Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О МИНИМАЛЬНЫХ t-ГРАФАХ

НЕДЯЛКО Д. НЕНОВ, НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ

Рассматриваются графы с кликовым числом 4 и 5, содержащие монохроматический треугольник при произвольной двуцветной раскраске ребер. В частности, получены новые оценки для некоторых чисел, связанных с этими графами.

1. Введение и формулировка результатов. Рассматриваются только конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Будем говорить, что задана 2-раскраска ребер графа, если любое из ребер покрашено в красный или зеленый цвет. Если в 2-раскраске ребер графа все ребра некоторого треугольника имеют одинаковый цвет, будем говорить, что этот треугольник монохроматический в данной 2-раскраске.

Хорошо известно (К. В. Боствик), что в любой 2-раскраске ребер полного графа с шестью вершинами существует монохроматический треугольник.

Определение. *Граф G будем называть t-графом, если в любой 2-раскраске его ребер есть монохроматический треугольник.*

Будем говорить, что вершины $v_1, \dots, v_p$ графа G составляют p-клику, если любые две из них смежны. Если граф G содержит s-клику, однако не содержит $(s+1)$-клику, будем говорить, что он имеет кликовое число s, и будем писать $k(G)=s$.

Если $k(G)\geq 6$, согласно предложению Боствика, граф G является t-графом. Эрдеш и Хайнал [4] поставили вопрос о существовании t-графов G, для которых $k(G)\leq 5$. Грахам в [5] привел пример t-графа G, для которого $k(G)=5$. Шойбле в [7] построил t-граф G, для которого $k(G)=4$, а Фолкман доказал, что существует t-граф G, для которого $k(G)=3$.

Очевидно, если некоторый граф содержит t-подграф, он тоже является t-графом. Поэтому целесообразно ввести следующее

Определение. *t-граф G будем называть минимальным, если у него нет собственных t-подграфов.*

Любой t-граф содержит минимальный t-подграф. Поэтому следует изучать только минимальные t-графы.

В [1] было построено бесконечно много минимальных t-графов с кликовым числом 5. В [2] указаны бесконечно много минимальных t-графов с кликовым числом 4. В настоящей работе мы построим новые серии минимальных t-графов с кликовым числом 5, которые различны от уже построенных минимальных t-графов в [1]. Будут построены тоже новые бесконечные серии минимальных t-графов с кликовым числом 4, которые не входят в серии из [2].

Через $V(G)$ и $E(G)$ будем обозначать соответственно множество вершин и множество ребер графа G. Следуя Зыкову [3], под соединением G_1+G_2

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 6, 1980, с. 128—142.

двух графов G_1 и G_2 будем подразумевать граф G, для которого $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E_{12}$, где E_{12} состоит из всех ребер $[v_1, v_2]$, $V_1 \in v(G_1)$, $v_2 \in v(G_2)$. Ребра из E_{12} будем называть промежуточными. То, что $G = G_1 + G_2$, графически будем изображать, как на рис. 1.

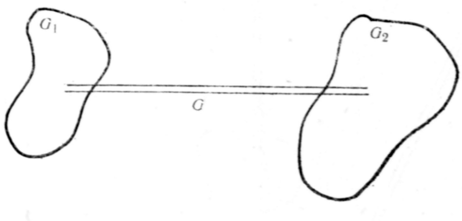

Рис. 1

Объединением $G_1 \cup G_2$ называется граф G с $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$.

Пусть $[v_1, v_2] \in E(G_2)$. Роль в наших конструкциях будет играть граф $(G_1 + [v_1, v_2]) \cup G_2$, который графически будем изображать способом, указанным на рис. 2. Он состоит из всех вершин и ребер графов G_1 и G_2, к которым присоединены и все промежуточные ребра соединения $G_1 + [v_1, v_2]$.

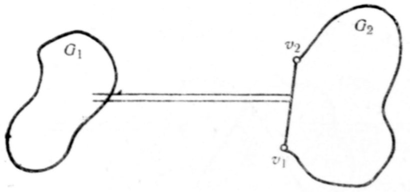

Рис. 2

С помощью рассмотренных операций над графами сконструируем несколько графов, необходимых для формулировки основных результатов.

1. Пусть $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ — произвольные графы. Через $F_1(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ обозначим граф, заданный на рис. 4.

2. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные графы. Через $F_2(A_1, A_2, A_3, A_4)$ обозначим граф, заданный на рис. 3.

3. Пусть A_1, A_2, A_3 — произвольные графы. Через $F_3(A_1, A_2, A_3)$ обозначим граф, заданный на рис. 5.

4. Пусть A_1, A_2, A_3 — произвольные графы. Через $F_4(A_1, A_2, A_3)$ обозначим граф, заданный на рис. 6.

Через C_n обозначим простой цикл длины n.

В настоящей работе будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ — *натуральные числа,* $s_i > 1$ $i = 1, 2, \ldots, 6$. *Тогда граф* $F_1(C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1}, C_{2s_5+1}, C_{2s_6+1})$ *является минимальным t-графом с кликовым числом 4.*

Теорема 2. *Пусть* s_1, s_2, s_3, s_4 — натуральные числа, $s_i > 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. *Тогда граф* $F_2(C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1})$ *является минимальным t-графом с кликовым числом 4.*

