Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

ОДНОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА $M|M|1$ С ОБОБЩЕННЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ ПРИОРИТЕТОМ

МИТКО Ц. ДИМИТРОВ

Работа посвящена изучению системы $M|M|1$ с обобщенным динамическим приоритетом. Дисциплина обслуживания: требование—разделение процессора. Находятся следующие характеристики системы в стационарном режиме: производящая функция стационарного распределения длины очереди, стационарное совместное распределение приоритетного индекса и числа обслуживаемых требований, условное распределение виртуального времени ожидания и др., система массового обслуживания, скорость обслуживания, приведенное время обслуживания, приоритетный индекс.

1. Постановка задачи. Пусть дана однолинейная система с бесконечным числом мест ожидания. Каждому требованию соответствует случайная величина ξ_0 с функцией распределения $P\{\xi_0<x\}=B(x)$, которую назовем „приведенным временем обслуживания". Предполагаем, что приведенные времена требований независимы и не зависят от процесса обслуживания.

Введем понятие скорости обслуживания. Если требование поступит в момент t и обслуживается со скоростью $c(x)$, то время его обслуживания определяется равенством $\int_t^{t+\xi}c(x)dx=\xi_0$, где скорость обслуживания $c(x)$ может зависеть от процесса обслуживания или от какого-нибудь другого процесса.

Дисциплина обслуживания, при которой $c(t)=1/n$, если в момент t число обслуживаемых требований n, называется дисциплиной с разделением процессора. Эту дисциплину можно понимать так: если число обслуживаемых требований n, то за бесконечно малый интервал времени Δ приведенное время каждого обслуживаемого требования уменьшится на $\Delta/n+o(\Delta/n)$.

В систему поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью $\lambda>0$. Приведенное время обслуживания каждого требования распределено по закону $B(x)=1-e^{-\mu x}$. Каждому требованию в системе присваивается приоритетный индекс следующим образом. Приоритетный индекс требования в момент поступления в систему равен нулю. Если требование ждет в очереди, то его приоритетный индекс растет со скоростью $\alpha>1$, если обслуживается со скоростью $\beta=1$. Прибор обслуживает все требования с максимальным приоритетным индексом. Дисциплина обслуживания: требование — разделение процессора. Отсюда и из предположения о том, что приведенное время обслуживания распределено по показательному закону, следует, что интенсивность обслуживания каждого из n обслуживаемых требований равна μ/n.

Далее находится стационарное совместное распределение приоритетного индекса и числа обслуживаемых требований, производящая функция стационарного распределения длины очереди, условное распределение виртуаль-

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 6,1980, с. 143–152.

ного времени ожидания и математическое ожидание времени обслуживания требования с приведенным временем x в стационарном режиме.

2. Построение и исследование марковского процесса, связанного с рассматриваемой системой обслуживания. Введем следующие обозначения:

$X(t)$ — приоритетный индекс обслуживаемых требований;

$\nu(t)$ — число обслуживаемых требований в момент t;

$\mu(t)$ — длина очереди в момент t.

На рис. 1 приводится одна из возможных реализаций процесса $X(t)$.

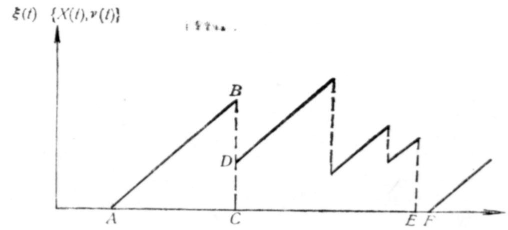

Рис. 1

Точкой A обозначим момент поступления требования в свободную систему, т. е. начало периода занятости. На отрезке AC поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью $\lambda > 0$. Так как требования принимаются на обслуживание в тот момент, когда их приоритетный индекс сравняется с приоритетным индексом обслуживаемых требований, то можно рассматривать поток моментов поступления требований на обслуживание. Заметим, что последний поток является также пуассоновским с параметром $(a-1)\lambda/a$. Из принятой дисциплины обслуживания следует, что время AC (в точке C происходит скачок приоритетного индекса) является периодом занятости системы L типа $M|M|1$ с интенсивностью входящего потока $(a-1)\lambda/a$ и интенсивностью обслуживания μ. Поскольку скорость возрастания приоритетного индекса обслуживаемых требований равна единице, то $AC = BC$. В точке C начинается следующий период занятости системы L. В точке E заканчивается период занятости рассматриваемой системы обслуживания и следует свободный период длиной EF.

