Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

К ТЕОРИИ 4-ТКАНЕЙ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ МНОГООБРАЗИИ X_{2r}

В. В. ГОЛЬДБЕРГ

В работе строятся основы теории многомерных 4-тканей.

1. Теория тканей начала развиваться в тридцатых годах в работах В. Бляшке и его учеников. За короткий период было опубликовано около ста работ по этой тематике. Большая часть этих работ была посвящена геометрии три-тканей кривых на плоскости. Наряду с этим некоторые статьи были посвящены геометрии 4-тканей и n-тканей кривых на плоскости, которые тесно связаны с геометрией три-тканей, а также с теорией поверхностей переноса. В этих работах доказано, в частности, что если все 4 три-ткани, содержащиеся в 4-ткани, будут шестиугольными, то такая 4-ткань эквивалентна ткани из 4 пучков прямых (Майергофер, Рейдемейстер), рассмотрены вопросы об инвариантах 4-ткани, о фигурах замыкания, связанных с 4-тканью, о ранге n-ткани и о ее спрямляемости (Доу, Боль, Бляшке). Все эти результаты отражены в монографиях [1, 2]. В последние годы n-ткани кривых на плоскости рассматривали А. Е. Либер [3] и В. И. Шуликовский [4]. Они нашли некоторые связанные с n-тканью аффинные связности.

Три-ткани многомерных поверхностей изучались в 30-е годы лишь Г. Болем [5] и Черном [6]. С 1969 г., после работы М. А. Акивиса [7], многомерные три-ткани систематически изучались в работах М. А. Акивиса и его учеников. Переход от изучения три-тканей кривых на плоскости к изучению три-тканей r-мерных поверхностей на $(2r)$-мерном дифференцируемом многообразии X_{2r} значительно обогатил теорию.

В связи с этим естественно возникала задача построения теории многомерных 4-тканей. Основы такой теории и строятся в настоящей работе.

2. Будем говорить, что *в некоторой области D дифференцируемого многообразия X_{2r} размерности $2r$ задана 4-ткань $\mathfrak{W}_r$, если в D заданы четыре r-параметрических семейства X_ξ r-мерных поверхностей V_ξ* ($\xi=1, 2, 3, 4$), *через каждую точку $x\in D$ проходит одна и только одна поверхность каждого из семейств X_ξ, поверхности одного семейства не пересекаются в пределах D, а поверхности любых двух разных семейств имеют в D не более одной общей точки.*

Такая 4-ткань может быть получена, например, если рассмотреть 4-ткань, образованную четырьмя r-параметрическими семействами $(2r)$-мерных поверхностей на дифференцируемом многообразии X_{3r} [8] и взять пересечение по-

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 6, 1980, с. 105—119.

верхностей всех ее семейств с произвольной $(2r)$-мерной поверхностью X_{2r}, не принадлежащей ни одному из четырех семейств поверхностей 4-ткани.

Зададим семейства X_ξ вполне интегрируемыми системами уравнений Пфаффа $\underset{\xi}{\overline{\omega}}{}^i=0$, $i=1,\ldots,r$; $\xi=1, 2, 3, 4$.

Примем формы $\underset{1}{\overline{\omega}}{}^i$ и $\underset{2}{\overline{\omega}}{}^i$ за базисные формы многообразия X_{2r}. Тогда

(1)
$$-\underset{3}{\omega}{}^i=p^i_j\underset{1}{\overline{\omega}}{}^j+q^i_j\underset{2}{\overline{\omega}}{}^j, \quad -\underset{4}{\omega}{}^i=\overline{r}^i_j\underset{1}{\overline{\omega}}{}^j+\overline{s}^i_j\underset{2}{\overline{\omega}}{}^j.$$

В силу равноправия 4 семейств X_ξ уравнения (1) должны быть разрешимы относительно форм $\underset{\xi}{\overline{\omega}}{}^i$, $\underset{\eta}{\overline{\omega}}{}^i$. Поэтому входящие в (1) матрицы p^i_j, q^i_j, $\overline{r}^i_j$, $\overline{s}^i_j$ должны быть невырожденными. Сделаем замену базисных форм, положив $p^i_j\underset{1}{\overline{\omega}}{}^j=\underset{1}{\omega}{}^i$, $q^i_j\underset{2}{\overline{\omega}}{}^j=\underset{2}{\omega}{}^i$. Уравнения (1) тогда примут вид

(2)
$$-\underset{3}{\overline{\omega}}{}^i=\underset{1}{\omega}{}^i+\underset{2}{\omega}{}^i, \quad -\underset{4}{\overline{\omega}}{}^i=r^i_j\underset{1}{\omega}{}^j+s^i_j\underset{2}{\omega}{}^j,$$

где $r^i_j=\overline{r}^i_k\widetilde{p}^k_j$, $s^i_j=\overline{s}^i_k\,.\,\widetilde{q}^k_j$; $\widetilde{p}^k_j$, $\widetilde{q}^k_j$ — матрицы, обратные p^k_j, q^k_j соответственно.

Пусть далее $\underset{3}{\overline{\omega}}{}^i=\underset{3}{\omega}{}^i$, $\underset{4}{\omega}{}^i=\widetilde{s}^i_j\underset{4}{\overline{\omega}}{}^j$, $\widetilde{s}^i_k r^k_j=\lambda^i_j$, где $\widetilde{s}^i_j$ — матрица, обратная s^i_j. Тогда равенства (2) примут вид

(3)
$$-\underset{3}{\omega}{}^i=\underset{1}{\omega}{}^i+\underset{2}{\omega}{}^i, \quad -\underset{4}{\omega}{}^i=\lambda^i_j\underset{1}{\omega}{}^j+\underset{2}{\omega}{}^i.$$

Поскольку система (3) должна быть разрешима относительно форм $\underset{1}{\omega}{}^i$, $\underset{3}{\omega}{}^i$; $\underset{1}{\omega}{}^i$, $\underset{2}{\omega}{}^i$, то

(4)
$$\det\|\lambda^i_j\|\neq 0, \quad \det\|\delta^i_j-\lambda^i_j\|\neq 0.$$

Разрешимость относительно форм $\underset{1}{\omega}{}^i$, $\underset{4}{\omega}{}^i$; $\underset{2}{\omega}{}^i$, $\underset{3}{\omega}{}^i$; $\underset{2}{\omega}{}^i$, $\underset{4}{\omega}{}^i$ будет тогда выполняться автоматически.

Для выяснения геометрического смысла проведенной канонизации рассмотрим касательное пространство $T_{2r}(x)$ в точке x к многообразию X_{2r}. Имеем

(5)
$$d\mathbf{x}=\underset{1}{\omega}{}^i\mathbf{e}^1_i+\underset{2}{\omega}{}^i\mathbf{e}^2_i.$$

Равенство (5) в силу (3) можно переписать в следующих видах:

(6)
$$d\mathbf{x}=-\underset{3}{\omega}{}^i\mathbf{e}^1_i+\underset{2}{\omega}{}^i(\mathbf{e}^2_i-\mathbf{e}^1_i), \quad d\mathbf{x}=-\underset{4}{\omega}{}^i\mathbf{e}^2_i+\underset{1}{\omega}{}^i(\mathbf{e}^1_i-\lambda^j_i\mathbf{e}^2_j).$$

Из (5) и (6) следует, что векторы $\mathbf{e}^2_i$, $\mathbf{e}^1_i$, $\mathbf{e}^3_i=\mathbf{e}^2_i-\mathbf{e}^1_i$, $\mathbf{e}^4_i=\mathbf{e}^1_i-\lambda^j_i\mathbf{e}^2_j$ касаются соответственно поверхностей V_1, V_2, V_3, V_4, проходящих через точку $x\in X_{2r}$ и определяемых системами $\underset{1}{\omega}{}^i=0$, $\underset{2}{\omega}{}^i=0$, $\underset{1}{\omega}{}^i+\underset{2}{\omega}{}^i=0$, $\lambda^i_j\underset{1}{\omega}{}^j+\underset{2}{\omega}{}^i=0$.

Очевидно, что согласованные преобразования форм $\underset{\xi}{\omega}{}^i$ вида

(7)
$$'\underset{\xi}{\omega}{}^i=A^i_j\underset{\xi}{\omega}{}^j,$$

и только такие преобразования, сохраняют уравнения (3). При этом матрица $\Lambda = \|\lambda^i_j\|$ преобразуется по формуле $'\Lambda = A^{-1}\Lambda A$, где $A = \|A^i_j\|$, а это означает, что величины λ^i_j образуют тензор. Будем называть его **основным аффинором 4-ткани**.