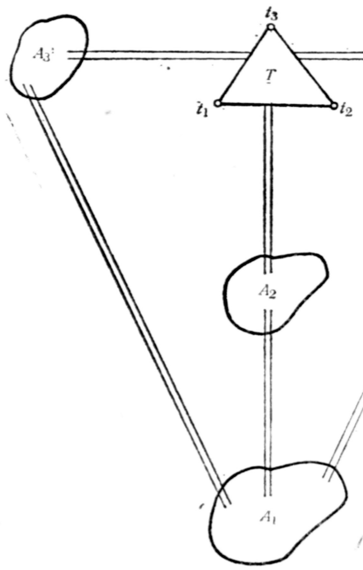

Рис. 3

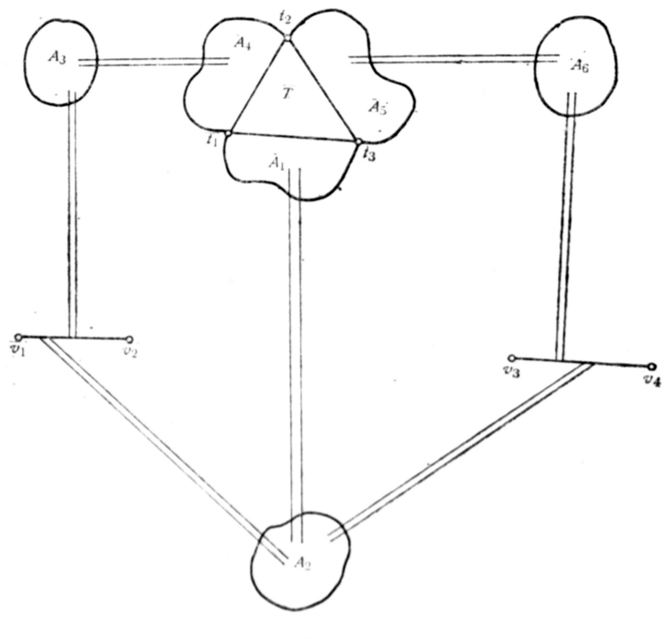

Рис. 4

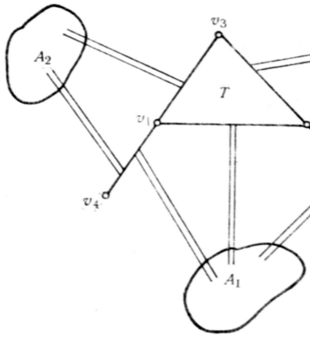

Рис. 5

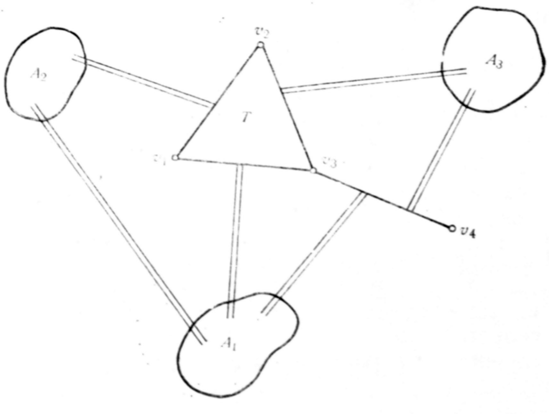

Рис. 6

Теорема 3. *Пусть s_1, s_2, s_3 — натуральные числа, $s_i \geqq 1$, $i=1, 2, 3$. Тогда граф $F_3(C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1})$ является минимальным t-графом. Если $s_i > 1$, $i=1, 2, 3$, тогда кликовое число этого графа равно 4, а в противном случае — 5.*

Теорема 4. *Граф $F_4(C_{2r_1+1}, C_{2r_2+1}, C_{2r_3+1})$ является t-графом. Если $r_1 > 1$, $r_2 > 1$, то $E_4(C_{2r_1+1}, C_{2r_2+1}, C_{2r_3+1})$ является минимальным t-графом с кликовым числом 5.*

В конце этого пункта приведем уже опубликованный результат, тесно связанный с только что перечисленными:

5. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 — произвольные графы. Через $F_5(A_1$ A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, $A_7)$ обозначим граф, заданный на рис. 7.

В [2] было доказано, что если $s_i > 1$, $i=1, 2, \ldots, 7$, то граф $F_5(C_{2s_1+1}$, C_{2s_2+s}, C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1}, C_{2s_5+1}, C_{2s_6+1}, $C_{2s_7+1})$ является минимальным t-графом с кликовым числом 4.

2. О правильных раскрасках соединения $C_{2r+1}+A$.

Определение. *2-раскраску ребер графа назовем правильной, если в ней нет монохроматических треугольников.*

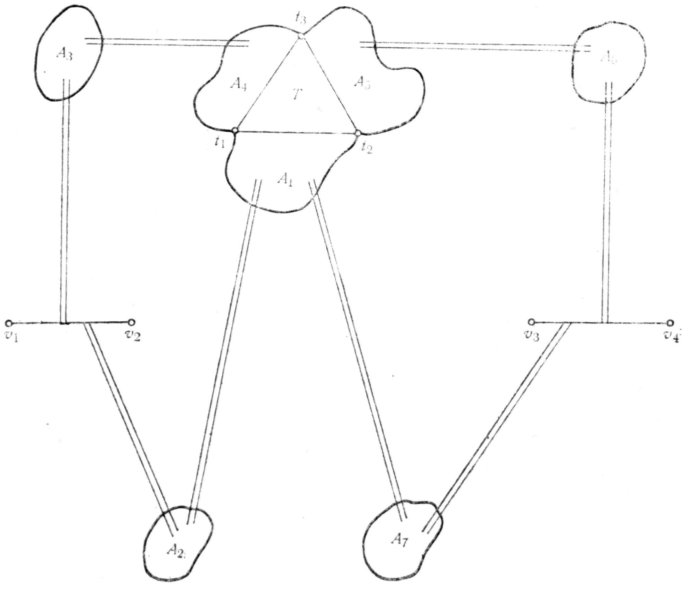

Рис. 7

Ясно, что G является t-графом тогда и только тогда, когда не существует ни одной правильной 2-раскраски его ребер.

Для доказательства факта, что графы F_1, F_2, F_3 и F_4, участвующие в формулировках теорем, являются t-графами, нам понадобятся некоторые предложения о правильных раскрасках соединения $C_{2r+1}+A$, где C_{2r+1} — простой цикл длины $2r+1$, а A — некоторый специальный граф. Естественно, такое соединение не всегда обладает правильной раскраской. Однако, если $r>1$ и A не содержит треугольника, тогда $C_{2r+1}+A$ обязательно имеет правильную раскраску. Чтобы убедиться в этом, достаточно покрасить все ребра графов C_{2r+1} и A в красный, а все промежуточные ребра — в зеленый цвет. Эта 2-раскраска правильная, так как нет ни красных, ни зеленых треугольников.

Лемма 1. *Пусть $G=C_{2r+1}+e$, где e — ребро. В произвольной правильной 2-раскраске ребер графа G из любой вершины ребра e выходят не более r промежуточных ребер, имеющих такой же цвет, как и ребро e.*

Доказательство. Согласно сделанному выше замечанию, правильные 2-раскраски ребер графа G существуют. Рассмотрим некоторую правильную раскраску и пусть ребро $e=[v_1, v_2]$ в ней — красное. Допустим, что утверждение не верно, и пусть из v_1 выходят хотя бы $r+1$ красных ребер. Так как C_{2r+1} имеет $2r+1$ вершин, тогда из v_1 выходят обязательно две красные промежуточные ребра $[v_1, w_1]$ и $[v_1, w_2]$, для которых w_1 и w_2 — смежные вершины графа C_{2r+1}. Чтобы в 4-клике $[v_1, v_2, w_1, w_2]$ не было красного треугольника, ребра $[w_1, w_2]$, $[w_2, v_2]$ и $[v_2, w_2]$ будут зелеными, так что треугольник $[w_1, w_2, v_2]$ — зеленый. Полученное противоречие завершает доказательство.

