^{1+\eta}+1].$$

Используя, что $m.\mu\geqq n$, получаем

$$\mu(1+K\ln A_m).m\omega(m^{-1})\geqq(1+\eta)\ln A_m[1/2A_m^{1+\eta}+1]$$

или $\mu(1+K\ln A_m).A_m\geqq(1+\eta)\ln A_m[1/2A_m^{1+\eta}+1]$. Но $A_m\to\infty$ при $m\to\infty$, и поэтому полученное неравенство неверно при достаточно больших n. Тем самым доказано, что существует $n_4 = n_4(\eta, \omega)$, для которого при $n > n_4$ выполняется $\lambda_n \leqq (1+\eta) n^{-1} \ln A_m$.

Теперь допустим, что $\lambda_n \leqq (1-\eta) n^{-1} \ln A_m$ и пусть задано $\varepsilon > 0$. Будем считать n настолько большим, что $(1+\operatorname{tg}\lambda_n/4)/(1-\operatorname{tg}\lambda_n/4) \leqq 1+(2+\varepsilon)\lambda_n/4$. Это возможно, так как для любого $\varepsilon' > 0$ при всех достаточно малых λ выполняется $(1+\lambda)/(1-\lambda) \leqq 1+(2+\varepsilon')\lambda$ и $\operatorname{tg}\lambda \leqq (1+\varepsilon')\lambda$. Можно считать при этом, что $\lambda_n \leqq M_m/2$. На самом деле, из условия $\delta^{-1}\omega(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$ следует, что $(Km^{-1}\ln A_m)^{-1}\omega(Km^{-1}\ln A_m) \geqq 2(1+\eta)(K\nu)^{-1}$ для достаточно больших n, а тогда $\lambda_n \leqq (1+\eta) n^{-1} \ln A_m \leqq (1+\eta)(\nu m)^{-1} \ln A_m \leqq M_m/2$.

Из (20) получаем

$$M_m/2 \leqq \lambda_n/2 \,.\, \{[1+(2+\varepsilon)\lambda_n/4]^{2n}+1\}$$

$$\leqq \lambda_n/2 \,.\, \{\exp[(1+\varepsilon/2) \,.\, n\lambda_n]+1\} \leqq 1/2\,(1-\eta) n^{-1} \ln A_m \{1+A_m^{(1+\varepsilon/2)(1-\eta)}\},$$

или при достаточно малом ε

$$M_m \leqq (1-\eta) n^{-1} \ln A_m \{1+A_m^{1-\xi}\}, \quad \text{где } \xi \in (0,1).$$

Функция $\omega(\delta)$ неубывающая, поэтому для больших n выполнено $\omega(m^{-1}) \leqq M_m$, и тогда

$$\nu \,.\, A_m = \nu \,.\, m\,\omega(m^{-1}) \leqq n \,.\, M_m \leqq (1-\eta) \ln A_m \{1+A_m^{1-\xi}\}.$$

Так как $A_m \to \infty$ при $n \to \infty$, то это неравенство не может выполняться при больших n. Следовательно существует $n_5 = n_5(\eta, \omega)$, для которого при $n > n_5$ выполняется $\lambda_n \geqq (1-\eta) n^{-1} \ln A_m$. Лемма доказана.

Л е м м а 9. *Пусть задана 2π-периодическая функция $f \in \mathrm{Lip}_L 1$, для которой $f(x) = N$ при $|x| \leqq \theta$. Пусть $f_m(x) = f(x) + \delta_m(x)$, где функция $\delta_m(x)$ определена в лемме 8 при дополнительном ограничении $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Тогда для $\eta \in (0,1)$ выполняется*

$$E(T_m; f_m) \geqq (1-\eta) m^{-1} \ln(m\,\omega(m^{-1}))$$

при всех достаточно больших m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим для краткости $B_m = m^{-1} \ln(m\,\omega(m^{-1}))$ и допустим, что для некоторого m выполняется $E(T_m; f_m) \leqq (1-\eta) B_m$. Введем вспомогательную 2π-периодическую функцию g класса Lip 1, которая при $x \in [-\pi, \pi]$ определяется следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} 0, \ \theta/4 \leqq |x| \leqq \pi; \\ 8/\theta \,.\, (\theta/4 - |x|), \ \theta/8 \leqq |x| \leqq \theta/4; \\ 1, \ |x| \leqq \theta/8. \end{cases}$$