3. Выясним геометрический смысл основного аффинора λ^i_j. В окрестности точки $x \in X_{2r}$ между поверхностями V_{ξ_1} и V_{ξ_2} разных семейств X_{ξ_1} и X_{ξ_2} 4-ткани может быть двумя способами установлено взаимно-однозначное соответствие. Эти способы отличаются друг от друга тем, считаются ли соответствующими точки на V_{ξ_1} и V_{ξ_2}, получаемые при пересечении V_{ξ_1} и V_{ξ_2} поверхностями семейства X_{ξ_3} или X_{ξ_4}. Аналитически это соответствие определяется уравнениями того семейства, с помощью которого оно устанавливается.

Пусть Γ_{ξ_1} — линия на V_{ξ_1}, а $\Gamma^{\xi_3}_{\xi_1\xi_2}$ — соответствующая ей линия на V_{ξ_2} в соответствии, устанавливаемом семейством X_{ξ_3}. Отобразим эту линию обратно на V_{ξ_1} с помощью семейства X_{ξ_4}. Тогда на V_{ξ_1} мы получим линию $\Gamma^{\xi_3\xi_4}_{\xi_1\xi_2\xi_1}$. Пусть $\underset{\xi_1}{\omega^i} = 0$, $\underset{\xi_2}{\omega^i} = \xi^i dt$, $\underset{\xi_1}{\omega^i} = 0$, $\underset{\xi_2}{\omega^i} = \eta^i dt$ — уравнения линий Γ_{ξ_1} и $\Gamma^{\xi_3\xi_4}_{\xi_1\xi_2\xi_1}$. Здесь ξ^i и η^i — координаты касательных в точке x векторов $\xi = \xi^i e^{\xi_1}_i$, $\eta = \eta^i e^{\xi_1}_i$ к этим линиям. Найдем, как вектор η выражается через вектор ξ. Для V_1 и V_2 имеем

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1 : \underset{1}{\omega^i} = 0, \quad \underset{2}{\omega^i} = \xi^i dt; &&\Gamma^3_{12} : \underset{2}{\omega^i} = 0, \quad \underset{1}{\omega^i} = -\xi^i dt,\\
&\Gamma^{34}_{121} : \underset{1}{\omega^i} = 0, \quad \underset{2}{\omega^i} = \lambda^i_j \xi^j dt; &&\Gamma^4_{12} : \underset{2}{\omega^i} = 0, \quad \underset{1}{\omega^i} = -\tilde{\lambda}^i_j \xi^j dt,\\
&\Gamma^{43}_{121} : \underset{1}{\omega^i} = 0, \quad \underset{2}{\omega^i} = \tilde{\lambda}^i_j \xi^j dt,
\end{aligned}$$

где $\tilde{\lambda}^i_j$ — элементы матрицы Λ^{-1}, обратной матрице Λ.

Аналогично для остальных пяти пар получим

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{24}_{131} : \underset{1}{\omega^i} = 0, \quad \underset{3}{\omega^i} = (\delta^i_j - \lambda^i_j)\xi^j dt; &&\Gamma^{42}_{131} : \underset{1}{\omega^i} = 0, \quad \underset{3}{\omega^i} = \tilde{\tilde{\lambda}}^i_j \xi^j dt,\\
&\Gamma^{23}_{141} : \underset{1}{\omega^i} = 0, \quad \underset{4}{\omega^i} = (\delta^i_j - \tilde{\lambda}^i_j)\xi^j dt; &&\Gamma^{32}_{141} : \underset{1}{\omega^i} = 0, \quad \underset{4}{\omega^i} = -\lambda^i_j \tilde{\tilde{\lambda}}^j_k \xi^k dt,\\
&\Gamma^{21}_{343} : \underset{3}{\omega^i} = 0, \quad \underset{4}{\omega^i} = \lambda^i_j \xi^j dt; &&\Gamma^{21}_{343} : \underset{3}{\omega^i} = 0, \quad \underset{4}{\omega^i} = \tilde{\lambda}^i_j \xi^j dt,\\
&\Gamma^{13}_{242} : \underset{2}{\omega^i} = 0, \quad \underset{4}{\omega^i} = (\delta^i_j - \lambda^i_j)\xi^j dt, &&\Gamma^{31}_{242} : \underset{2}{\omega^i} = 0, \quad \underset{4}{\omega^i} = \tilde{\tilde{\lambda}}^i_j \xi^j dt,\\
&\Gamma^{14}_{232} : \underset{2}{\omega^i} = 0, \quad \underset{3}{\omega^i} = (\delta^i_j - \tilde{\lambda}^i_j)\xi^j dt, &&\Gamma^{41}_{232} : \underset{2}{\omega^i} = 0, \quad \underset{3}{\omega^i} = -\tilde{\tilde{\lambda}}^i_j \lambda^j_k \xi^k dt,
\end{aligned}$$

где $\tilde{\tilde{\lambda}}^i_j$ — элементы матрицы $(E - \Lambda)^{-1}$, обратной матрице $E - \Lambda$.

Таким образом, если обозначить через $[\alpha, \beta]$ композицию преобразований с помощью семейств X_α и X_β, мы получаем следующее выражение вектора $\boldsymbol{\eta}$ через вектор $\boldsymbol{\xi}$:

$$
(8)\qquad
\begin{array}{ll}
[3,4],\ [1,2]:\ \boldsymbol{\eta}=\Lambda\boldsymbol{\xi}, & [4,3],\ [2,1]:\ \widetilde{\boldsymbol{\eta}}=\Lambda^{-1}\boldsymbol{\xi},\\
[2,4],\ [1,3]:\ \boldsymbol{\eta}=(E-\Lambda)\boldsymbol{\xi}, & [4,2],\ [3,1]:\ \widetilde{\boldsymbol{\eta}}=(E-\Lambda)^{-1}\boldsymbol{\xi}\\
[2,3],\ [1,4]:\ \boldsymbol{\eta}=(E-\Lambda^{-1})\boldsymbol{\xi}, & [3,2],\ [4,1]:\ \widetilde{\boldsymbol{\eta}}=(E-\Lambda^{-1})^{-1}\boldsymbol{\xi}.
\end{array}
$$

Следовательно, основной аффинор дает закон преобразования касательного вектора $\boldsymbol{\xi}$ к поверхности $V_1(V_3)$ при преобразовании $[3,4]$ ($[1,2]$). С его же помощью строятся преобразования касательных векторов к другим поверхностям при других преобразованиях $[\alpha, \beta]$.

4. 4-ткань $\mathfrak{W}_r$ содержит четыре три-ткани $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$, образуемые тремя семействами X_{ξ_1}, X_{ξ_2}, X_{ξ_3} из четырех семейств X_ξ. Три вектора $\mathbf{h}^\alpha=h^i\mathbf{e}_i^\alpha$ $(\alpha=\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ касаются поверхностей V_{ξ_1}, V_{ξ_2}, V_{ξ_3}, проходящих через точку x, и лежат в одной двумерной плоскости. Таким образом, в каждой точке x с 4-тканью связаны 4 бивектора $\mathbf{h}^\xi\Lambda\mathbf{h}^\eta$, называемых трансверсальными бивекторами соответствующей три-ткани [7].

Нетрудно видеть, что 4 трансверсальных бивектора совпадают тогда и только тогда, когда h^i — собственный вектор матрицы $\Lambda=\|\lambda_j^i\|$.

Значит, в каждой точке 4-ткани существует, вообще говоря, не более r бивекторов, общих для всех 4 три-тканей.

Если таких бивекторов существует больше, чем r, то они существуют в любом направлении h^i, т. е. произвольный ненулевой вектор h^i будет собственным для матрицы Λ, поэтому матрица Λ скалярная: $\Lambda=\lambda E$. В этом случае три-ткань $[1, 2, 3]$ будеть изоклинной [7], т. е. существует ∞^1 семейств поверхностей X_4, образующих вместо с три-тканью $[1,2,3]$ 4-ткань.

Объединим полученные в пп. 3—4 результаты в теорему.