Из этой леммы легко вывести следующее предложение.

Лемма 2. *Пусть $G=C_{2r+1}+A$ не является t-графом. Тогда в произвольной правильной раскраске графа G любые две смежные ребра графа A получат один и тот же цвет. В частности, любая цепь графа A будет монохроматической и, значит, если граф A связен, он сам будет монохроматическим.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую правильную 2-раскраску ребер графа G. Пусть $[v_1, v_2]$ и $[v_1, v_3]$ — смежные ребра графа A. Допустим, противно тому, что надо доказать, что ребра $[v_1, v_2]$ и $[v_1, v_3]$ разноцветные, и пусть первое из них — красное, а второе — зеленое. Согласно лемме 1, в применении к графу $C_{2r+1}+[v_1, v_2]$, из v_1 выходят не более r красных промежуточных ребер. Применяя лемму 1 к графу $C_{2r+1}+[v_1, v_3]$, заключаем, что из v_1 выходят не более r зеленых промежуточных ребер. Оказывается, из v_1 выходят не более $2r$ промежуточных ребер. Полученное противоречие показывает, что любые два смежные ребра графа A одноцветны. Тогда, очевидно, любая цепь — монохроматическая. В частности, если граф A — связный, он будет монохроматическим в любой правильной 2-раскраске ребер графа G.

Из леммы 1 легко вывести и следующее предложение.

Лемма 3. *Если в некоторой правильной раскраске ребер графа $C_{2r+1}+e$, где e — ребро, все ребра подграфа C_{2r+1} одного и того же цвета, тогда и ребро e имеет тот самый цвет.*

Доказательство. Согласно лемме 1, в произвольной правильной раскраске ребер графа G из любой вершины ребра e выходят не более чем r промежуточных ребер такого цвета, что и у e. Следовательно, если ребро e зеленое, тогда из любой его вершины выходят хотя бы $r+1$ красных промежуточных ребер и, значит, хотя бы две из них имеют смежные в C_{2r+1} вершины. Чтобы раскраска была правильной при положении, что все ребра C_{2r+1} одинакового цвета, тогда они обязательно должны быть зелеными Лемма доказана.

Из лемм 2 и 3 легко выводится следующая

Лемма 4. *В любой правильной раскраске ребер графа $G=C_{2r+1}+C_{2s+1}$ все ребра графов C_{2r+1} и C_{2s+1} имеют одинаковый цвет.*

Доказательство. Пусть дана произвольная правильная 2-раскраска ребер графа G. Двукратным применением леммы 2 заключаем, что C_{2r+1} и C_{2s+1} монохроматические Тогда с помощью леммы 3, очевидно, заключаем, что C_{2r+1} и C_{2s+1} имеют одинаковый цвет. Доказательство леммы завершено.

В начале этого пункта мы заметили, что если граф A не содержит треугольников и $r>1$, тогда $G=C_{2r+1}+A$ не является t-графом. Из леммы 2 следует, что в любой правильной раскраске ребер графа $C_{2r+1}+C_3$ треугольник C_3 монохроматический. Следовательно, не существует правильная раскраска ребер графа C_3+C_{2r+1}, т. е. этот граф является t-графом. Пусть теперь A содержит треугольник. Тогда $C_{2r+1}+A$ содержит t-граф $C_{2r+1}+C_3$ и, следовательно сам является t-графом, см [1].

Окончательно нами доказано

Следствие 1. *$C_{2r+1}+A$ при $r>1$ является t-графом тогда и только тогда, когда подграф A содержит треугольник.*

В заключении этого пункта отметим, что в случае $r=2$ лемма 3 содержится в [7].

3. О правильных раскрасках некоторых подграфов соединения $C_{2r+1}+A$. Для доказательства минимальности t-графов F_1, F_2, F_3 и F_4, участвующих в формулировках теорем, нам понадобятся несколько вспомогательных предложений.

Лемма 5. *Положим $G=C_{2r+1}+e$, где $r>1$ и e — ребро. Если граф G' получается из графа G удалением какого-нибудь промежуточного ребра, тогда существует правильная 2-раскраска ребер графа G', при которой все ребра графа C_{2r+1} — красные, а ребро e — зеленое.*

Доказательство. Пусть $C_{2r+1}=w_1w_2\ldots w_{2r+1}$ и $e=[v_1, v_2]$. Пусть G' получается из G удалением ребра $[v_1, w_2]$. Искомую правильную 2-раскраску можно построить следующим образом:

1) ребро $[v_1, v_2]$ — зеленое;
2) ребра $[v_1, w_{2i+1}]$, $i=1, \ldots, r$, — красные;
3) ребра $[v_1, w_{2i}]$, $i=1, \ldots, r$, — зеленые;
4) ребра $[v_2, w_{2i+1}]$, $i=0, \ldots, r$, — зеленые;
5) ребра $[v_2, w_{2i}]$, $i=1, \ldots, r$, — красные;
6) все ребра C_{2r+1} — красные.

Лемма 6. *Пусть G' получается из графа $G=C_{2r+1}+e$ удалением какого-нибудь ребра подграфа C_{2r+1}. Тогда существует правильная 2-раскраска ребер графа G', при которой ребро e — зеленое, а все остальные ребра графа C_{2r+1} — красные.*

Доказательство. Пусть $C_{2r+1}=w_1w_2\ldots w_{2r+1}$ и $e=[v_1, v_2]$. Пусть G' получается из G удалением ребра $[w_1, w_{2r+1}]$. Искомую правильную 2-раскраску ребер графа G' построим следующим образом:

1) ребра $[v_1, w_{2i+1}]$, $i=0, \ldots, r$, — красные;
2) ребра $[v_1, w_{2i}]$, $i=1, \ldots, r$, — зеленые;
3) ребра $[v_2, w_{2i+1}]$, $i=0, \ldots, r$, — зеленые;
4) ребра $[v_2, w_{2i}]$, $i=1, \ldots, r$, — красные;
5) все ребра C_{2r+1} без $[w_1, w_{2r+1}]$ — красные;
6) ребро $[v_1, v_2]$ — зеленое.