Пусть для тригонометрических многочленов $p \in T_m$, $p_1 \in T_m$ и $p_2 \in T_s$, где $s = [B_m^{-1}]$, выполняются равенства $r(p, f_m) = E(T_m; f_m)$, $\|p_1 - f\|_c = \inf\{\|q - f\|_c : q \in T_m\}$, $\|p_2 - g\|_c = \inf\{\|q - g\|_c : q \in T_s\}$. Так как f и g — элементы класса Lip 1, то $\|p_1 - f\|_c \leqq c_1/m$ и $\|p_2 - g\|_c \leqq c_2/s$, где c_1 и c_2 — некоторые константы.

Можно показать, что для всех достаточно больших m выполняются неравенства

$$\max\{(1-\eta) B_m, \ c_1/m, \ c_2/s\} \leqq \theta/8;$$

$$[(1+L)(1-\eta) B_m + c_1/m] \,.\, c_2/s \leqq (1-\eta/2) B_m;$$

$$[M_m + (1-\eta) B_m + c_1/m](1+c_2/s) \leqq M_m + (1-\eta/2) B_m;$$

$$[M_m - (1-\eta) B_m - c_1/m](1-c_2/s) \geqq M_m - (1-\eta/2) B_m.$$

Непосредственно из того, что $f\in \mathrm{Lip}_L 1$ и из определения хаусдорфова расстояния следует, что

$$|p(x)-f_m(x)|\leqq(1+L)(1-\eta)B_m,\ \theta/2\leqq|x|\leqq\pi;$$

$$|p(x)-f_m(x)|\leqq(1-\eta)B_m,\ (1-\eta)B_m\leqq|x|\leqq\theta/2;$$

$$N-(1-\eta)B_m\leqq p(x)\leqq N+M_m+(1-\eta)B_m,\ |x|\leqq(1-\eta)B_m.$$

Кроме того, существует ξ, $|\xi|\leqq(1-\eta)B_m$, для которого $p(\xi)\geqq N+M_m-(1-\eta)B_m$.

С другой стороны,

$$|p_1(x)-f(x)|\leqq c_1/m,\ x\in[-\pi,\pi];$$

$$|p_2(x)|\leqq c_2/s,\ \theta/2\leqq|x|\leqq\pi;$$

$$|p_2(x)|\leqq 1+c_2/s,\ (1-\eta)B_m\leqq|x|\leqq\theta/2;$$

$$|p_2(x)-1|\leqq c_2/s,\ |x|\leqq(1-\eta)B_m.$$

Рассмотрим следующий многочлен степени не выше n, $n=m+s=m+[m/\ln(m\,\omega(m^{-1}))]$:

$$\bar{p}(x)=[p(x)-p_1(x)]\,.\,p_2(x).$$

Для него, исходя из свойств многочленов p, p_1 и p_2, получаем неравенства

$$|\bar{p}(x)|\leqq[(1+L)(1-\eta)B_m+c_1/m]\,.\,c_2/s\leqq(1-\eta/2)B_m,\theta/2\leqq|x|\leqq\pi;$$

$$|\bar{p}(x)|\leqq[(1-\eta)B_m+c_1/m](1+c_2/s)\leqq(1-\eta/2)B_m,\ (1-\eta)B_m\leqq|x|\leqq\theta/2;$$

$$\bar{p}(x)\geqq[-(1-\eta)B_m-c_1/m](1-c_2/s)\geqq-(1-\eta/2)B_m,\ |x|\leqq(1-\eta)B_m;$$

$$\bar{p}(x)\leqq[M_m+(1-\eta)B_m+c_1/m](1+c_2/s)\leqq M_m+(1-\eta/2)B_m,\ |x|\leqq(1-\eta)B_m;$$

$$\bar{p}(\xi)\geqq[M_m-(1-\eta)B_m-c_1/m](1-c_2/s)\geqq M_m-(1-\eta/2)B_m.$$

Следовательно, $r(\bar{p},\delta_m)\leqq(1-\eta/2)B_m$.