Теорема 1. *Основной аффинор 4-ткани служит матрицей преобразования касательного вектора* $\boldsymbol{\xi}$ *к поверхности* $V_1(V_3)$ *при преобразовании* $[3,4]$, ($[1,2]$). *В каждой точке 4-ткани существует, вообще говоря, не более* r *бивекторов, общих для всех 4 три-тканей данной 4-ткани. Если таких бивекторов существует больше, чем* r, *то они будут существовать в любом направлении, любая из три-тканей* $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$, *входящих в 4-ткань, будет изоклинной. В этом случае существует* ∞^1 *семейств поверхностей* X_{ξ_4}, *образующих вместо с три-тканью* $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ *4-ткань.*

5. Из (8) видно, что для переместительности преобразования $[3,4]$ (или $[1,2]$) необходимо и достаточно, чтобы

$$\Lambda^2=E, \tag{9}$$

а для переместительности преобразований $[2,4]$ (или $[1,3]$) и $[2,3]$ (или $[1,4]$) соответственно необходимо и достаточно, чтобы $(E-\Lambda)^2=E$, $(E-\Lambda^{-1})^2=E$, или

$$\Lambda=2E, \tag{10}$$

$$\Lambda=E/2. \tag{11}$$

Заметим, что при $r=1$ сложное отношение 4 кривых V_1, V_2, V_3, V_4 4-ткани, проходящих через одну точку, равно λ (единственной компоненте аффинора при $r=1$). Поскольку при условии (9) $\lambda^2=1$, то возможен в силу (4) лишь случай $\lambda=-1$, т. е. кривые V_1, V_2, V_3, V_4 в этом случае образуют гармоническую четверку. Нетрудно проверить, что при $r=1$ условия (10) и

(11) означают соответственно, что кривые V_1, V_3 гармонически разделяют V_2, V_4 и V_1, V_4 гармонически разделяют V_2, V_3, ибо сложные отношения указанных кривых равны соответственно $1-\lambda^2$ и $1-\lambda^{-2}$.

В общем случае из соотношения (9) вытекает, что собственные значения матрицы Λ равны ± 1. Но ни одно из них не может быть равно 1, так как в противном случае в каноническом виде матрицы будет нарушено второе из условий (4). Поэтому все собственные значения равны -1, и равенство (9) эквивалентно равенству

$$\Lambda = -E. \tag{12}$$

Чтобы получить геометрические характеристики при $r>1$, рассмотрим касательное пространство T_{2r} к многообразию X_{2r} в точке x. Пусть T_ξ — касательные r-плоскости к V_ξ в точке x. Плоскости T_1, T_2, T_3, T_4 определяются соответственно векторами $\mathbf{e}_i^2$, $\mathbf{e}_i^1$, $\mathbf{e}_i^3=\mathbf{e}_i^2-\mathbf{e}_i^1$, $\mathbf{e}_i^4=\mathbf{e}_i^1-\lambda_i^j\mathbf{e}_j^2$. Пусть P_{2r-1} — гиперплоскость пространства T_{2r}, не проходящая через точку x. Плоскости T_ξ пересекают P_{2r-1} по $(r-1)$-плоскостям P_ξ. В случаях (12), (10), (11) через каждую точку плоскости P_4 проходит одна прямая, пересекающая P_1, P_2, P_3. На каждой такой прямой плоскости P_1, P_2, P_3, P_4 определяют четверку точек $A_1, A_2, A_3=A_2-A_1, A_4=A_2-\lambda A_1$, где λ соответственно (12), (10), (11) равно $-1, 2, 1/2$. В случае (12) точки A_1, A_2 гармонически разделяют точки A_3, A_4; в случаях (10), (11) имеем соответственно $(A_1, A_3;\ A_2, A_4)=-1$, $(A_1, A_4;\ A_2, A_3)=-1$.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Для того, чтобы преобразования* $[1,2]$ (*или* $[3,4]$), $[1,3]$ (*или* $[2,4]$), $[1,4]$ (*или* $[2,3]$) *были перестановочными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух эквивалентных условий: 1) матрица основного аффинора была скалярной: $\Lambda=\lambda E$, где соответственно λ равно $-1, 2, 1/2$; 2) матрицы Λ, $E-\Lambda$, $E-\Lambda^{-1}$ были инволютивными.*

Следствие. *Сравнение теорем 1 и 2 показывает, что из 4-тканей, порожденных изоклинной три-тканью* $[1, 2, 3]$, *только для трех две пары из шести пар преобразований $[\alpha, \beta]$ будут перестановочными.*

Теорема 3. *В произвольной гиперплоскости P_{2r-1} касательного пространства T_{2r} 4-ткани в точке $x\in X_{2r}$, касательные r-плоскости T_ξ поверхностей V_ξ, проходящих через ту же точку x, высекают $(r-1)$-плоскости P_ξ. В случае перестановочности указанных преобразований через каждую точку любой из этих плоскостей проходит одна прямая, пересекающая остальные три. На каждой из таких прямых плоскости P_ξ высекают точки A_ξ. При этом в случае указанных в теореме 2 перестановочностей имеет место соответственно: $(A_1, A_2;\ A_3, A_4)=-1$, $(A_1, A_3;\ A_2, A_4)=-1$, $(A_1, A_4;\ A_2, A_3)=-1$.*

6. Поскольку для три-ткани $[1,2,3]$ мы провели такую же канонизацию, как и в [7], мы имеем (см. [7])

$$d\underset{1}{\omega^i}=\underset{1}{\omega^j}\wedge\omega_j^i+a_{jk}^i\underset{1}{\omega^j}\wedge\underset{1}{\omega^k},\qquad d\underset{2}{\omega^i}=\underset{2}{\omega^j}\wedge\omega_j^i-a_{jk}^i\underset{2}{\omega^j}\wedge\underset{2}{\omega^k}, \tag{13}$$

$$d\omega_j^i-\omega_j^k\wedge\omega_k^i=b_{jkl}^i\underset{1}{\omega^k}\wedge\underset{2}{\omega^l}, \tag{14}$$

$$\nabla a_{jk}^i=b_{[j|l|k]}^i\underset{1}{\omega^l}+b_{[jk]l}^i\underset{2}{\omega^l}, \tag{15}$$

$$b_{[jkl]}^i=2a_{[jk}^m a_{|m|l]}^i, \tag{16}$$

$$
(17)\qquad \left\{\begin{aligned}
&(\nabla b^i_{jkl} - b^l_{jpl}\, a^p_{km}\underset{1}{\omega}^m + b^i_{jkp}\, a^p_{lm}\underset{2}{\omega}^m)\wedge \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l = 0,\\
&(\nabla b^i_{[j|l|k]} - b^i_{[j|p|k]}\, a^p_{lm}\underset{1}{\omega}^m)\wedge \underset{1}{\omega}^l + (\nabla b^i_{[jk]l} + b^i_{[jk]p}\, a^p_{lm}\underset{2}{\omega}^m)\wedge \underset{2}{\omega}^l\\
&= (a^i_{pj}\, b^p_{klm} - a^i_{pk}\, b^p_{jlm} + a^p_{jk}\, b^i_{plm})\underset{1}{\omega}^l \wedge \underset{2}{\omega}^m,
\end{aligned}\right.
$$

где

$$
\nabla a^i_{jk} = da^i_{jk} - a^i_{lk}\omega^l_j - a^i_{jl}\omega^l_k + a^l_{jk}\omega^i_l,
$$

$$
\nabla b^i_{jkl} = db^i_{jkl} - b^i_{mkl}\omega^m_j - b^i_{jml}\omega^m_k - b^i_{jkm}\omega^m_l + b^m_{jkl}\omega^i_m.
$$

Из уравнений (15) и (16) видно, что величины a^i_{jk} и b^i_{jkl} образуют тензоры. Они называются [7] **тензорами кручения и кривизны три-ткани** [1, 2, 3]. Остается потребовать полной интегрируемости системы форм $\underset{4}{\omega}^i$. Из (3) имеем

$$
(18)\qquad d\underset{4}{\omega}^i = \underset{4}{\omega}^j \wedge (\omega^i_j + a^i_{jk}\underset{4}{\omega}^k + 2a^i_{jk}\lambda^k_m\underset{1}{\omega}^m) - \nabla\lambda^i_j \wedge \underset{1}{\omega}^j - (\lambda^i_m a^m_{kl} - a^i_{pq}\lambda^p_k\lambda^q_l)\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^l.
$$

Из (18) вытекает, что $\nabla\lambda^i_j = d\lambda^i_j - \lambda^i_k\omega^k_j + \lambda^k_j\omega^i_k$ — главные формы. Пусть

$$
(19)\qquad \nabla\lambda^i_j = \lambda^i_{jk}\underset{1}{\omega}^k + \mu^i_{jk}\underset{2}{\omega}^k.
$$

Внесем (19) в (18) и используем при этом (3). Тогда условия полной интегрируемости системы форм $\underset{4}{\omega}^i$ запишутся в виде

$$
(20)\qquad \lambda^i_{[jk]} - \mu^i_{[j|p|}\lambda^p_{k]} = \lambda^i_p a^p_{jk} + \lambda^p_{[k}\lambda^q_{j]} a^i_{pq}.
$$

При условиях (20) уравнения (18) принимают вид

$$
(21)\qquad d\underset{4}{\omega}^i = \underset{4}{\omega}^j \wedge (\omega^i_j + a^i_{jk}\underset{4}{\omega}^k + 2a^i_{jk}\lambda^k_m\underset{1}{\omega}^m + \mu^i_{kj}\underset{1}{\omega}^k).
$$

Уравнения (19) още раз показывают, что величины λ^i_j — компоненты тензора [9]. Условия ковариантного постоянства этого тензора на семействах X_1, X_2, X_3, X_4 имеют соответственно вид

$$
(22)\qquad \mu^i_{jk} = 0,\ \ \lambda^i_{jk} = 0,\ \ \lambda^i_{jk} = \mu^i_{jk},\ \ \lambda^i_{jk} = \mu^i_{jl}\lambda^l_k.
$$

Из (22) и (4) вытекает, что *ковариантное постоянство этого тензора на любых двух семействах влечет его ковариантное постоянство на всем* X_{2r}. Для пар X_1, X_2; X_1, X_3; X_1, X_4; X_2, X_3; X_2, X_4 это очевидно. Для пары X_3, X_4 имеем $\lambda^i_{jk} = \mu^i_{jk}$, $\lambda^i_{jl}(\delta^l_k - \lambda^l_k) = 0$, и в силу (4) получаем $\lambda^i_{jk} = 0$, а значит и $\mu^i_{jk} = 0$.