Лемма 7. *Если граф G' получается из графа $G=C_{2r+1}+C_{2s+1}$, $r>1$, $s>1$ удалением некоторого промежуточного ребра, тогда существует правильная 2-раскраска ребер G', при которой все ребра подграфов C_{2r+1} и C_{2s+1} за исключением двух смежных ребер последнего красные.*

Доказательство. Пусть $C_{2r+1}=w_1w_2\ldots w_{2r+1}$ и $C_{2s+1}=v_1v_2\ldots v_{2s+1}$, а G' получается из G удалением ребра $[w_1, v_1]$. Искомую 2-раскраску ребер графа G' построим следующим образом:

1) все ребра C_{2r+1} — красные;
2) все ребра C_{2s+1} за исключением $[v_1, v_2]$ и $[v_1, v_{2s+1}]$ — красные;
3) ребра $[v_1, w_{2i+1}]$, $i=1, \ldots, r$, — зеленые;
4) ребра $[v_1, w_{2i}]$, $i=1, \ldots, r$, — красные;
5) ребра $[v_2, w_{2i+1}]$ и $[v_{2s+1}, w_{2i+1}]$, $i=1, \ldots, r$, — красные;
6) ребра $[v_2, w_{2i}]$ и $[v_{2s+1}, v_{2i}]$, $i=1, \ldots, r$ — зеленые;
7) все остальные промежуточные ребра — зеленые;
8) ребра $[v_1, v_2]$ и $[v_1, v_{2s+1}]$ — произвольным способом.

Лемма 8. *Пусть граф G' получается из графа $G=C_{2r+1}+C_{2s+1}$, $r>1$, $s>1$ удалением какого-нибудь ребра подграфа C_{2s+1}. Тогда существует правильная 2-раскраска ребер графа G', при которой все оставшиеся ребра подграфа C_{2s+1}, а также все ребра подграфа C_{2r+1} за исключением двух смежных — красные.*

Доказательство. Пусть $C_{2r+1}=w_1w_2\dots w_{2r+1}$ и $c_{2s+1}=v_1v_2\dots v_{2s+1}$, а G' получается из G удалением ребра $[v_1, v_{2s+1}]$. Искомую 2-раскраску ребер графа G' построим, покрасив

1) все ребра C_{2s+1} (без $[v_1, v_{2s+1}]$) — в красный цвет;
2) все ребра C_{2r+1} за исключением $[w_1, w_2]$ и $[w_1, w^{2r+1}]$ — в зеленый цвет;
3) ребра $[w_1, v_{2i+1}]$, $i=0, 1, \dots, s$, — в красный цвет;
4) ребра $[w_1, v_{2i}]$, $i=1, \dots, s$, — в зеленый цвет;
5) ребра $[w_2, v_{2i+1},]$ и $[w_{2r+1}, v_{2i+1}]$, $i=0, 1, \dots, s$, — в красный цвет.
6) ребра $[w_2, v_{2i}]$ и $[w_{2r+1}, v_{2i}]$, $i=1, \dots$, s, — в красный цвят;
7) все остальные промежуточные ребра — в зеленый цвят;
8) ребра $[w_1, w_2]$ и $[w_1, w_{2r+1}]$ — произвольным способом.

Лемма 9. *Пусть $G=C_{2r+1}+e$, где e — ребро. Тогда существует правильная 2-раскраска ребер графа G, при которой две смежные ребра подграфа C_{2r+1}, а также ребро e — зеленые, а все остальные ребра графа C_{2r+1} — красные.*

Доказательство. Пусть $C_{2r+1}=w_1w_2\dots w_{2r+1}$ и $e=[v_1, v_2]$. Искомую, 2-раскраску построим следующим образом:

1) ребра $[w_1, w_{2r+1}]$, $[w_1, w_2]$, $[v_1, v_2]$ — зеленые;
2) все остальные ребра C_{2r+1} — красные;
3) ребра $[v_1, w_1]$ и $[v_2, w_1]$ — красные;
4) ребра $[v_1, w_{2i}]$, $i=1, \dots, r$, — красные;
5) ребра $[v_1, w_{2i+1}]$, $i=1, \dots, r$, — зеленые;
6) ребра $[v_2, w_{2i}]$, $i=1, \dots, r$, — зеленые;
7) ребра $[v_2, w_{2i+1}]$, $i=1, \dots, r$, — красные;

Лемма 10. *Пусть $G=C_3+A$, где хроматическое число $\chi(A)=2$. Тогда существует правильная 2-раскраска ребер графа G, при которой все ребра подграфа A имеют одинаковый цвет.*

Доказательство. Пусть $C_3=w_1w_2w_3$, а $V(A)=\{v_1, \dots, v_t\}\cup\{v_{t+1}, \dots, v_m\}$, где $\{v_1, \dots, v_t\}$ и $\{v_{t+1}, \dots, v_m\}$ — хроматические классы. Искомую 2-раскраску ребер графа G строим следующим образом:

1) все ребра графа A — красные;
2) ребра $[w_1, w_2]$, $[w_1, w_3]$ — красные, а $[w_2, w_3]$ — зеленое;
3) ребра $[w_2, v_i]$, $i=1, \dots, t$, — красные;
4) ребра $[w_3, v_i]$, $i=t+1, \dots, m$, — красные;
5) все остальные ребра зеленые.

Лемма 11. *Пусть граф $G=C_{2r+1}+A$, где $V(A)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E(A)=\{[v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_3, v_4]\}$. Пусть G' получается из G удалением какого-нибудь промежуточного ребра, имеющего вершину в $\{v_1, v_2, v_3\}$. Тогда существует правильная 2-раскраска ребер графа G', при которой $[v_1, v_2]$ — красное, а $[v_2, v_3]$ и $[v_3, v_4]$ — зеленые.*

Доказательство. Пусть $C_{2r+1}=w_1w_2\dots w_{2r+1}$. Предположим, что удалено промежуточное ребро, выходящее из v_1 (например, $[v_1, w_1]$). Искомую правильную 2-раскраску строим следующим образом:

1) $[w_1, w_2]$ и $[w_1, w_{2r+1}]$ — зеленые;
2) остальные ребра C_{2r+1} — красные;
3) $[v_1, v_2]$ — красное, а $[v_2, v_3]$ и $[v_3, v_4]$ — зеленые;
4) все ребра $[w_1, v_i]$, $i=2, 3, 4$, — красные;
5) $[v_1, w_{2i}]$ и $[v_3, w_{2i}]$, $i=1, \dots, r$, — красные;
6) $[v_1, w_{2i+1}]$ и $[v_3, w_{2i+1}]$, $i=1, \dots, r$, — зеленые;
7) $[v_2, w_{2i}]$ и $[v_4, w_{2i}]$, $i=1, \dots, r$, — зеленые;
8) $[v_2, w_{2i+1}]$ и $[v_4, w_{2i+1}]$, $i=0, \dots, r$, — красные.

