Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МНОГОЗНАЧНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

СПАС П. ТАШЕВ

В статье получено одно достаточное условие для существования решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $F(D(y))=f(x,y)$ с начальным условием $y(x_0)=y_0$, где $F(D(y))$ — дополненный график S-производной функции y (см. [1; 4; 5]).

1. Многие авторы ([7]—[9]) исследовали задачу о существовании решения дифференциального уравнения

$$dy/dx \in f(x,y), \tag{1}$$

где $f(x,y)$ — многозначная функция. Под решением уравнения (1) подразумевается такая функция $y=y(x)$ с непрерывной производной, которая удовлетворяет (1), или такая абсолютно непрерывная функция $y=y(x)$, которая почти всюду удовлетворяет (1). Есть и другие трактовки этого вопроса, но мы не будем останавливаться на них.

Естественным обобщением понятия производной f' функции действительного переменного f является S-производная $D(f)$ функции, введенной Бл. Сендовым [5]. При этом S-производная, вообще говоря, неоднозначная функция. Мы будем исследовать вопрос о существовании решения уравнения

$$F(D(y))=f(x,y), \tag{2}$$

где $f(x,y)$ — многозначная функция и $F(g)$ — дополненный график функции g. В левой стороне равенства (2) стоит дополненный график функции $D(y)$, так как $f(x,y)$ — многозначная функция и в (2) стоит знак равенства (ср. (1)).

2. Необходимые обозначения и определения. Пусть G — произвольное множество на плоскости xOy.

Обозначим через $\mathcal{F}_G$ совокупность всех функций, определенных на множестве G, значениями которых являются множества действительных чисел.

Если функция $f\in\mathcal{F}_G$ и множество $E\subset G$, то через $f(E)$ будем обозначать рестрикцию функции f на множестве E, т. е. $f(E; x, y)=f(x,y)$ для $(x,y)\in E$. Для функции $f(E)$ введем верхнюю и нижнюю функции Бэра:

$$S(f(E); x, y)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\sup\{t: t\in f(\xi,\eta),\quad (\xi,\eta)\in O_\varepsilon(x,y)\cap E\},$$

$$I(f(E); x, y)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\inf\{t: t\in f(\xi,\eta),\quad (\xi,\eta)\in O_\varepsilon(x,y)\cap E\},$$

где $O_\varepsilon(x,y)=\{(\xi,\eta): \max(|\xi-x|, |y-\eta|)<\varepsilon\}$. Функции $S(f(E))$ и $I(f(E))$ определены для всех $(x,y)\in\bar{E}$, где $\bar{E}$ — замыкание множества E.

Дополненный графиком $F(f(E))$ функции $f(E)$ называется функцией $F(f(E);\ x,\ y)=[I(f(E);\ x,\ y),\ S(f(E);\ x,\ y)]$, определенной для всех $(x, y)\in\bar{E}$. Если $E=G$, положим $F(f(E))=F(f)$ [1]).

Обозначим через F_G совокупность всех ограниченных функций из $\mathcal{F}_G$, которые совпадают со своими дополненными графиками, т. е. $f\in\mathsf{F}_G$, если $f\in\mathcal{F}_G$, f ограничена и $F(f)=f$.

Пусть $G=\Delta=\{(x, y): a\leq x\leq b,\ y=0\}$. Тогда функции из $\mathcal{F}_\Delta$ являются функциями только переменного x.

Обозначим через H_Δ совокупность всех функций $f\in\mathsf{F}_\Delta$ таких, что из $g\in\mathsf{F}_\Delta$ и из $g\subset f$ следует, что $g=f$.

Пусть $f\in\mathcal{F}_\Delta$, $g\in\mathcal{F}_\Delta$, f и g — ограниченные. Хаусдорфово расстояние между f и g (см. [1]) определяем как

$$r(\Delta;f,g)=\max\{\max_{w\in F(f)}\ \min_{v\in F(f)}\ \varrho(v,w),\ \max_{w\in F(g)}\ \min_{v\in F(f)}\ \varrho(v,w)\},$$

где $v=(x_1, y_1)$, $w=(x_2, y_2)$, $\varrho(v, w)=\max(|x_1-x_2|,\ |y_1-y_2|)$.