Внешнее дифференцирование уравнений (19) дает

$$
(23)\qquad \begin{aligned}
&\nabla\lambda^i_{jk}\wedge\underset{1}{\omega}^k + \nabla\mu^i_{jk}\wedge\underset{2}{\omega}^k + \lambda^i_{jk}a^k_{lm}\underset{1}{\omega}^l\wedge\underset{1}{\omega}^m - \mu^i_{jk}a^k_{lm}\underset{2}{\omega}^l\wedge\underset{2}{\omega}^m\\
&\qquad + (\lambda^i_k b^k_{jlm} - \lambda^k_j b^i_{klm})\underset{1}{\omega}^l\wedge\underset{2}{\omega}^m = 0,
\end{aligned}
$$

где $\nabla\lambda^i_{jk} = d\lambda^i_{jk} - \lambda^i_{lk}\omega^l_j - \lambda^i_{jl}\omega^l_k + \lambda^l_{jk}\omega^i_l$, $\nabla\mu^i_{jk} = d\mu^i_{jk} - \mu^i_{ek}\omega^l_j - \mu^i_{jl}\omega^l_k + \mu^l_{jk}\omega^i_l$. Из (23) находим

$$
24)\qquad \nabla\lambda^i_{jk} = \lambda^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^l + \beta^i_{jkl}\underset{2}{\omega}^l,\ \ \nabla\mu^i_{jk} = \alpha^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^l + \mu^i_{jkl}\underset{2}{\omega}^l,
$$

$$a^i_{jml} - \beta^i_{jlm} + \lambda^i_k b^k_{jlm} - \lambda^k_j b^i_{klm} = 0, \quad \lambda^i_{j[ml]} = \lambda^i_{jk} a^k_{ml}, \quad \mu^i_{j[ml]} = \mu^i_{jk} a^k_{lm}. \tag{25}$$

Теорема 4. *Пусть в области D аналитического пространства X_{2r} заданы формы Пфаффа $\underset{1}{\omega^i}$, $\underset{2}{\omega^i}$ и тензоры λ^i_j, $a^i_{jk} = -a^i_{kj}$, b^i_{jkl}, удовлетворяющие конечным соотношениям* (16), (20), *пфаффовым уравнениям* (15), (19), *уравнениям структуры* (13), (14) *и условиям совместности* (17), (23). *Тогда при помощи систем уравнений Пфаффа*

$$\underset{1}{\omega^i} = 0, \quad \underset{2}{\omega^i} = 0, \quad \underset{1}{\omega^i} + \underset{2}{\omega^i} = 0, \quad \lambda^i_j \underset{1}{\omega^j} + \underset{2}{\omega^i} = 0$$

в области D определяется единственная с точностью до аналитического преобразования 4-ткань $\mathfrak{M}_r$, для которой указанные тензоры служат основным аффинором и тензорами кручения и кривизны три-ткани [1, 2, 3].

Эта теорема вытекает из теоремы Картана об эквивалентности двух систем форм [10].

7. Из уравнений (13) и (14) вытекает, что формы Пфаффа

$$\omega^I_J = \begin{pmatrix} \omega^i_j & 0 \\ 0 & \omega^i_j \end{pmatrix}, \quad I, J, K = 1, \ldots, 2r$$

определяют на многообразии X_{2r} аффинную связность [11]. Тензор кручения этой связности имеет вид

$$R^I_{JK} = \left\{ \begin{pmatrix} a^i_{jk} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a^i_{jk} \end{pmatrix} \right\}, \tag{27}$$

а тензор кривизны — вид

$$R^I_{JKL} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 0 & b^i_{jkl}/2 \\ -b^i_{jkl}/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Как и в [7], легко показать, что поверхности семейств X_1 и X_2 не имеют кривизны (являются поверхностями абсолютного параллелизма), а компоненты тензоров кручения поверхностей V_1, V_2, V_3 в их общей точке одинаковы и совпадают со значениями компонент тензора кручения три-ткани [1, 2, 3] в этой точке.

На поверхности $V_4 \subset X_4$, определяемой системой $\lambda^i_j \underset{1}{\omega^j} + \underset{2}{\omega^i} = 0$, имеем

$$d\underset{1}{\omega^i} = \underset{1}{\omega^j} \wedge \omega^i_j + a^i_{jk} \underset{1}{\omega^j} \wedge \underset{1}{\omega^k}, \quad d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k = -b^i_{jkl} \lambda^l_m \underset{1}{\omega^k} \wedge \underset{1}{\omega^m},$$

т. е. тензор кручения V_4 совпадает с тензором кручения три-ткани [1, 2, 3], а тензор кривизны V_4 получается из тензора кривизны три-ткани [1, 2, 3] линейным преобразованием с помощью основного аффинора.

8. Уравнения геодезических линий $d\omega^I + \omega^J \omega^I_J = \theta \omega^I$ в случае, когда X_{2r} несет 4-ткань, в силу (26) принимают вид

$$d\underset{1}{\omega^i} + \underset{1}{\omega^j} \omega^i_j = \theta \underset{1}{\omega^i}, \quad d\underset{2}{\omega^i} + \underset{2}{\omega^j} \omega^i_j = \theta \underset{2}{\omega^i}, \tag{29}$$

где d — символ обычного дифференцирования.

Из уравнений (29) вытекает, что поверхности семейств X_1, X_2, X_3, определяемые уравнениями $\underset{1}{\omega}^i=0$, $\underset{2}{\omega}^i=0$, $\underset{1}{\omega}^i+\underset{2}{\omega}^i=0$, будут вполне геодезическими поверхностями на X_{2r}. Найдем, при каких условиях поверхности семейства X_4 будут вполне геодезическими. Для поверхности $V_4\subset V_4:\underset{2}{\omega}^i=-\lambda^i_j\underset{1}{\omega}^j$ и из (29) получаем, что для полной геодезичности V_4 необходимо и достаточно, чтобы тождественно выполнялись равенства $\nabla\lambda^i_j\underset{1}{\omega}^j=0$, или в силу (19) равенства $(\lambda^i_{jk}-\mu^i_{jl}\lambda^l_k)\underset{1}{\omega}^j\underset{1}{\omega}^k=0$. Последние равенства будут тождествами тогда и только тогда, когда

(30) $$\lambda^i_{(jk)}=\lambda^l_{(j}\mu^i_{k)l}.$$

Мы получили на X_{2r} аффинную связность, отправляясь от три-ткани [1, 2, 3] и приписывая в ней особую роль семейству X_3. Будем обозначать эту связность через γ_{123}. Всего, таким образом, можно получить 12 аффинных связностей $\gamma_{\xi_1\xi_2\xi_3}$, определяемых три-тканями $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ и семействами X_{ξ_3} в них. Все они обладают аналогичными свойствами.

Теорема 5. *4-ткань $\mathfrak{M}_r$ индуцирует на многообразии X_{2r} 12 аффинных связностей $\gamma_{\xi_1\xi_2\xi_3}$, определяемых три-тканями $[\xi_1, \xi_1, \xi_3]$ и семействами X_{ξ_3} в них. Формы связности для γ_{123} имеют вид* (26), *а тензоры кручения и кривизны γ_{123} — вид* (27) *и* (28). *Связность γ_{123} индуцирует связности на поверхностях ткани. Поверхности семейств X_1 и X_2 являются поверхностями абсолютного параллелизма в них, тензоры кручения поверхностей V_ξ совпадают с тензором кручения три-ткани* [1, 2, 3], *тензор кривизны V_3 совпадает с тензором кривизны три-ткани* [1, 2, 3], *а тензор кривизны V_4 получается из последнего линейным преобразованием с помощью основного аффинора. Поверхности семейств X_1, X_2, X_3 являются поверхностями абсолютного параллелизма в связности γ_{123}, а поверхности семейства X_4 будут вполне геодезическими многообразиями в связности γ_{123} тогда и только тогда, когда основной аффинор удовлетворяет равенствам* (30).