Так как $E(T_n;\delta_m)\leqq r(\bar{p},\delta_m)$ и $n/m=1+[m/\ln(m\,\omega(m^{-1}))]/m\to 1$ при $m\to\infty$, то из леммы 8 легко получаем, что это неравенство не может быть верным при больших m. Отсюда следует утверждение леммы 9.

Лемма 10. *Пусть для 2π-периодической функции f выполнено*: $f(x)=N$, $0<|x|\leqq\theta$; $f(0)=N+M$, $M>0$ *и пусть* $E(T_s;f)=\beta<\theta/2$. *Если* f^* *такая, что* $f^*(x)=a\,.\,f(x)$ *для* $(1-a)\beta\leqq|x|\leqq\pi$, $a\,.\,N\leqq f^*(x)\leqq a(N+M)$, *для* $0<|x|\leqq(1-a)\beta$ *и* $f^*(0)=a(N+M)$, *где* $0<a<1$, *то* $E(T_s;f^*)\geqq a\,.\,\beta$.

Доказательство получается от противного, используя непосредственно определение хаусдорфова рсстояния.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3.

Пусть заданы числа $a\in(0,1)$, $\eta\in(0,1/2)$ и выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega(\delta)$, для которго обратная функция ω^{-1} существует, $\omega(\delta)\to 0$ и $\delta^{-1}\omega(\delta)\to\infty$ при $\delta\to 0$. Построим по индукции последовательность функций $\{\psi_s\}_{s=1}^{\infty}$.

Предположим, что на отрезке $[-\pi,\pi]$ уже заданы $\psi_s\in H_{2\pi}^{\omega}\cap \mathrm{Lip}\ 1$, $s=1,2,\ldots,k$, для которых $\psi_s(x)=N_s$, $|x|\leqq\theta_s$; $E(T_{n_i};\psi_s)\geqq a\left(1-\sum_{j=1}^{s}\eta^j\right)n_i^{-1}\,.\,\ln(n_i\omega(n_i^{-1}))$, $i=1,2,\ldots,s$; $n_1<n_2<\ldots<n_s$; $s=1,2,\ldots,k$.

В определении функций δ_n из леммы 8 положим $K=(1-a)(1-2\eta)/(1-\eta)$. Согласно лемме 9 найдем такое $n_{k+1}>n_k$, что:

$$E(T_{n_{k+1}};\ 1/a\,\psi_k+\delta_{n_{k+1}})=\beta_{k+1}\geqq\left(1-\sum_{j=1}^{k}\eta^j\right)n_{k+1}^{-1}\ln\left(n_{k+1}\,\omega\,(n_{k+1}^{-1})\right);$$

и $\beta_{k+1}<\theta_k/2$;

$$M_{n_{k+1}}\leqq\min_{1\leqq i\leqq k}\{n_i^{-1}\ln\left(n_i\,\omega\,(n_i^{-1})\right).\eta^{k+1}\}.$$

Имеет место неравенство $\omega((1-a)\,\beta_{k+1})>a\,.\,M_{n_{k+1}}$, так как

$$\omega\left((1-a)\,\beta_{k+1}\right)-a\,.\,M_{n_{k+1}}$$
$$\geqq\omega\left((1-a)(1-2\eta)/(1-\eta)\,n_{k+1}^{-1}\ln\left(n_{k+1}\,\omega\,(n_{k+1}^{-1})\right)\right)-a\,.\,M_{n_{k+1}}=(1-a)\,M_{n_{k+1}}>0.$$