В случае, когда удалено промежуточное ребро, выходящее из v_2 или v_3, правильную 2-раскраску можно построить аналогично.

Из леммы 11 легко вывести следующее, необходимое в дальнейшем

Следствие 2. *Пусть* $G=C_{2r+1}+A$, *где* $V(A)=\{v_1, v_2, v_3\}$ *и* $F(A)=\{[v_1, v_2], [v_2, v_3]\}$. *Если граф* G' *получается из* G *удалением промежуточного ребра то произвольную раскраску ребер* $[v_1, v_2]$ *и* $[v_2, v_3]$ *можно продолжить, до правильной 2-раскраски ребер графа* G.

Лемма 12. *Пусть* $G=C_{2r+1}+A$, *где* $V(A)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E(A)=\{[v_1, v_2]$ $[v_2, v_3]$, $[v_3, v_4]\}$. *Пусть* G' *получается из* G *удалением какого-нибудь ребра цикла* C_{2r+1}. *Тогда существует правильная 2-раскраска ребер графа* G', *при которой* $[v_1, v_2]$ *и* $[v_3, v_4]$ — *красные, а* $[v_2, v_3]$ — *зеленое.*

Доказательство. Пусть $C_{2r+1}=w_1w_2\ldots w_{2r+1}$ и предположим, что удалено ребро $[w_1, w_{2r+1}]$. Искомую 2-раскраску строим следующим образом:

1) ребра цикла C_{2r+1} без $[w_1, w_{2r+1}]$ — зеленые;
2) $[v_1, v_2]$ и $[v_3, v_4]$ — красные, а $[v_2, v_3]$ — зеленое;
3) $[v_1, w_{2i+1}]$ и $[v_3, w_{2i+1}]$, $i=0, \ldots, r$, — красные;
4) $[v_1, w_{2i}]$ и $[v_3, w_{2i}]$, $i=1, \ldots, r$, — зеленые;
5) $[v_2, w_{2i+1}]$ и $[v_4, w_{2i+1}]$, $i=0, \ldots, r$, — зеленые;
6) $[v_2, w_{2i}]$ и $[v_4, w_{2i}]$, $i=1, \ldots, r$, — красные.

4. Доказательство теоремы 1. Сначала докажем, что кликовое число графа $F_1(C_{2s_1+1}, \ldots, C_{2s_6+1})$ равно 4. Рассмотрим произвольные пять вершин этого графа. Если три из этих вершин являются вершинами некоторого из циклов C_{2s_i}, $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$, то две из этих вершин несмежны. В противном случае рассматриваемые пять вершин участвуют в хотя бы трех из подграфов $C_{2s_1+1}, \ldots, C_{2s_6+1}$, $[v_1, v_2]$, $[v_3, v_4]$. Нетрудно заметить, что в этом случае непременно две из этих пяти вершин несмежны. Следовательно, граф $F_1(C_{2s_1+1}, \ldots, C_{2s_6+1})$ не содержит 5-клик. С другой стороны, очевидно, $F_1(C_{2s_1+1}, \ldots C_{2s_6+1})$ содержит 4-клику. Следовательно, кликовое число графа $F_1(C_{2s_1+1}, \ldots C_{2s_6+1})$ равно 4.

Теперь докажем, что $F_1(C_{2s_1+1}, \ldots, C_{2s_6+1})$ является t-графом. Предположим противное. Рассмотрим произвольную правильную 2-раскраску ребер рассматриваемого графа. Согласно лемме 4, ребра циклов C_{2s_1+1} и C_{2s_2+1} имеют одинаковый цвет, например, красный. Согласно лемме 3, ребро $[v_1, v_2]$ тоже красное. Из леммы 4 следует, что все ребра графов C_{2s_3+1} и C_{2s_4+1} имеют одинаковый цвет. Согласно лемме 3, ребра графа C_{2s_3+1} имеют такой же цвет, как и ребро $[v_1, v_2]$, т. е. красный. Следовательно, ребра цикла C_{2s_4+1} тоже красные. Аналогично доказывается, что ребра графов C_{2s_6+1}, $[v_3, v_4]$, C_{2s_5+1} тоже красные. Мы получили, что треугольник T монохроматический. Это является противоречием, так как рассматриваемая 2-раскраска правильна. Следует заметить, что нигде не воспользовались фактом, что $s_i>1$, $i=1,\ldots, 6$. В дальнейшем эти неравенства играют существенную роль.

Осталось показать, что $F_1(C_{2s_1+1}, \ldots, C_{2s_6+1})$ является минимальным t-графом. Для этого докажем, что после удаления произвольного ребра графа $F_1(C_{2s_1+1}, \ldots, C_{2s_6+1})$ получается подграф, который не является t-графом.

Случай 1. Удалено ребро треугольника T. В этом случае ребра подграфов (без удаленного) C_{2s_1+1}, $C_{2s_2+1}, \ldots, C_{2s_6+1}$ и ребра $[v_1, v_2]$, $[v_3, v_4]$ покрасим в красный, а все остальные ребра — в зеленый цвет. Полученная 2-раскраска — правильная.

Случай 2. Удалено ребро одного из циклов C_{2s_4+1}, C_{2s_3+1}, например, C_{2s_4+1}, которое не является ребром треугольника T. Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер полученного подграфа:

1) ребра полученного подграфа графа $C_{2s_3+1}+C_{2s_4+1}$ покрасим, как в лемме 8;

2) ребра $C_{2s_3+1}+[v_1, v_2]$ покрасим, как в лемме 9, используя полученную 2-раскраску ребер C_{2s_3+1};

3) все ребра циклов C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_5+1}, C_{2s_6+1} и ребро $[v_3, v_4]$ — зеленые;

4) все остальные ребра — красные.

Построенная 2-раскраска — правильная.

Случай 3. Удалено ребро цикла C_{2s_1+1}, которое не является ребром треугольника T. Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер полученного подграфа:

1) ребра полученного подграфа графа $C_{2s_1+1}+C_{2s_2+1}$ покрасим, как в лемме 8;

2) ребра графа $C_{2s_2+1}+[v_1, v_2]$ покрасим, как в лемме 9, используя полученную 2-раскраску ребер цикла C_{2s_2+1}; то же самое сделать с графом $C_{2s_2+1}+[v_3, v_4]$;

3) ребра циклов C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1}, C_{2s_6+1} и C_{2s_5+1} — зеленые;

4) промежуточные ребра графов $C_{2s_3+1}+[v_1, v_2]$, $C_{2s_3+1}+C_{2s_4+1}$, $C_{2s_6+1}+[v_3, v_4]$ и $C_{2s_6+1}+C_{2s_5+1}$ — красные;

Полученная 2-раскраска правильная.