9. Рассмотрим геодезическую линию на поверхности V_1:

(31) $$\underset{1}{\omega}^i=0,\ \underset{2}{\omega}^i=\xi^i dt,\ d\xi^i+\xi^j\omega^i_j=\theta\xi^i.$$

На поверхности V_2 в соответствии, определяемом семейством X_3 (см. п. 3), ей соответствует линия

(32) $$\underset{2}{\omega}^i=0,\quad \underset{1}{\omega}^i=-\xi^i dt,$$

а в соответствии, определяемом семейством X_4, линия

(33) $$\underset{2}{\omega}^i=0,\ \underset{1}{\omega}^i=-\tilde{\lambda}^i_j\xi^j dt.$$

На поверхности V_3 в соответствии, определяемом семействами X_2 и X_4, линии (31) отвечают соответственно линии

(34) $$\underset{3}{\omega}^i=0,\quad \underset{1}{\omega}^i=\xi^i dt,$$

(35) $$\underset{3}{\omega}^i=0,\quad \underset{1}{\omega}^i=-\tilde{\tilde{\lambda}}^i_j\xi^j dt.$$

Наконец, на поверхности V_4 в соответствии, определяемом семействами X_2 и X_3, линии (31) соответствуют линии

$$\underset{4}{\omega}^i=0, \quad \underset{1}{\omega}^i=\xi^i dt, \tag{36}$$

$$\underset{4}{\omega}^i=0, \quad \underset{1}{\omega}^i=-\tilde{\tilde{\lambda}}{}^i_j\lambda^j_k\xi^k dt. \tag{37}$$

Линии (32) и (34) будут геодезическими в силу (31), линия (36) будет геодезической в том и только в том случае, когда поверхность V_4 вполне геодезическая, т. е. если выполнены условия (30).

Для нахождения условий геодезичности линий (33), (35), (37) заметим, что из $\lambda^i_k\,\tilde{\lambda}^k_j=\delta^i_j$, $(\delta^i_k-\lambda^i_k)\tilde{\tilde{\lambda}}{}^k_j=\delta^i_j$ вытекает, что

$$\nabla\tilde{\lambda}^i_j=-\tilde{\lambda}^k_j\nabla\lambda^l_k\tilde{\lambda}^i_l, \quad \nabla\tilde{\tilde{\lambda}}{}^i_j=\tilde{\tilde{\lambda}}{}^k_j\nabla\lambda^l_k\tilde{\tilde{\lambda}}{}^i_l, \tag{38}$$

где $\nabla\tilde{\lambda}^i_j=d\tilde{\lambda}^i_j-\tilde{\lambda}^i_l\omega^l_j+\tilde{\lambda}^l_j\omega^i_l$, $\nabla\tilde{\tilde{\lambda}}{}^i_j=d\tilde{\tilde{\lambda}}{}^i_j-\tilde{\tilde{\lambda}}{}^i_l\omega^l_j+\tilde{\tilde{\lambda}}{}^l_j\omega^i_l$. Далее равенства (33), (29), (31) дают $\nabla\tilde{\lambda}^i_j\xi^j=0$, откуда в силу (38), (33) и (19) вытекают равенства $\tilde{\lambda}^m_k\tilde{\lambda}^l_j\tilde{\lambda}^i_{lm}\xi^j\xi^k=0$, которые будут выполняться тождественно в том и только в том случае, когда

$$\lambda^i_{(km)}=0. \tag{39}$$

Аналогично находим, что условиями геодезичности линии (35) будут равенства

$$\lambda^i_{(jk)}=\mu^i_{(jk)}, \tag{40}$$

а условиями геодезичности линии (37) будут равенства (30) и

$$\lambda^m_{(j}(\lambda^i_{k)m}-\mu^i_{k)q}\lambda^q_m)=0. \tag{41}$$

Доказана

Теорема 6. *Геодезической линии (31) на V_1 соответствуют геодезические линии (32) на V_2 и (34) на V_3, если соответствие устанавливается семействами X_3 и X_2. Для того, чтобы соответствующие (31) линии (33) и (35) на V_2 и V_3 в соответствии, устанавливаемом семейством X_4, были геодезическими, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соответственно равенства (39) и (40). Линии (36) и (37) на V_4, соответствующие (31) в соответствии, устанавливаемом X_2 и X_3, будут геодезическими тогда и только тогда, когда выполняются соответственно равенства (30) и (30), (41).*

10. Параллелизуемой многомерной 4-тканью назовем 4-ткань, которую можно отобразить на 4 семейства параллельных r-мерных плоскостей аффинного пространства A_{2r}.

К каждой точке $x\in A_{2r}$ присоединим аффинный репер так, чтобы его векторы $\mathbf{e}^2_i$ лежали в плоскости первого, $\mathbf{e}^1_i$ — второго, $\mathbf{e}^3_i=\mathbf{e}^2_i-\mathbf{e}^1_i$ — третьего и $\mathbf{e}^4_i=\mathbf{e}^1_i-\lambda^j_i\mathbf{e}^2_j$ — четвертого семейства. Тогда

$$d\mathbf{x}=\underset{1}{\omega}^i\mathbf{e}^1_i+\underset{2}{\omega}^i\mathbf{e}^2_i \tag{42}$$

и уравнения 4 семейств r-плоскостей 4-ткани будут иметь вид $\underset{1}{\omega}^i=0$, $\underset{2}{\omega}^i=0$, $\underset{1}{\omega}^i+\underset{2}{\omega}^i=0$, $\lambda^i_j\underset{1}{\omega}^j+\underset{2}{\omega}^i=0$.

Поскольку r-плоскости первого семейства параллельны между собой, а второго — между собой, то

$$d\mathbf{e}^1_i = \overset{1}{\omega}{}^j_i \mathbf{e}^1_j, \quad d\mathbf{e}^2_i = \overset{2}{\omega}{}^j_i \mathbf{e}^2_j. \tag{43}$$

Для векторов $\mathbf{e}^3_i$ и $\mathbf{e}^4_i$ имеем в силу (42)

$$d\mathbf{e}^3_i = \overset{2}{\omega}{}^j_i \mathbf{e}^3_j + (\overset{2}{\omega}{}^j_i - \overset{1}{\omega}{}^j_i)\mathbf{e}^1_j, \quad d\mathbf{e}^4_i = \overset{1}{\omega}{}^j_i \mathbf{e}^4_j - (d\lambda^j_i - \lambda^k_i \overset{2}{\omega}{}^j_k + \lambda^j_k \overset{1}{\omega}{}^k_i)\mathbf{e}^2_j. \tag{44}$$

Так как r-плоскости третьего и четвертого семейств параллельны между собой, а векторы $\mathbf{e}^3_j$, $\mathbf{e}^1_j$ и $\mathbf{e}^4_j$, $\mathbf{e}^1_j$ линейно независимы, то

$$\overset{1}{\omega}{}^i_j = \overset{2}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j, \quad \nabla \lambda^i_j \equiv d\lambda^i_j - \lambda^i_k \omega^k_j + \lambda^k_j \omega^i_k = 0. \tag{45}$$

Уравнения (43) примут теперь вид

$$d\mathbf{e}^1_i = \omega^j_i \mathbf{e}^1_j, \quad d\mathbf{e}^2_i = \omega^j_i \mathbf{e}^2_j. \tag{46}$$

Дифференцируя уравнения (42) и (46) внешним образом, получим уравнения структуры для параллелизуемой 4-ткани

$$d\underset{1}{\omega}{}^i = \underset{1}{\omega}{}^j \wedge \omega^i_j, \quad d\underset{2}{\omega}{}^i = \underset{2}{\omega}{}^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k = 0. \tag{47}$$

Сравнение уравнений (45) и (47) с уравнениями (13), (14) и (19) показывает, что для параллелизуемой 4-ткани

$$a^i_{jk} = 0, \quad b^i_{jkl} = 0, \quad \lambda^i_{jk} = \mu^i_{jk} = 0. \tag{48}$$

Покажем, что эти условия достаточны для параллелизуемости 4-ткани. В самом деле, в этом случае уравнения структуры имеют вид (47) и $\nabla\lambda^i_j = 0$. Но, как мы видели, такая структура реализуется на 4 семействах параллельных r-плоскостей аффинного пространства A_{2r}. Значит, 4-ткань, удовлетворяющая условиям (48), будет параллелизуемой.