Модуль H-непрерывности [2] $\tau(f;\delta)_r(\delta\geq 0)$ функции $f\in\mathsf{F}_\Delta$ определяется как $\tau(f;\delta)_r=r(\Delta;\ S(f;\ \delta/2),\ I(f;\ \delta/2))$, где

$$S(f;\delta;x)=\sup\{y:\ y\in f(t),\ t\in[x-\delta,\ x+\delta]\cap\Delta\},$$

$$I(f,\delta;x)=\inf\{y:\ y\in f(t),\quad t\in[x-\delta,\ x+\delta]\cap\Delta\}.$$

Множество M_Δ (см. [3]) определяем как множество всех функций $f\in\mathsf{F}_\Delta$ таких, что для каждой функции $g\in\mathsf{F}_\Delta$, $g\sim f$ выполнено $f\subset g$, где как обычно $g\sim f$, если $\mu(\{t:\ f(t)\neq g(t)\})=0$ и $\mu(E)$ — Лебеговая мера множества E.

Будем говорить, что множество E — множество типа m_Δ $(E\in m_\Delta)$ (см. [3]), если $E\subset\Delta$, E измеримо и для любых действительных α и $\beta(\alpha<\beta)$ таких, что $E\cap(\alpha,\beta)\neq\varnothing$ следует, что $\mu(E\cap(\alpha,\beta))>0$.

Точка x называется точкой плотности измеримого множества E, если $\lim_{h\to 0+}\mu(E\cap O(h;\ x))/2h=1$, где $O(h;\ x)=(x-h,\ x+h)$.

Через $S(\bar{R})$ будем обозначать множество всех сегментов из действительных чисел, т. е. $a\in S(\bar{R})$, если $a=\{x: a_1\leq x\leq a_2\}$, где a_1, $a_2\in\bar{R}$ ($\bar{R}$ — множество всех действительных чисел R и символы $-\infty$, $+\infty$). Пусть $a\in S(\bar{R})$, $b\in S(\bar{R})$. Объединение a и b $(a\vee b)$ определяется как минимальный сегмент, содержащий a и b. Если $*$ — одна из арифметических операций: $+$, $-$, $\cdot$, $/$, то сегмент $a*b$ определяется как сегмент $\{x: x=\xi*\eta,\ \xi\in a,\ \eta\in b\}$. Когда операция $\xi*\eta$ для некоторой пары (ξ,η) неопределенна, то по определению $a*b=[-\infty,\infty]$. Введенные выше операции между сегментами более подробно обсуждаются в [4].

Сегментная граница последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $a_i\in S(\bar{R})$ [4] определяется через

$$S\lim_{i\to\infty}a_i=\bigcap_{i=1}^{\infty}(\bigvee_{n=i}^{\infty}a_n).$$

Сегментной границей $(\mathrm{Slim}f(x)$ функции $f\in\mathsf{F}_\Delta$ [4] при $x\to x_0$, $x\neq x_0$, $x\in\Delta$ будем называть пересечение всех сегментов, содержащих все интервалы вида $\mathrm{Slim}_{n\to\infty}f(x_n)$, где $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — любая последовательность, такая, что $x_n\in\Delta$ и $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$.

Сегментная производная функции $f \in \mathsf{F}_\Delta$ [5] определяется через $D(f;\, x) = \operatorname{Slim}_{h\to 0+} h^{-1}(f(x+h)-f(x))$. Отметим, что если сегмент $D(f;\, x_0)$ состоит только из одной действительной точки, то функция f дифференцируема в точке x_0 и $D(f;\, x_0)=f'(x_0)$.

Пусть G — произвольное множество на плоскости xOy и $f \in \mathsf{F}_G$. Решением дифференциального уравнения (2) в интервале $\Delta=[a, b]$ будем называть любую функцию $y=y(x)$, $y \in \mathsf{F}_\Delta$ такую, что $F(D(y);\, x)=f(x, y)$ для каждого $x \in \Delta$.