Случай 4. Удалено промежуточное ребро одного из подграфов $C_{2s_3+1}+C_{2s_4+1}$, $C_{2s_5+1}+C_{2s_6+1}$, например, $C_{2s_3+1}+C_{2s_4+1}$. Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер полученного подграфа:

1) ребра полученного подграфа графа $C_{2s_2+1}+C_{2s_4+1}$ покрасим, как в лемме 7, так чтобы все ребра цикла C_{2s_4+1} были красными;

2) ребра подграфа $C_{2s_3+1}+[v_1, v_2]$ покрасим согласно лемме 9, так чтобы ребро $[v_1, v_2]$ было красным;

3) ребра циклов C_{2s_2+1}, C_{2s_6+1}, C_{2s_5+1} и C_{2s_1+1}, а также ребро $[v_3, v_4]$ покрасим в зеленый цвет;

4) все оставшиеся ребра покрасим в красный цвет.

Полученная 2-раскраска — правильная.

Случай 5. Удалено ребро одного из циклов C_{2s_3+1} или C_{2s_6+1}, например, C_{2s_3+1}. Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер полученного подграфа:

1) ребра полученного подграфа графа $C_{2s_3+1}+C_{2s_4+1}$ покрасим как в лемме 8, так чтобы ребро $[t_1, t_2]$ было зеленым, а все неудаленные ребра C_{2s_3+1} — красными;

2) все ребра циклов C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_5+1}, C_{2s_6+1} и ребра $[v_1, v_2]$, $[v_3, v_4]$ — красные;

3) все остальные ребра — зеленые.

Полученная 2-раскраска — правильная.

Случай 6. Удалено промежуточное ребро графа $C_{2s_3+1}+[v_1, v_2]$ или $C_{2s_6+1}+[v_3, v_4]$, например, $C_{2s_3+1}+[v_1, v_2]$. Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер полученного подграфа:

1) ребра полученного подграфа графа $C_{2s_3+1}+[v_1, v_2]$ покрасим, как в лемме 5;

2) ребра цикла C_{2s_4+1} — красные;

3) промежуточные ребра графа $C_{2s_3+1}+C_{2s_4+1}$ — зеленые;

4) ребра циклов C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_5+1}, C_{2s_6+1} ребро $[v_3, v_4]$ — зеленые;

5) все остальные ребра — красные.

Полученная 2-раскраска правильная.

Случай 7. Удалено одно из ребер $[v_1, v_2]$, $[v_3, v_4]$, например, $[v_1, v_2]$. Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер полученного подграфа:

1) ребра циклов C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1} — зеленые;

2) промежуточные ребра графа $C_{2s_3+1}+C_{2s_4+1}$ — красные;

3) ребра циклов C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_5+1}, C_{2s_6+1} и ребро $[v_3, v_4]$ — красные;

4) все остальные ребра — зеленые.

Полученная 2-раскраска правильная.

Случай 8. Удалено промежуточное ребро графа $C^2{}_{s_2+1}+[v_1, v_2]$ или $C_{2s_2+1}+[v_3, v_4]$, например, $C_{2s_2+1}+[v_1, v_2]$. Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер полученного подграфа:

1) ребра полученного подграфа графа $C_{2s_2+1}+[v_1, v_3]$ покрасим, как в лемме 5;

2) ребра циклов C_{2s_3+1} и C_{2s_4+1} — зеленые;

3) промежуточные ребра графов $C_{2s_3+1}+C_{2s_4+1}$ и $C_{2s_5+1}+[v_1, v_2]$—красные;

4) ребра циклов C_{2s_1+1}, C_{2s_5+1}, C_{2s_6+1} и ребро $[v_3, v_4]$ — красные;

5) все остальные ребра — зеленые.

Полученная 2-раскраска правильная.

Случай 9. Удалено ребро цикла C_{2s_2+1}. Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер полученного подграфа:

1) ребра полученного подграфа графа $C_{2s_2+1}+[v_1, v_2]$ покрасим, как в лемме 6;

2) ребра циклов C_{2s_3+1} и C_{2s_4+1} — зеленые;

3) промежуточные ребра графов $C_{2s_3+1}+C_{2s_4+1}$ и $C_{2s_3+1}+[v_1, v_2]$ — красные;

4) ребра циклов C_{2s_1+1}, C_{2s_5+1}, C_{2s_6+1} и ребро $[v_3, v_4]$ — красные.

Полученная 2-раскраска правильная,

Случай 10. Удалено промежуточное ребро графа $C_{2s_1+1}+C_{2s_2+1}$. Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер полученного подграфа:

1) ребра полученного подграфа графа $C_{2s_1+1}+C_{2s_2+1}$ покрасим, как в лемме 7; все ребра цикла C_{2s_1+1} — красные, две смежные ребра цикла C_{s_2+1} — зеленые, а остальные три — красные;

2) ребра графа $C_{2s_2+1}+[v_1, v_2]$ покрасим, как в лемме 9, используя уже полученную 2-раскраску ребер C_{2s_2+1};

3) ребра графа $C_{2s_2+1}+[v_3, v_4]$ покрасим, как в лемме 9, используя уже полученную 2-раскраску ребер C_{2s_2+1}:

4) ребра циклов C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1}, C_{2s_5+1}, C_{2s_6+1} — зеленые;

5) все остальные ребра — красные.

Полученная 2-раскраска правильная.

Теорема 1 доказана полностью.

Следствие 3. *Если хроматические числа* $\chi(A_i)>2$, $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$, *тогда* $F_1(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ *является t-графом.*

Доказательство. Согласно теореме Кьонига [9], граф A_i содержит простой цикл нечетной длины C_{2s_i+1}. Остается только применить теорему 1.

5. Доказательство теоремы 2. Нетрудно сообразить, что кликовое число графа $F_2(C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_3+2}, C_{2s_4+1})$ равно 4.

Теперь докажем, что $F_2(C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1})$ является t-графом. Допустим противное. Рассмотрим произвольную 2-раскраску ребер графа $F_2(C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1})$. Согласно лемме 4, все ребра циклов C_{2s_1+1}, $C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1}$ имеют одинаковый цвет, например, красный. Согласно лемме 3, ребра $[t_1, t_2]$, $[t_1, t_3]$, $[t_2, t_3]$ — красные. Мы получили, что треугольник T монохроматический. Это является противоречием, так как рассматриваемая 2-раскраска правильная.