Доказана

Теорема 7. *Для того, чтобы 4-ткань была параллелизуемой, необходимо, чтобы она имела ковариантно постоянный аффинор и чтобы тензоры кручения и кривизны три-ткани* [1, 2, 3] *были равны нулю (т. е. три-ткань* [1, 2, 3] *была параллелизуемой).*

11. Определим тензоры кручения и кривизны и формы связности три-тканей $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$. Сначала напомним, что в силу проведенной канонизации для три-ткани [1, 2, 3] тензорами кручения и кривизны служат тензоры: $\underset{123}{a}{}^i_{jk} = a^i_{jk}$, $\underset{123}{b}{}^i_{jkl} = b^i_{jkl}$, а формы связности $\underset{123}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j$.

Рассмотрим теперь три-ткань [1, 2, 4]. Сделаем следующую замену базисных $\underset{1}{\omega}{}^i$, $\underset{2}{\omega}{}^i$ и форм $\underset{4}{\omega}{}^i$:

$$\underset{1}{\overline{\omega}}{}^i = \lambda^i_j \underset{1}{\omega}{}^j, \quad \underset{2}{\overline{\omega}}{}^i = \underset{2}{\omega}{}^i, \quad \underset{4}{\overline{\omega}}{}^i = \underset{4}{\omega}{}^i. \tag{49}$$

Тогда вторая группа уравнений (3) примет вид $\underset{1}{\overline{\omega}}{}^i + \underset{2}{\overline{\omega}}{}^i + \underset{4}{\overline{\omega}}{}^i = 0$, т. е. формы $\underset{1}{\overline{\omega}}{}^i$, $\underset{2}{\overline{\omega}}{}^i$, $\underset{4}{\overline{\omega}}{}^i$ удовлетворяют соотношениям, с помощью которых в [7] получены структурные уравнения (13) три-ткани.

Дифференцируя уравнения (49) внешним образом и используя при этом (13), (19) и (49), мы получим

$$d\underset{1}{\bar\omega}{}^i = \underset{1}{\bar\omega}{}^j \wedge \underset{124}{\omega}{}^i_j + \underset{124}{a}{}^i_{jk} \underset{1}{\bar\omega}{}^j \wedge \underset{1}{\bar\omega}{}^k, \quad d\underset{2}{\bar\omega}{}^i = \underset{2}{\bar\omega}{}^j \wedge \underset{124}{\omega}{}^i_j - \underset{124}{a}{}^i_{jk} \underset{2}{\bar\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\bar\omega}{}^k, \tag{50}$$

где

$$\underset{124}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j - \mu^i_{mq} \tilde\lambda^m_j \underset{2}{\omega}{}^q, \tag{51}$$

$$\underset{124}{a}{}^i_{jk} = a^i_{jk} + \mu^i_{m[j} \tilde\lambda^m_{k]} \tag{52}$$

— формы связности и тензор кручения три-ткани [1, 2, 4].

Тензор кривизны этой три-ткани определяется из соотношения $d\underset{124}{\omega}{}^i_j - \underset{124}{\omega}{}^k_j \wedge \underset{124}{\omega}{}^k_i = \underset{124}{b}{}^i{}_{jkl} \underset{1}{\bar\omega}{}^k \wedge \underset{2}{\bar\omega}{}^l$. Используя (51), (50), (14), (24), (38), находим

$$\underset{124}{b}{}^i_{jkl} = \tilde\lambda^p_k (b^i_{jpl} - \tilde\lambda^m_j a^i_{mlp} + \tilde\lambda^r_j \tilde\lambda^m_s \lambda^s_{rp} \mu^i_{ml}). \tag{53}$$

Для три-ткани [2, 3, 4] сделаем замену форм, положив $\underset{2}{\bar\omega}{}^i = (\delta^i_j - \lambda^i_j)\underset{2}{\omega}{}^j$, $\underset{3}{\bar\omega}{}^i = -\lambda^i_j \underset{3}{\omega}{}^j$, $\underset{4}{\bar\omega}{}^i = \underset{4}{\omega}{}^i$. Тогда $\underset{2}{\bar\omega}{}^i + \underset{3}{\bar\omega}{}^i + \underset{4}{\bar\omega}{}^i = 0$ и

$$d\underset{2}{\bar\omega}{}^i = \underset{2}{\bar\omega}{}^j \wedge \underset{234}{\omega}{}^i_j + \underset{234}{a}{}^i_{jk} \underset{2}{\bar\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\bar\omega}{}^k, \quad d\underset{3}{\bar\omega}{}^i = \underset{3}{\bar\omega}{}^j \wedge \underset{234}{\omega}{}^i_j - \underset{234}{a}{}^i_{jk} \underset{3}{\bar\omega}{}^j \wedge \underset{3}{\bar\omega}{}^k, \quad d\underset{234}{\omega}{}^i_j - \underset{234}{\omega}{}^k_j \wedge \underset{234}{\omega}{}^i_k = \underset{234}{b}{}^i_{jkl} \underset{2}{\bar\omega}{}^k \wedge \underset{3}{\bar\omega}{}^l,$$

где

$$\underset{234}{\omega}{}^i_l = \omega^i_l - \lambda^i_{jk} \tilde{\tilde\lambda}{}^j_l \underset{3}{\omega}{}^k + \tilde\lambda^j_l (\lambda^i_{jk} - \mu^i_{jk} - 2\lambda^i_p a^p_{jk}) \underset{2}{\omega}{}^k, \tag{54}$$

$$\underset{234}{a}{}^i_{pq} = -(\lambda^i_m a^m_{kj} + \lambda^i_{jk}) \tilde\lambda^k_p \tilde\lambda^j_q + \tilde\lambda^i_{kj} \tilde\lambda^j_q \tilde{\tilde\lambda}{}^k_p, \tag{55}$$

$$\begin{aligned} \underset{234}{b}{}^i_{juv} = \{ & b^i_{jkl} + \tilde{\tilde\lambda}{}^m_j (\lambda^i_{mkl} - \beta^i_{mkl}) + \tilde\lambda^m_j (\lambda^i_{mlk} - a^i_{plk}) \\ & + \lambda^i_{rk} \tilde{\tilde\lambda}{}^r_p \tilde\lambda^q_s (\lambda^p_{ql} - \mu^p_{ql}) - 2\lambda^i_{rs} \tilde{\tilde\lambda}{}^r_j a^s_{kl} \\ & - (\lambda^i_{tl} - \mu^i_{tl} - 2\lambda^i_m a^m_{tl}) \tilde\lambda^t_p \lambda^p_{qk} \tilde{\tilde\lambda}{}^q_r \tilde\lambda^r_j - 2\tilde\lambda^p_j \lambda^i_m b^m_{[p|k|l]} \\ & - 2\lambda^i_{mk} \tilde{\tilde\lambda}{}^m_p \tilde\lambda^q_j a^p_{ql} \}. \end{aligned} \tag{56}$$

Заметим, что из (38) следует $(\tilde{\tilde\lambda}{}^i_k + \tilde\lambda^i_k)\lambda^k_j = \tilde{\tilde\lambda}{}^i_j$. Свернув обе части этого равенства с λ^j_l, получим

$$\tilde{\tilde\lambda}{}^i_l + \tilde\lambda^i_l = \tilde{\tilde\lambda}{}^i_k \tilde\lambda^k_l. \tag{57}$$

Соотношения (57) использованы при получении (54).

Наконец, для три-ткани [3, 1, 4], сделав замену форм $\underset{3}{\bar\omega}{}^i = -\underset{3}{\omega}{}^i$, $\underset{1}{\bar\omega}{}^i = -(\delta^i_j - \lambda^i_j)\underset{1}{\omega}{}^j$, $\underset{4}{\bar\omega}{}^i = \underset{4}{\omega}{}^i$, получим

$$\underset{314}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j + 2a^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^k - \mu^i_{mk}\tilde{\tilde{\tilde{\lambda}}}{}^m_j\underset{3}{\omega}{}^k, \tag{58}$$

$$\underset{314}{a}{}^i_{jk} = -a^i_{jk} - \mu^i_{m[k}\tilde{\tilde{\tilde{\lambda}}}{}^m_{j]}, \tag{59}$$

$$\begin{aligned} \underset{314}{b}{}^i_{jlm} = b^i_{kjl}\tilde{\tilde{\tilde{\lambda}}}{}^k_m + \tilde{\tilde{\tilde{\lambda}}}{}^p_j\tilde{\tilde{\tilde{\lambda}}}{}^k_m(a^i_{plk} - \mu^i_{plk} + \mu^i_{tl}\tilde{\tilde{\tilde{\lambda}}}{}^t_q\lambda^q_{pk} \\ - \mu^i_{tl}\mu^q_{pk}\tilde{\tilde{\tilde{\lambda}}}{}^t_q - 2\mu^i_{pt}a^t_{lk} + 2a^i_{tk}\mu^t_{pl}) - 2a^t_{jk}\mu^t_{pl}\tilde{\tilde{\tilde{\lambda}}}{}^k_m\tilde{\tilde{\tilde{\lambda}}}{}^p_t. \end{aligned} \tag{60}$$

12. Отметим некоторые важные специальные классы 4-тканей, характеризуемые обращением в нуль тензоров кручения и кривизны три-тканей $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ и ковариантных производных основного аффинора.