Будем считать, что функция $y(x)$ принадлежит классу $\mathrm{Lip}_{k_1 k_2} 1$ на интервале $[a, b]$, где $-\infty < k_1 \leq k_2 < \infty$, если для каждых двух точек x_1, x_2 $(x_1 \leq x_2)$ из этого интервала выполнено

$$k_1(x_2-x_1) \leq y(x_2)-y(x_1) \leq k_1(x_2-x_1).$$

Отметим, что если $y \in \mathrm{Lip}_{k_1,\, k_2} 1$ на интервале $[a, b]$, то $y \in \mathrm{Lip}_k 1$ на этом интервале, где $k=\max(|k_1|, |k_2|)$.

3. В [3] исследован полностью вопрос о существовании решения дифференциального уравнения (2), когда функция f — функция только переменного x. Доказано утверждение:

Пусть функция $f \in \mathsf{F}_\Delta$. Для того чтобы существовало решение дифференциального уравнения $F(D(y)=f(x)$, на интервале Δ необходимо и достаточно $f \in \mathsf{M}_\Delta$.

В этой статье мы сформулируем и докажем следующее достаточное условие для существования решения дифференциального уравнения (2), когда функция f — функция двух переменных x и y.

Теорема. *Пусть функция $f \in \mathsf{F}_G$, где $G=\{(x, y): a \leq x \leq b,\ -\infty < y < \infty\}$, точка $(x_0, y_0) \in G$ и*

$$\inf\{z:\ z \in f(x, y),\quad (x, y) \in G\} = k_1 > -\infty,$$

$$\sup\{z:\ z \in f(x, y),\quad (x, y) \in G\} = k_2 < \infty.$$

Пусть

1) для каждой функции $\varphi \in \mathrm{Lip}_{k_1,\, k_2} 1$ на интервале $[a, b]$ и $\varphi(x_0)=y_0$ справедливо $F(I(f(t, \varphi(t))) \in \mathsf{H}_\Delta$, $F(S(f(t, \varphi(t)))) \in \mathsf{H}_\Delta$, $\Delta=[a, b]$,

2) для любой последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n \in \mathrm{Lip}_{k_1,\, k_2} 1$, $n=1, 2, \ldots$, такой, что $\varphi_n(x) \to \varphi_0(x)$ при $n \to \infty$, равномерно на интервале Δ и $\varphi_n(x_0)=y_0$, $n=1, 2, \ldots$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} r(\Delta;\ f(t,\ \varphi_n(t)),\quad f(t,\ \varphi_0(t)))=0.$$

Тогда существует решение $y=y(x)$ дифференциального уравнения (2) в интервале Δ такое, что $y(x_0)=y_0$.

Замечание 1. Если функция f ограничена на множестве G

$$(-\infty < k_1 = \inf\{z: z \in f(x, y),\ (x, y) \in G\} \leq \sup\{z: z \in f(x, y),\ (x, y) \in G\} = k_2 < \infty)$$

и если существует решение $y=y(x)$ уравнения (2) в интервале Δ, то $k_1 \leq \inf\{z: z \in F(D(y);\ x),\ x \in \Delta\} \leq \sup\{z: z \in F(D(y);\ x),\ x \in \Delta\} \leq k_2$ и, следовательно, функция $y \in \mathrm{Lip}_{k_1,\, k_2} 1$. Из леммы 6 и из того, что $\mathrm{Lip}_{k_1,\, k_2} 1 \subset \mathrm{Lip}_k 1$, $k=\max(|k_1|, |k_2|$ следует, что $F(D(y))=f(x, y) \in \mathsf{M}_\Delta$. Остается открытым вопрос: можно ли заменить условие 1) теоремы следующим условием:

1′) для каждой функции $\varphi \in \mathrm{Lip}_{k_1,\, k_2} 1$ на интервале Δ, $\varphi(x_0)=y_0$ выполнено $f(t, \varphi(t)) \in \mathsf{M}_\Delta$.

Замечание 2. Существует функция $g(x, y)$ такая, что все условия, кроме условия 2) теоремы, выполнены, и не существует решения уравнения

$$F(D(y))=g(x, y) \tag{3}$$

с начальным условием $y(x_0)=y_0$, $(x_0, y_0)\in G$. См. нижеследующий пример.