Осталось показать, что граф $F_2(C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1})$ является минимальным t-графом. Для этого мы докажем, что после удаления произвольного ребра графа $F_2(C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1})$ получается подграф, который не является t-графом.

Рассмотрим следующие случаи:

Случай 1. Удалено ребро треугольника T. В этом случае ребра циклов C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1} и оставшиеся две ребра треугольника T покрасим в красный, а все остальные ребра — в зеленый цвет. Полученная 2-раскраска правильная.

Случай 2. Удалено промежуточное ребро одного из графов $C_{2s_2+1}+[t_1, t_2]$ $C_{2s_3+1}+[t_1, t_3]$, $C_{2s_4+1}+[t_2, t_3]$, например, графа $C_{2s_2+1}+[t_1, t_2]$. Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер полученного подграфа:

1) ребра полученного подграфа графа $C_{2s_2+1}+[t_1, t_2]$ покрасим при помощи леммы 5, так чтобы $[t_1. t_2]$ было зеленым, а все ребра цикла C_{2s_2+1} — красными;

2) ребра циклов C_{2s_1+1}, C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1} и ребра $[t_1, t_3]$, $[t_2, t_3]$ — красные;

3) все остальные ребра — зеленые.

Полученная 2-раскраска правильная.

Случай 3. Удалено ребро одного из циклов C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1}, например, C_{2s_2+1}. Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер полученного подграфа:

1) ребра полученного подграфа графа $C_{2s_2+1}+[t_1, t_2]$ покрасим при помощи леммы 6, так чтобы ребро $[t_1, t_2]$ было зеленым, а оставшиеся ребра цикла C_{2s_2+1} — красными;

2) все ребра циклов C_{2s_1+1}, C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1} и ребра $[t_1, t_3]$, $[t_1, t_3]$ — красные;

3) все остальные ребра — зеленые.

Полученная 2-раскраска правильная.

Случай 4. Удалено промежуточное ребро одного из графов $C_{2s_1+1}+C_{2s_2+1}$, $C_{2s_1+1}+C_{2s_3+1}$, $C_{2s_1+1}+C_{2s_4+1}$, например, $C_{2s_1+1}+C_{2s_2+1}$. Рассмотрим следующую 2-раскраску полученного подграфа:

1) ребра полученного подграфа графа $C_{2s_1+1}+C_{2s_2+1}$ покрасим при помощи леммы 7, так чтобы две смежные ребра C_{2s_2+1} были зелеными, а все остальные ребра этого цикла и все ребра цикла C_{2s_1+1} — красными;

2) ребра графа $C_{2s_2+1}+[t_1, t_2]$ покрасим при помощи леммы 9, так чтобы ребро $[t_1, t_2]$ было зеленым;

3) все ребра циклов C_{2s_3+1}, C_{2s_4+1} и ребра $[t_1, t_3]$, $[t_2, t_3]$ — красные;

4) все остальные ребра — зеленые.

Случай 5. Удалено ребро цикла C_{2s_1+1}. В этом случае рассмотрим следующую 2-раскраску ребер полученного подграфа:

1) ребра полученного подграфа графа $C_{2s_1+1}+C_{2s_2+1}$ покрасим при помощи леммы 10, так чтобы все оставшиеся ребра C_{2s_1+1} были красными и две смежные ребра цикла C_{2s_2+1} — зелеными;

2) ребра графа $C_{2s_2+1}+[t_1, t_2]$ покрасим при помощи леммы 9, используя полученную 2-раскраску ребер цикла C_{2s_2+1}, так чтобы $[t_1, t_2]$ было зеленым;

3) все ребра циклов C_{2s_3+1} и C_{2s_4+1} — красные;

4) все остальные ребра — зеленые.

Полученная 2-раскраска правильная.

Теорема 2 доказана.

Следствие 4. *Если хроматические числа $\chi(A_i)>2$, $i=1, 2, 3, 4$, тогда граф $F_2(A_1, A_2, A_3, A_4)$ является t-графом.*

6. Доказательство теоремы 3. Легко доказать, что граф $F_3(C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1})$, $S_i>1$, $i=1, 2, 3$, имеет кликовое число 4. Если хотя бы одно из чисел $S_i=1$, $i=1, 2, 3$, равно единице, тогда кликовое число равно 5.

Докажем, что $F_3(C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1})$ является t-графом. Допустим, что это не так, и рассмотрим некоторую правильную 2-раскраску ребер этого графа. Пусть в этой раскраске ребро $[v_1, v_2]$ — красное. Применяя лемму 2 к соединению C_{2s_1+1} и цепи $v_4v_1v_2v_5$, заключаем, что ребра $[v_1, v_4]$ и $[v_2, v_5]$ тоже красные. Применяя ту же самую лемму к соединению C_{2s_3+1} и цепи $v_5v_2v_3$ заключаем, что ребро $[v_2, v_3]$ — красное. Наконец, аналогично следует, что ребро $[v_1, v_3]$ — красное. Треугольник T оказался красным, что является противоречием.

Теперь перейдем к доказательству минимальности графа $F_3(C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1})$. Введем следующие обозначения: через Γ_1 обозначим соединение графа C_{2s_1+1} и цепи $v_4v_1v_2v_5$; через Γ_2 — соединение графа C_{2r_2+1} и цепи $v_4v_1v_3$; Рассмотрим следующие случаи:

Случай 1. Удалим ребро $[v_1, v_2]$. В этом случае:

1) построим правильную раскраску подграфа Γ_1 без ребра $[v_1, v_2]$, при которой $[v_1, v_4]$ и $[v_2, v_5]$ — красные (существование такой раскраски, если C_{2s_1+1} не является треугольником, очевидно, а, если C_{2s_1+1} есть треугольник, следует из леммы 10);

2) построим правильную раскраску графа Γ_2 (существование такой раскраски следует как и выше.

3) построим правильную раскраску графа Γ_3.

Полученная раскраска графа $F_3(C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1})$ без ребра $[v_1, v_3]$ — правильная.

Случай 2. Удалим ребро $[v_1, v_3]$ или $[v_2, v_3]$. В этом случае аналогично построим правильную раскраску подграфа.