1. Как мы уже отмечали в п. 6, условия (22) необходимы и достаточны для ковариантного постоянства основного аффинора соответственно на семействах X_1, X_2, X_3, X_4.

В первом случае $\mu^i_{jk} = 0$ влечет в силу (24) $a^i_{jkl} = \mu^i_{jkl} = 0$. В этом случае в силу (51), (52), (53), (59), (60)

$$\underset{124}{a}{}^i_{jk} = -\underset{314}{a}{}^i_{jk} = a^i_{jk}, \quad \underset{124}{b}{}^i_{jkl} = \tilde{\lambda}^p_k b^i_{jpl}, \quad \underset{314}{b}{}^i_{jlm} = (2b^i_{jkl} - b^i_{kjl})\tilde{\tilde{\tilde{\lambda}}}{}^k_m, \quad \underset{124}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j,$$

причем последнее характеризует этот класс.

Во втором случае $\lambda^i_{jk} = 0$ влечет в силу (24) $\lambda^i_{jkl} = \beta^i_{jkl} = 0$. В этом случае в силу (55), (56), (51), (54)

$$\begin{aligned} &\underset{234}{a}{}^i_{jk} = -\lambda^i_m\tilde{\lambda}^q_j\tilde{\lambda}^p_k a^m_{qp}, \\ &\underset{234}{b}{}^i_{juv} = (b^i_{jkl} - \tilde{\lambda}^p_j a^i_{plk} - 2\tilde{\lambda}^p_j\lambda^i_m b^m_{[p|k|l]})(-\tilde{\tilde{\tilde{\lambda}}}{}^l_u\tilde{\lambda}^k_v), \\ &\underset{234}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j - 2\lambda^i_m\tilde{\lambda}^k_j a^m_{kl}\underset{2}{\omega}{}^l. \end{aligned}$$

2. Пусть теперь через точку $x \in X_{2r}$, кроме 4 поверхностей ткани, проходит еще ∞^1 r-мерных поверхностей, определяемых системой $\lambda\underset{1}{\omega}{}^i + \underset{2}{\omega}{}^i = 0$, где λ — постоянное число. В этом случае $a^i_{jk} = 0$ и три-ткань $[1, 2, 3]$ называется паратактической [7]. Отметим далее, что

$$\begin{array}{lll} a^i_{jk} = \mu^i_{jk} = 0 \implies \underset{124}{a}{}^i_{jk} = \underset{314}{a}{}^i_{jk} = 0, & & \\ \quad\Updownarrow & & \\ \underset{314}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j & \underset{124}{a}{}^i_{jk} = \mu^i_{jk} = 0 \implies a^i_{jk} = 0, & \\ & \underset{314}{a}{}^i_{jk} = \mu^i_{jk} = 0 \implies a^i_{jk} = 0, & \\ a^i_{jk} = \lambda^i_{jk} = 0 \implies \underset{234}{a}{}^i_{jk} = 0, & \underset{234}{a}{}^i_{jk} = \lambda^i_{jk} = 0 \implies a^i_{jk} = 0, & \\ \quad\Updownarrow & & \\ \underset{234}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j & a^i_{jk} = \lambda^i_{jk} = \mu^i_{jk} = 0 \implies \underset{124}{a}{}^i_{jk} = \underset{234}{a}{}^i_{jk} = \underset{314}{a}{}^i_{jk} = 0, & \\ & \quad\Updownarrow & \\ & \underset{124}{\omega}{}^i_j = \underset{234}{\omega}{}^i_j = \underset{314}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j. & \end{array}$$

Объединим все эти результаты в теорему.

Теорема 8. 1) *Для того, чтобы три-ткань* $[1, 2, 3]$ *была паратактической, необходимо и достаточно, чтобы одна из три-тканей* $[1, 2, 4]$ *или* $[3, 1, 4]$ *была практической и основной аффинор был ковариантно постоянен на семействе* X_1 *или чтобы три-ткань* $[2, 3, 4]$ *была паратактической и основной аффинор был ковариантно постоянен на семействе* X_2.

2) *Совпадения форм связности* $\underset{314}{\omega^i_j} = \omega^i_j$, $\underset{234}{\omega^i_j} = \omega^i_j$, $\underset{124}{\omega^i_j} = \underset{124}{\omega^i_j} = \underset{234}{\omega^i_j} = \underset{314}{\omega^i_j}$ *являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы три-ткань* $[1, 2, 3]$ *была паратактической и основной аффинор был ковариантно постоянен на семействах* X_1, X_2 *и на всем* X_{2r}. *В этих случаях будут паратактическими соответственно три-ткани* $[1, 2, 4]$, $[3, 1, 4]$; $[2, 3, 4]$; $[1, 2, 4]$, $[3, 1, 4]$, $[2, 3, 4]$.

В последнем случае 4-ткань естественно назвать **паратактической**.

3) Условия $b^i_{jkl} = 0$ означают, что три-ткань $[1, 2, 3]$ является групповой (см. [7]). Отметим далее

$$\mu^i_{jk} = 0 \qquad \underset{1\alpha\beta}{b^i_{jkl}} = 0 \Longrightarrow \underset{1\alpha\gamma}{b^i_{jkl}} = \underset{1\beta\gamma}{b^i_{jkl}} = 0,$$

$$\lambda^i_{jk} = 0, \qquad \underset{2\alpha\beta}{b^i_{jkl}} = 0 \Longrightarrow \underset{2\alpha\gamma}{b^i_{jkl}} = \underset{2\beta\gamma}{b^i_{jkl}} = 0,$$

$$\lambda^i_{jk} = \mu^i_{jk} = 0, \ \underset{\alpha\beta\gamma}{b^i_{jkl}} = 0 \Longrightarrow \underset{\alpha\beta\delta}{b^i_{jkl}} = \underset{\beta\gamma\delta}{b^i_{jkl}} = \underset{\alpha\gamma\delta}{b^i_{jkl}} = 0.$$

Проведем доказательство этих утверждений для случаев

а) $\mu^i_{jk} = 0$, $\underset{314}{b^i_{jkl}} = 0 \Longrightarrow \underset{123}{b^i_{jkl}} = \underset{124}{b^i_{jkl}} = 0$,

б) $\lambda^i_{jk} = 0$, $\underset{234}{b^i_{jkl}} = 0 \Longrightarrow \underset{123}{b^i_{jkl}} = \underset{124}{b^i_{jkl}} = 0$,

в) $\lambda^i_{jk} = 0$, $\underset{124}{b^i_{jkl}} = 0 \Longrightarrow \underset{123}{b^i_{jkl}} = \underset{234}{b^i_{jkl}} = 0$.

В остальных случаях доказательство легко получается из (24) и (25).

Имеем

а. В этом случае $\alpha^i_{jkl} = \mu^i_{jkl} = 0$ и потому из $\underset{314}{b^i_{jkl}} = 0$ следует, что $2b^i_{jkl} = b^i_{kjl}$, т. е. $\underset{123}{b^i_{jkl}} = 0$ и $\underset{124}{b^i_{jkl}} = 0$.

б. Теперь

(61) $$\beta^i_{jkl} = \lambda^i_{jkl} = 0, \quad \alpha^i_{jml} = \lambda^k_j b^i_{klm} - \lambda^i_k b^k_{jlm}.$$

Поэтому из $\underset{234}{b^i_{jkl}} = 0$ следует $b^i_{jkl} = \tilde{\lambda}^p_j \alpha^i_{plk} + 2\tilde{\lambda}^p_j \lambda^i_m b^m_{[p|k|l]}$. Подставляя сюда α^i_{jml} из (61), находим $\underset{123}{b^i_{jkl}} = \alpha^i_{jkl} = \underset{124}{b^i_{jkl}} = 0$.