Пример. Пусть множество $G=\{(x, y): -1\leq x\leq 1, -\infty<y<\infty\}$ и

$$q(y)=\begin{cases} 1 & \text{при } y>1/2,\\ 4k(2k+1)(y-1/2k)+1 & \text{при } y\in[1/(2k+1),\ 1/2k],\ k=1, 2, \dots,\\ 4k(2k-1)(1/(2k-1)-y)-1 & \text{при } y\in[1/2k,\ 1/(2k-1)],\ k=2, 3, \dots,\\ [-1,\ 1] & \text{при } y=0,\\ 4k(2k+1)(-y-1/2k)+1 & \text{при } y\in[-1/2k,\ -1/(2k+1)],\ k=1, 2, \dots,\\ 4k(2k-1)(y+1)(2k-1)-1 & \text{при } y\in[-1/(2k-1),\ -1/2k],\ k=2, 3, \dots,\\ 1 & \text{при } y<-1/2.\end{cases}$$

Тогда определяем $g(x, y)=q(y)$, $(x, y)\in G$.

Функция $g\in F_G$. Пусть точка $(x_0, y_0)=(0, 0)$. Легко проверяется, что условие 1) теоремы выполнено. Докажем, что условие 2) не выполнено. Если

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} -1/2n & \text{для } x\in[-1,\ -1/2n),\\ x & \text{для } x\in[-1/2n,\ 1/2n],\\ 1/2n & \text{для } x\in(1/2n,\ 1],\end{cases}$$

$n=1, 2, \dots$, то $\varphi_n(0)=0$, функций $\varphi_n\in \mathrm{Lip}_{k_1, k_2}1=\mathrm{Lip}_{-1,1}1$ на интервале $\Delta=[-1, 1]$, $n=1, 2, \dots$ и $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi_0(x)\equiv 0$ равномерно на интервале Δ. Так как $\lim_{n\to\infty}r(\Delta;\ g(t, \varphi_n(t)),\ g(t, 0))=1$, то условие 2) теоремы для функции g не выполнено.

Докажем, что не существует решения уравнения (3) с начальным условием $y(0)=0$ на интервале Δ. Отметим, что если точка $(x_0, y_0)\in G$ и $y_0\neq 0$, из определения функции g следует, что существует единственное решение $y=y(x)$ уравнения (3) на интервале Δ с начальным условием $y(x_0)=y_0$ и $y(x)\neq 0$ для каждого $x\in\Delta$. Отсюда следует, что если существует решение $y=y(x)$ уравнения (3) с начальным условием $y(0)=0$, то $y(x)=0$ для каждого $x\in\Delta$. Но тогда $F(D(0))\neq g(x, 0)$, так как $F(D(0))=0$ и $g(x, 0)=g(0)=[-1, 1]$. Следовательно, не существует решения уравнения (3) на интервале Δ с начальным условием $y(0)=0$.

Замечание 3. Если функция $f\in F_G$, f непрерывна на множестве G, то все условия теоремы выполнены и $F(D(y);\ x)=y'(x)$, $x\in\Delta$, так что теорема обобщает теорему Пеано о существовании решения дифференциального уравнения $y=f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0)=y_0$, $(x_0, y_0)\in G$.

4. Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть функция* $f\in H_\Delta$ $(\Delta=[a, b])$ *и* $f_n(t)=f(a+i(b-a)/n)$ *для* $t\in[a+i(b-a)/n,\ a+(i+1)(b-a)/n)$, $i=0, 1, \dots, n-1$, $f_n(b)=f(b-(b-a)/n)$, $n=1, 2, \dots$. *Тогда* $r(\Delta;\ f_n, f)\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Доказательство. Из неравенств

$$I(f,\ 1/n;\ t)\leq f_n(t)\leq S(f,\ 1/n;\ t),\quad t\in\Delta \text{ и}$$

$$I(f,\ 1/n;\ t)\leq f(t)\leq S(f,\ 1/n;\ t),\quad t\in\Delta$$

следует, что $r(\Delta;\ f_n, f)\leq\tau(f;\ 2/n)_r$. Так как $f\in\mathrm{H}_\Delta$, то $\tau(f;\ 2/n)_r\to 0$ при $n\to\infty$. (см. [6]). Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Если множество* $E\subset\Delta$ *плотно в* Δ *и* $f\in\mathrm{H}_\Delta$, *то* $F(f(E))=f$.