Поэтому можно определить 2π-периодическую непрерывную функцию $\tau_{k+1}\in H_{2\pi}^{\omega}\bigcap\mathrm{Lip}\,1$, которая для $x\in[-\pi,\pi]$ задается следующим образом:

$$\tau_{k+1}(x)=\begin{cases}0,\ (1-a)\,\beta_{k+1}\leqq|x|\leqq\pi;\\ \omega\left((1-a)\,\beta_{k+1}\right)-\omega(|x|),\quad \theta_{k+1}\leqq|x|\leqq(1-a)\,\beta_{k+1};\\ a\,.\,M_{n_{k+1}},\ |x|\leqq\theta_{k+1}.\end{cases}$$

Здесь $\theta_{k+1}=\omega^{-1}[\omega\left((1-a)\,\beta_{k+1}\right)-a\,.\,M_{n_{k+1}}]$.

Теперь положим $\psi_{k+1}=\psi_k+\tau_{k+1}$ и применим лемму 10 к функциям $1/a\,\psi_k+\delta_{n_{k+1}}$ и ψ_{k+1}. Получаем, что

$$E(T_{n_{k+1}};\ \psi_{k+1})\geqq a\left(1-\sum_{j=1}^{k}\eta^j\right)n_{k+1}^{-1}\ln\left(n_{k+1}\,\omega\,(n_{k+1}^{-1})\right)$$

и, кроме того, для $i=1,2,\ldots,k$

$$E(T_{n_i};\ \psi_{k+1})\geqq E(T_{n_i};\ \psi_k)-a\,.\,M_{n_{k+1}}$$
$$\geqq a\left(1-\sum_{j=1}^{k}\eta^j\right).\,n_i^{-1}\ln\left(n_i\,\omega\,(n_i^{-1})\right)-a\,.\,n_i^{-1}\ln\left(n_i\,\omega(n_i^{-1})\right).\,\eta^{k+1}$$
$$=a\,.\,n_i^{-1}\ln\left(n_i\,\omega\,(n_i^{-1})\right)\left(1-\sum_{j=1}^{k+1}\eta^j\right).$$

Отсюда видно, что для ψ_{k+1} выполнены такие же условия, как и для ψ_s, $s=1,2,\ldots,k$.

Обозначим через φ предел последовательности $\{\psi_s\}_{s=1}^{\infty}$. Так как график φ состоит из частей графика $\omega(|x|)$ и горизонтальных участков, то $\varphi\in H_{2\pi}^{\omega}$. С другой стороны,

$$E(T_{n_i};\varphi)\geqq E(T_{n_i};\ \psi_i)-a\sum_{j=i+1}^{\infty}M_{n_j}$$
$$\geqq a\left(1-\sum_{j=1}^{i}\eta^j\right)n_i^{-1}\ln\left(n_i\,\omega\,(n_i^{-1})\right)-a\sum_{j=i+1}^{\infty}n_i^{-1}\ln\left(n_i\,\omega\,(n_i^{-1})\right)\,\eta^j$$
$$=\{a\,(1-2\eta)/(1-\eta)\}\,.\,n_i^{-1}\ln\left(n_i\,\omega\,(n_i^{-1})\right).$$

Этим доказательство теоремы 3 завершено, так как при $a \to 1$ и $\eta \to 0$ имеем $a(1-2\eta)/(1-\eta) \to 1$.

4. Получим доказательство теоремы 1 в тригонометрическом случае.

Пусть заданы числа $a \in (0, 1)$, $\eta \in (0, 1)$. В определении функций δ_n из леммы 8 положим $K=(1-a)(1-\eta)$. При $n>n(a, \eta)$ имеем $\beta_n=E(T_n; \delta_n) \geqq (1-\eta)\, n^{-1} \ln(n\,\omega(n^{-1}))$.