Случай. 3. Удалим промежуточное ребро графа Γ_1:

1) с помощью леммы 11 покрасим правильно все ребра графа Γ_1 без удаленного, так что $[v_1, v_4]$ — зеленое, а $[v_1, v_2]$ и $[v_2, v_5]$ — красные;

2) легко построить правильную раскраску графа Γ_2, при которой ребро $[v_1, v_3]$ — зеленое;

3) легко построить правильную раскраску графа Γ_3, при которой ребро $[v_2, v_3]$ — красное.

Таким образом построена правильная раскраска графа F_3 без удаленного ребра.

Случай 4. Удалим промежуточное ребро графа Γ_2:

1) построим правильную раскраску полученного подграфа графа Γ_2, при которой ребро $[v_4, v_1]$ — красное, а ребро $[v_1, v_3]$ —зеленое;

2) покрасим в красный цвет ребра графов C_{2s_1+1}, C_{2s_3+1}, $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_3]$, $[v_2, v_5]$;

3) покрасим в зеленый цвет все остальные ребра.

Получаем правильную 2-раскраску ребер подграфа графа F_3, полученного после удаления ребра.

Аналогично рассматривается случай, когда удаляется промежуточное ребро графа Γ_3.

Случай 5. Удалим ребро цикла C_{2s_2+1}:

1) согласно лемме 12 можно покрасить правильно ребра полученного подграфа графа Γ_2, так чтобы $[v_4, v_1]$ было зеленое, а $[v_1, v_3]$ — красное;

2) покрасим ребра графов $C_{2s_1+1}, C_{2s_3+1}, [v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_2, v_5]$ в зеленый цвет;

3) покрасим все остальные ребра в красный цвет.

Получили правильную раскраску.

Аналогично рассматривается случай, когда удаляем ребро цикла C_{2s_3+1}.

Случай 6. Удалим ребро цикла C_{2s_1+1}:

1) покрасим правильно ребра полученного подграфа графа Γ_1 таким образом, чтобы $[v_1, v_2]$ было зеленым, а $[v_1, v_4]$ и $[v_2, v_5]$ — красными (существование такой раскраски обеспечивается леммой 12);

2) покрасим в красный цвет ребра графов C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1}, $[v_1, v_3]$, $[v_2, v_3]$;

3) покрасим в зеленый цвет все остальные ребра.

Получаем правильную раскраску ребер подграфа графа F_3, полученного после удаления произвольного ребра цикла C_{2s_1+1}.

Случай 7. Удалим ребро $[v_1, v_4]$:

1) покрасим правильно ребра полученного подграфа графа Γ_2 (этот граф не более чем 5-хроматический); пусть ребро $[v_1, v_3]$ — красное;

2) покрасим правильно ребра полученного подграфа графа Γ_1 так, чтобы $[v_1, v_2]$ и $[v_2, v_5]$ были зелеными (это можно сделать, если C_{2s_1+1} не треугольник, по тривиальным соображениям, а если C_{2s_1+1} — треугольник, согласно лемме 10);

3) покрасим правильно ребра не более чем 5-хроматического графа Γ_3 (ребро $[v_2, v_5]$ уже имеет зеленый цвет).

Получаем правильную раскраску ребер графа F_3, из которого удалено ребро $[v_1, v_4]$. Аналогично рассматривается случай, возникающий после удаления ребра $[v_2, v_5]$.

Доказательство минимальности t-графа $F_3(C_{2s_1+1}, C_{2s_2+1}, C_{2s_3+1})$ завершено, так как мы установили, что после удаления произвольного ребра этого графа получается граф, ребра которого можно покрасить правильно.

Доказательство теоремы 3 завершено.

Следствие 5. *Если хроматические числа $\chi(A_i)>2$, $i=1, 2, 3$, тогда $F_3(A_1, A_2, A_3)$ является t-графом.*

Доказательство теоремы 4 вполне аналогично доказательству теоремы 3. Поэтому мы его пропустим.

Следствие 6. *Если $\chi(A_i)>1$, тогда $F_4(A_1, A_2, A_3)$ является t-графом.*

7. *Числа, связанные с минимальными t-графами.* Через $N(3, q)$, следуя Грахаму и Спенсеру, [6], обозначим наименьшее натуральное число n со следующим свойством: существует t-граф с n вершинами, который не содержит q-клику.

Нетрудно показать что $N(3, 7)=6$. В [5] доказано, что $N(3, 6)\leq 8$. В [6] утверждается (без доказательства), что $N(3, 6)=8$. Доказательство того, что $N(3, 6)=8$, дано в [1]. Шойбле [7] доказал, что $N(3, 5)\leq 42$, а Грахам и Спенсер [6], что $N(3,5)\leq 23$.

Так как $F_3(C_5, C_5, C_5)$ имеет двадцать вершин, то из теоремы 3 получаем

Следствие 7. $N(3, 5)\leq 20$.

Авторами в [10] доказано, что $N(3,5)\leq 16$.)

Через $n(3, q)$ обозначим наибольшее натуральное n, для которого не существует минимальный t-граф с n вершинами, не содержащий q-клику. Легко сообразить, что $n(3, q)=6$ при $q\geq 7$.

Следствие 8. $n(3, 5)\neq 20$ *и* $n(3, 5)\leq 21$.

Следствие 9. $n(3, 6)$ — *нечетное и* $n(3, 6)\leq 15$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. О графах, содержащих монохроматический треугольник при произвольной двуцветной раскраске ребер. *Сердика* **5**, 1979, 303—305.
2. Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов. t-графы с кликовым числом четыре. *Математика и мат. образование*. София, 1979.
3. А. Зыков. О некоторых свойствах линейных комплексов. *Мат. сб.*, **24**, 1949, 163—188.
4. P. Erdës, A. Hajnal. Research problem 2—5. *J. Combin. Theory*, **2**. 1967, 107.
5. R. Graham. On edgewise 2-colored graphs with monochromatic triangles an containg no complete hexagon, *J. Combin. Theory*, **4**, 1968, 300.
6. R. Graham, J. Spenser. On small graphs with forced monochromatic triangles. *Lecture Notes Math.*, **186**, 137—141.
7. M. Schäuble. Zu einem Kanten Färbungsproblem. *Wiss. Z. Th. Illemenau*, **15**, 1969, 2, 55—58.
8. J. Folkman. Graphs with monochromatic complete snbgraphs in every edge coloring. *SIAM J. Appl. Marh.*, **18**, 1970, 19—24.
9. D. König. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.
10. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. О числе Грахама-Спенсера. *Доклады БАН*, **32**, 1979, 155—158.

Единый центр математики и механики
1090 София п. я. 373

Поступила 22. 1. 1979