Лемма следует из $F(f(E))\subset f$ и определения класса H_Δ.

Лемма 3. $\mathrm{H}_\Delta\subset\mathrm{M}_\Delta$.

Доказательство. Пусть $f\in\mathrm{H}_\Delta$, $g\in\mathrm{F}_\Delta$, $g\sim f$ и $E=\{t:f(t)=g(t)\}$. Так как $\mu(E)=\mu(\Delta)$, то множество E плотно в Δ. Из леммы 2 следует, что $F(f(E))=f$. Тогда имеем $f=F(f(E))=F(g(E))\subset g$, т. е. $f\subset g$. Следовательно $f\in\mathrm{M}_\Delta$.

Лемма 4 [3]. *Для любого множества* $E\in m_\Delta$ *существуют множества* E_1, E_2($E_1\in m_\Delta$, $E_2\in m_\Delta$) *такие, что*

1) $E_1\subset E$, $E_2\subset E$, $E_1\cap E_2=\emptyset$,
2) $\mu(E_1)+\mu(E_2)=\mu(E)$,
3) $\widetilde{E}_1=E_2=E$.

Лемма 5 [3]. *Функция* $f\in\mathrm{M}_\Delta$ *тогда и только тогда, когда* $f\subset\mathrm{F}_\Delta$ *и* $F(f(E))=f$ *для каждого множества* $E\subset\Delta$ *такого, что* $\mu(E)=\mu(\Delta)$.

Лемма 6 [3]. *Если* $f\in\mathrm{Lip}_k 1$ *на интервале* Δ, *то* $F(D(f))\in\mathrm{M}_\Delta$.

Лемма 7 (см. [10, стр. 316]). *Почти все точки измеримого множества* E *являются точками плотности для* E.

5. **Доказательство теоремы.** Сначала построим последовательность функций $y_n=y_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, из которой выберем подпоследовательность, равномерно сходящуюся на интервале Δ к требуемому решению.

Пусть n — натуральное число и N_n — натуральное такое, что $x_0+N_n/n<b\leq x_0+(N_n+1)/n$. Положим $x_i=x_0+i/n$, $i=0, 1, \ldots, N_n$. Определим функцию y_n на интервале $[x_0, b]$ Пусть $y_n(x_0)=y_0$. Если функция y_n уже определена для $x\in[x_0, x_i]$, $i\leq N_n$, то определяем

$$y_n(x)=y_n(x_i)+\int\limits_{x_i}^{x}\varphi^n(t)dt \qquad \text{для} \qquad x\in[x_i, x_{i+1}]\cap\Delta_1,$$

где

$$\varphi^n(t)=\begin{cases} S(f;\ x_i,\ y_n(x_i)) & \text{для} \quad x\in[x_i, x_{i+1}]\cap E_1,\\ I(f;\ x_i,\ y_n(x_i)) & \text{для} \quad x\in[x_i, x_{i+1}]\cap E_2.\end{cases}$$

и E_1, E_2 — множества из леммы 4 для множества Δ (без ограничения общности можно считать, что $E_1\cup E_2=\Delta$).

После N_n шагов по вышеуказанному способу функция $y_n(x)$ будет определена для всех $x\in[x_0, b]$. Аналогично определяем функцию $y_n(x)$ и для $x\in[a, x_0]$.

Последовательность функции $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in\Delta$ равностепенно непрерывна, так как $y_n\in\mathrm{Lip}_k 1$ ($k=\max(|k_1|, |k_2|)$), $n=1, 2, \ldots$ и равномерно ограничена, так как $y_n\in\mathrm{Lip}_k 1$, $y_n(x_0)=y_0$, $n=1, 2, \ldots$. Следовательно, на основании теоремы Арцеля можно выбрать равномерно сходящуюся на всем интервале Δ подпоследовательность функций, которую опять обозначим через $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, и пусть предельная функция $y=y(x)$. Ясно, что $y(x_0)=y_0$. Докажем, что функция y удовлетворяет дифференциальному уравнению (2) на интервале Δ. Для этого докажем следующие два включения:

$$F(D(y))\subset f(x, y), \tag{4}$$

$$f(x, y) \subset F(D(y)). \tag{5}$$

Сначала докажем (4). Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число и точка $\xi \in (x_0, b)$. Из определения $S(f(x, y); \xi)$ следует существование такого $\delta_1 > 0$ ($x_0 < \xi - \delta_1 < \xi + \delta_1 < b$), что для всех t таких, что $|\xi - t| < \delta_1$, выполнено $S(f(x, y); t) \leqq S(f(x, y); \xi) + \varepsilon$. Так как $r(\Delta; f(x, y_n), f(x, y)) \to 0$ при $n \to \infty$, то существует число N_1 ($N_1 > 1/\delta_1$) такое, что

$$r(\Delta; f(x, y_n), \quad f(x, y)) < \min(\varepsilon, \delta_1/2)$$

для каждого $n > N_1$. Тогда $S(f(x, y_n); t) \leqq S(f(x, y); \xi) + 2\varepsilon$ для каждого $t \in [\xi - \delta_1/2, \xi + \delta_1/2]$ и $n > N_1$. Из последнего неравенства и определения функции $\varphi^{(n)}$ следует, что $\varphi^{(n)}(t) \leqq S(f(x, y); \xi) + 2\varepsilon$ для каждого $t \in [\xi - \delta_1/4, \xi + \delta_1/4]$ и $n > N_1$. Отсюда следует, что

$$y_n(t) - y_n(\xi) = \int_\xi^t \varphi^{(n)}(z) dz \leqq (S(f(x, y); \xi) + 2\varepsilon)(t - \xi)$$

для всех $t \in (\xi, \xi + \delta_1/4)$ и $n > N_1$. Аналогично получаем, что

$$y_n(\xi) - y_n(t) \leqq (S(f(x, y); \xi) + 2\xi)(\xi - t)$$

для всех $t \in (\xi - \delta_1/4, \xi)$ и $n > N_1$. Из последних двух неравенств следует

$$\frac{y_n(t) - y_n(\xi)}{t - \xi} \leqq S(f(x, y); \xi) + 2\varepsilon \tag{6}$$

для каждого $t \in [\xi - \delta_1/4, \xi + \delta_1/4] \setminus \xi$ и $n > N_1$.

Таким же способом получаем существование числа $\delta_2 > 0$ и $N_2 > 1/\delta_2$ такие, что

$$\frac{y_n(t) - y_n(\xi)}{t - \xi} \geqq I(f(x, y); \xi) - 2\varepsilon \tag{7}$$

для всех $t \in [\xi - \delta_2/4, \xi + \delta_2/4] \setminus \xi$ и $n > N_2$.

Из неравенств (6) и (7) следует, что

$$F(D(y); \xi) \subset [I(f(x, y); \xi) - 2\varepsilon, \quad S(f(x, y); \xi) + 2\varepsilon] \tag{8}$$

для всех $\xi \in [x_0, b)$. Аналогично доказывается неравенство (8) и для $\xi \in (a, x_0)$. Из того, что $f(x; y) \in \vdash\!\dashv_\Delta$, и из леммы 3, леммы 5 и леммы 6 следует, что (8) выполнено для всех $\xi \in \Delta$. Ввиду произвольности ε (4) доказано.

Докажем и (5). Для этого докажем, что для любой точки $s \in \Delta$ и любого $h > 0$ существуют точки $\xi \in O(h; s)$, $\eta \in O(h; s)$ такие, что

$$y'(\xi) \geqq d - \varepsilon \quad \text{и} \quad y'(\eta) \leqq c + \varepsilon, \tag{9}$$

где $f(s, y(s)) = [c, d]$ и $\varepsilon > 0$ произвольное. Ввиду произвольности чисел ε и h отсюда получим, что $S(D(y); s) \geqq d$ и $I(D(y); s) \leqq c$, т. е. (5).