Рассмотрим функции из $H_{2\pi}^{\omega}$:

$$\tau_n(x)=\begin{cases} 0, & \theta_n \leqq |x| \leqq \pi, \\ \omega(\theta_n)-\omega(|x|), & |x| \leqq \theta_n, \end{cases}$$

где $\theta_n=\omega^{-1}(a \,.\, M_n)$. Видно, что $\tau_n(0)=a \,.\, M_n$ и $\theta_n \leqq (1-a)\,\beta_n$, следовательно, можем применить лемму 10 к функциям δ_n и τ_n. Получаем $E(T_n; \tau_n) \geqq a(1-\eta)\, n^{-1} \ln(n\,\omega\,(n^{-1}))$ при $n > n(a \,.\, \eta)$, или $\lim_{n\to\infty} \sup\{E(T_n; \varphi)$ $.[n/\ln(n\,\omega(n^{-1}))] : \varphi \in H_{2\pi}^{\omega}\} \geqq 1$.

Это неравенство вместе с теоремой 2 доказывает теорему 1 в тригонометрическом случае.

Чтобы получить алгебраический аналог теоремы 2, отметим следующие соображения. Пусть $f \in C_{[-1,1]}$, а g определяется равенством $g(t)=f(\cos t)$. Видно, что $g \in C_{2\pi}$ и g — четная функция. С другой стороны, если задан четный тригонометрический многочлен $\tau_n \in T_n$ и определим $p_n(x)=\tau_n(\arccos x)$, то $p_n \in H_n$, причем $r(f, p_n) \leqq r(g, \tau_n)$. Из доказательства теоремы 2 видно, что участвующие тригонометрические многочлены получаются четными, если φ — четная функция [5]. В [1] показано также, что $\omega(g; \delta) \leqq \omega(f, \delta)$, следовательно, если $f \in H_{[-1,1]}^{\omega}$, то $g \in H_{2\pi}^{\omega}$.

Алгебраические аналоги лемм 8, 9, 10 и теоремы 3 получаются с использованием одного результата из [2], соответствующего равенству (20), и дословным повторением всех рассуждений.

Отметим, что ограничения о существовании обратной функции ω^{-1} и о выпуклости ω могут быть сняты. На самом деле, вместо $\omega^{-1}(a)$ можно использовать $\inf\{\tau : \omega(\tau)=a\}$. С другой стороны, если ω — невыпуклый модуль, то все рассуждения можем проводить для выпуклого модуля $\widetilde{\omega}$, для которого $\omega(\delta) \leqq \widetilde{\omega}(\delta) < 2\omega(\delta)$, так как $\ln(n\,\widetilde{\omega}\,(n^{-1}))/\ln(n\,\omega\,(n^{-1})) \to 1$ при $n \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. Москва, 1949.
2. Бл. Сендов. Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфовски тип. *Годишник Соф. унив., физ.-мат. фак.*, **55**, 1962, 1 — 39.
3. В. Веселинов. Аппроксимирование функций при помощи тригонометрических полиномов относительно о. ной метрики хаусдорфовского типа. *Математика (Клуж)*, **9**, 1966, 185—199.
4. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближения функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 5, 141 — 178.
5. Бл. Сендов, В. А. Попов. Точная асимптотика наилучшего приближения алгебраическими и тригонометрическими многочленами в метрике Хаусдорфа. *Мат. сб.*, **89**, 1972, 138 — 147.
6. Bl. Sendov, V. A. Popov. On a generalization of Jackson's theorem for best approximation. *J. Approxim. Theory*, **9**, 1973, 102—111.

7. Т. П. Боянов. О приближении функций класса Lip α относительно хаусдорфова расстояния. *Доклады БАН,* **27**, 1974, 1629 — 1632.
8. Л. Б. Гешев. Оценки отгдолу за хаусдорфови приближения с алгебрични полиноми. Дипломна работа. София, 1978.
9. Бл. Сендов. Хаусдорфовые приближения. София, 1979.
10. Т. П. Боянов, Л. Б. Гешев. Хаусдорфовые приближения в классах функций с заданным модулем непрерывности. *Годишник Соф. унив. Фак. мат. мех.* (в печати).

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 21. 12. 1978