в. Здесь по-прежнему имеет место (61). Из $\underset{124}{b^i_{jkl}} = 0$ вытекает $b^i_{jpl} = \lambda^m_j \alpha^i_{mlp}$ Подставляя сюда α^i_{jkl} из (61), находим $\underset{124}{b^i_{jkl}} = \alpha^i_{jkl} = \underset{124}{b^i_{jkl}} = 0$. Доказана

Теорема 9. *Если три-ткань* $[1, \alpha, \beta]$ *(или* $[2, \alpha, \beta]$*) является групповой и основной аффинор ковариантно постоянен на семействе* X_1 (X_2), *то групповыми будут три-ткани* $[1, \alpha, \gamma]$, $[1, \beta, \gamma]$ $([2, \alpha, \gamma]$, $[2, \beta, \gamma])$. *Если* *же основной аффинор ковариантно постоянен на всей 4-ткани и одна из три-тканей* $[\alpha, \beta, \gamma]$ *групповая, то и три остальные три-ткани* $[\alpha, \beta, \gamma]$ *будут групповыми.*

В последнем случае 4-ткань может быть представлена следующим образом. Пусть G — r-параметрическая группа Ли с инвариантными формами $\underset{2}{\omega^i}$, удовлетворяющими структурным уравнениям: $d\underset{2}{\omega^i} = -a^i_{jk}\underset{2}{\omega^j} \wedge \underset{2}{\omega^k}$, где a^i_{jk} — структурные константы. Антиавтоморфизм $\varphi(g) = g^{-1}$, где $g \in G$ определяет группу G^{-1} с инвариантными формами $\underset{1}{\omega^i}$, удовлетворяющими структурным уравнениям $d\underset{1}{\omega^i} = a^i_{jk}\underset{1}{\omega^j} \wedge \underset{1}{\omega^k}$. Прямое произведение $G \times G^{-1}$ определяет $(2r)$-параматрическую группу Ли с инвариантными формами $\underset{1}{\omega^i}$, $\underset{2}{\omega^i}$, удовлетворяющими указанным выше структурным уравнениям. На $(2r)$-мерном аналитическом групповом многообразии этой группы пусть задано поле постоянного аффинора λ^i_j $(d\lambda^i_j = 0)$. Тогда на этом $(2r)$-мерном групповом многообразии вполне интегрируемые системы $\underset{1}{\omega^i} = 0$, $\underset{2}{\omega^i} = 0$, $\underset{1}{\omega^i} + \underset{2}{\omega^i} = 0$, $\lambda^i_j \underset{1}{\omega^j} + \underset{2}{\omega^i} = 0$ определяют 4 r-параметрических семейства r-мерных поверхностей 4-ткани. Одна поверхность каждого семейства, именно та, которая проходит через единицу (e, e) группы $G \times G^{-1}$ (e — единица группы G), будет подгруппой группы $G \times G^{-1}$, а остальные смежными классами по ней.

Такую 4-ткань назовем групповой 4-тканью. Для нее тензор кручения три-ткани $[1, 2, 3]$ совпадает со структурным тензором группы G, формы связности $\omega^i_j = 0$. Отсюда в силу (14) вытекает $b^i_{jkl} = 0$.

Обратно, пусть для некоторой 4-ткани $b^i_{jkl} = \lambda^i_{jk} = \mu^i_{jk} = 0$. Тогда уравнения (14), (15) принимают вид

$$d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k = 0, \quad \nabla a^i_{jk} = 0. \tag{62}$$

Первая группа уравнений (62) означает, что многообразие X_{2r} обладает абсолютным параллелизмом. Поэтому можно взять репер в точке $x \in X_{2r}$ и разнести его параллельно по X_{2r}. В полученном семействе реперов $\omega^i_j = 0$. Уравнения (15) дадут тогда $da^i_{jk} = 0$, т. е. компоненты тензора кручения постоянны, уравнения (13) совпадут с уравнениями структуры группы $G \times G^{-1}$, соотношения (16) превратятся в тождества Якоби для констант группы G, а соотношения (20) в силу $\lambda^i_{jk} = \mu^i_{jk} = 0$ примут вид

$$\lambda^i_p a^p_{jk} + \lambda^p_{[k} \lambda^q_{j]} a^i_{pq} = 0. \tag{63}$$

Из этих рассуждений и результатов работы [7] вытекает

Теорема 10. *Для того, чтобы 4-ткань была групповой, необходимо и достаточно, чтобы три-ткань* $[1, 2, 3]$ *была групповой, чтобы на ней было задано поле постоянного аффинора* λ^i_j, *связанного с тензором кручения три-ткани* $[1, 2, 3]$ *соотношениями* (63).

4) Условия $a^i_{jk} = b^i_{jkl} = 0$ характеризуют параллелизуемость три-ткани $[1, 2, 3]$ (см. [7]). Из

$$a^i_{jk} = b^i_{jkl} = \mu^i_{jk} = 0 \qquad \Longrightarrow \quad \underset{124}{a^i_{jk}} = \underset{314}{a^i_{jk}} = \underset{124}{b^i_{jkl}} = \underset{314}{b^i_{jkl}} = 0,$$

$$a^i_{jk}=b^{\,i}_{jkl}=\lambda^i_{jk}=0 \quad \Longrightarrow \quad \underset{234}{a}{}^i_{jk}=\underset{234}{b}{}^i_{jkl}=0,$$

$$a^i_{jk}=b^{\,i}_{jkl}=\lambda^{\,i}_{jk}=\mu^{\,i}_{jk}=0 \Longrightarrow \underset{124}{a}{}^i_{jk}=\underset{314}{a}{}^i_{jk}=\underset{234}{a}{}^i_{jk}=\underset{124}{b}{}^i_{jkl}=\underset{314}{b}{}^i_{jkl}=\underset{234}{b}{}^i_{jkl}=0$$

вытекает

Теорема 11. *Если три-ткань* [1, 2, 3] *параллелизуема и основной аффинор ковариантно постоянен на семействе* X_1 (X_2 *или на всем* X_{2r}), *то будут параллелизуемыми три-ткани* [1, 2, 4], [3, 1, 4] ([2, 3, 4] *или* [1, 2, 4], [3, 1, 4], [2, 3, 4]). *В последнем случае вся 4-ткань будет параллелизуема.*

Отметим еще, что параллелизуемая 4-ткань следующим образом может быть получена из групповой. В случае, если для групповой 4-ткани группа G (а значит и G^{-1}, и $G\times G^{-1}$) будет коммутативной, то $a^i_{jk}=0$. В этом случае соотношения (63) будут тождественно удовлетворены и 4-ткань будет параллелизуемой.

Наоборот, всякая параллелизуемая 4-ткань может быть рассмотрена как 4-ткань, порожденная указанным выше способом на групповом многообразии $G\times G^{-1}$, где G — r-параметрическая коммутативная группа Ли, если на этом многообразии дополнительно задано поле постоянного аффинора.

Теорема 12. *Для того, чтобы 4-ткань* $\mathfrak{M}_r$ *была параллелизуемой, необходимо и достаточно, чтобы она порождалась прямым произведением коммутативной* r*-параметрической группы Ли* G *на группу* G^{-1}, *элементы которой получаются из элементов* G *с помощью антиавтоморфизма* $\varphi(g)=g^{-1}$, $g\in G$ *и чтобы основной аффинор был ковариантно постоянен на групповом многообразии* $G\times G^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Blaschke, G. Bol. Geometrie der Gewebe. Berlin, 1938.
2. В. Бляшке. Введение в геометрию тканей. Москва, 1959.
3. А. Е. Либер. О двумерных пространствах с алгебраической метрикой. *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*, вып. IX. Москва — Ленинград, 1952, 319—350.
4. В. И. Шуликовский. О внутренних связностях N-тканей. *Науч. тр. Высш. пед. ин-та. Пловдив* **4**, 1966, № 1, с. 13—22.
5. G. Bol. Über 3-Gewebe in vierdimensionalen Raum. *Math. Ann.*, **110**, 1935, 431—463.
6. Shiing-Shen Chern. Eine Invariantentheorie der 3-Gewebe aus r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten in R_{2r}. *Abhandl Math. Seminar Univ. Hamburg*, **11**, 1936, 333—358.
7. М. А. Акивис. О три-тканях многомерных поверхностей. *Труды геометрического семинара Ин-та науч. информ. АН СССР*, 2. 1969, 7—31.
8. В. В. Гольдберг. О $(n+1)$-тканях многомерных поверхностей. *Известия Мат. инст. БАН*, 15, 1974, 405—424.
9. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. *Труды Моск. мат. о-ва*, **2**, 1953, 275—382.
10. E. Cartan. Les sous-groupes des groupes continus de transformations. *Ann. Sci. Ecole Normale Sup.*, **25**, 1908, 57—194.
11. Э. Картан. Пространства аффинной, проективной и конформной связностей. Казань, 1962.
12. М. А. Акивис. Об изоклинных три-тканях и их интерпретации в линейчатом пространстве проективной связности. *Сиб. мат. ж.*, **15**, 1974, 3—15.

Department of Mathematics, Lehigh University
Bethlehem, PA 18015 USA

Поступила 29. 12. 1977