Пусть точка $s \in [x_0, b]$ и $h > 0$ — произвольное число. Так как $S(f(x, y)) \in \vdash\!\dashv_\Delta$, то существует интервал $(\alpha, \beta) \subset O(h; s) \cap \Delta$ такой, что $S(f(x, y); t) \geqq d - \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 = \varepsilon/3$) для каждой точки $t \in (\alpha, \beta)$. Если это не так, то существовало бы плотное множество E_3 на $O(h; s) \cap \Delta$ такое, что $S(f(x, y); t) \leqq d - \varepsilon_1$, $t \in E_3$. Тогда из леммы 2 следует, что $S(f(x, y); s) \leqq d - \varepsilon_1$, которые невозможны. Пусть $(\alpha, \beta) = O(\delta; s_1)$. Так как $r(\Delta; f(x, y_n), f(x, y)) \to 0$ при $n \to \infty$ ввиду леммы 1 существует число N такое, что $S(\varphi^{(n)}; t) \geqq d - 2\varepsilon_1$ для всех

$n > N$ и $t \in O(\delta/2;\ s_1)$. Из того, что $\mu(E_1 \cap O(\delta/4;\ s_1)) > 0$ $(E_1 \in m_\Delta)$ и y'_n существует почти всюду $(y_n \in \mathrm{Lip}_k 1)$, следует существование точки $\xi \in O(\delta/4;\ s_1)$, для которой $y'_n(\xi) = \varphi^{(n)}(\xi)$ для каждого $n > N$. Можно предпологать, что точка ξ — точка плотности для множества E_1 (ввиду леммы 7). Тогда существует число $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \delta$ такое, что

$$\mu(E_1 \cap (\xi,\ t)) > (t-\xi)(1-\varepsilon_1/3(k+1)) \quad \text{для} \quad \xi < t < \xi - \delta_1, \tag{10}$$

$$\mu(E_1 \cap (t,\ \xi)) > (\xi - t)(1-\varepsilon_1/3(k+1)) \quad \text{для} \quad \xi - \delta_1 < t < \xi. \tag{11}$$

Пусть $t > \xi$. Тогда используя (10), получаем

$$y_n(t) - y_n(\xi) = \int_\xi^t \varphi^{(n)}(z)dz$$

$$= \int_{[\xi,t] \cap E_1} \varphi^{(n)}(z)dz + \int_{[\xi,\ t] \setminus E_1} \varphi^{(n)}(z)dz \geqq (d - 2\varepsilon_1)(t-\xi) - \frac{k\varepsilon_1}{k+1}(t-\xi).$$

Следовательно, для всех $n > N$ и $\xi < t < \xi + \delta_1$ выполнено

$$\frac{y_n(t) - y_n(\xi)}{t - \xi} \geqq d - 3\varepsilon_1 = d - \varepsilon. \tag{12}$$

Аналогично, используя (11), получаем, что (12) выполнено и для всех $\xi - \delta_1 < t < \xi$ и $n > N$. После предельного перехода по n в (12) получаем, что

$$\frac{y(t) - y(\xi)}{t - \xi} \geqq d - \varepsilon \qquad \text{для всех} \quad t \in (\xi - \delta_1,\ \xi + \delta_1) \setminus \xi.$$

Отсюда следует первое неравенство (9) для случая, когда $s \in [x_0,\ b]$. Случай $s \in [a,\ x_0]$ и второе неравенство (9) доказываются аналогично. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 5 142—176.
2. Бл. Сендов. Аппроксимация относительно хаусдорфова расстояния. *Докторска дисертация. Москва, 1967.*
3. Бл. Сендов, Сп. Ташев, П. Петрушев. Характеризация S-производных липшицовых функций. *Сердика*, **4**, 1977, 260—266.
4. Bl. Sendov. Segment Arithmetic and Segment Limit. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **30**, 1977, 955—958.
5. Bl. Sendov. Segment Derivatives and Taylor's Formula. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **30** 1977, 1093—1096.
6. Bl. Sendov. Convergence of sequences of monotonic operators in A-distance. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **30**, 1977, 657—660.
7. Е. А. Барбашин, Ю. И. Алимов. К теории релейных дифференциальных уравнений. *Изв. высш. учебн. заведений., Математика*, 1962, № 1, 3—13.
8. А. Ф. Филипов. Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью. *Вестн. Моск. гос. унив., мат., мех.* 3, 1967, 16—26.
9. C. Caratheodory. Vorlesungen über reelle Funktionen. Leipzig, 1927.
10. И. П. Натансон. Увод в теорията на реалните функции. София, 1971.

Единый центр математики и механики
1090 София *П. Я. 373*

Поступила 23. 12. 1978