Моменты $\tau^0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ скачков приоритетного индекса $X(t)$ являются марковскими моментами процесса $\xi(t)$. Приоритетные индексы $X_n = X(\tau_n + 0)$ после скачков связаны в цепь Маркова следующим образом: $x_{n+1} = (X_n + \zeta - Y)_+$, где ζ — период занятости системы L; Y — случайная величина с функцией распределения $1 - e^{-\lambda x a}$. Если $X(\tau_n + 0) > 0$, $\tau_{n+1} - \tau_n$ является периодом занятости системы L, если $X(\tau_n + 0) = 0$, то $\tau_{n+1} - \tau_n = \zeta + \xi$, где ξ — случайная величина с функцией распределения $1 - e^{-\lambda x}$. В силу принятой дисциплины обслуживания процесс $\xi(t)$ является марковским процессом.

Теорема 1. *Если $\lambda < \mu$, то цепь X_n и процессы $\xi(t)$ и $\mu(t)$ эргодичны и*

$$\Psi(s) = \lim_{n\to\infty} Me^{-sX_n} = \left[1 - \frac{\lambda}{a}\pi_1\right] \Big/ \left[1 - \frac{\lambda}{a}\frac{1-\pi(s)}{s}\right],$$

$$\varphi(s, z)=\lim_{t\to\infty} Me^{-sX(t)}z^{\nu(t)}=1-\frac{\lambda}{\mu}+\lambda\frac{\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda}{\alpha\mu}\Psi(s)\pi(s, z),$$

$$q(z)=\lim_{t\to\infty} Mz^{\mu(t)}=1-\frac{\lambda}{\mu}\frac{\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda}{\mu(1-z)}\Psi\left(\frac{\lambda}{\alpha}(1-z)\right)\left[1-\pi\left(\frac{\lambda}{\alpha}(1-z)\right]\right.,$$

$$\lim_{t\to\infty} M\nu(t)=\frac{\alpha\lambda}{\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda},\quad \lim_{t\to\infty} M\mu(t)=\frac{\lambda^2}{(\mu-\lambda)(\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda)},$$

где $\pi_1=\alpha/[\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda]$. *Функция* $\pi(s)$ *определяется из уравнения*

$$\pi(s)=\mu/\left[\mu+s+\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}(1-\pi(s)\right],\quad \mathrm{Re}\, s>0,$$

$$\pi(s, z)=z[z-\pi(s)]/\left\{(1-z)\left[\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}z-\mu\right]+zs\right\}.$$

Доказательство. Так как $X_{n+1}=(X_n+\zeta-Y)_+$, то цепь X_n эргодична, если $M(\zeta-Y)<0$ (см. [3]). Известно [1, с. 15]

$$M\zeta=\frac{\alpha}{\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda},\qquad MY=\frac{\alpha}{\lambda},\quad M(\zeta-Y)=\alpha(\lambda-\mu)/\left[\lambda\left(\mu-\frac{\alpha-1}{\alpha}\lambda\right)\right].$$

Тогда при $\lambda<\mu$ цепь X_n эргодична и преобразование Лапласа — Стилтьеса $\psi(s)$ ее стационарного распределения $F(x)$ имеет вид

$$\psi(s)=\left[1-\frac{\lambda}{\alpha}\pi_1\right]/\left[1-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{1-\pi_1(s)}{s}\right],$$

где $\pi(s)$ и π_1 соответственно преобразование Лапласа — Стилтьеса и математическое ожидание периода занятости ζ системы L.

Заметим еще, что $\int_{0+}^{\infty}e(x)dF(x)=F(0)e(0)+\int_{0+}^{\infty}e(x)\,dF(x)=F(0)\,(1/\lambda+\pi_1)+\pi_1(1-F(0))=F(0)/\lambda+\pi_1=c<\infty$, где

$$e(x)=\begin{cases}\pi_1 & \text{при}\quad x>0,\\ 1/\lambda+\pi_1 & \text{при}\quad x=0.\end{cases}$$

Этим все условия применимости теоремы Ежова [2] выполнены и существует предел при $t\to\infty$

$$\Phi(x, n)=\lim_{t\to\infty}P\{X(t)<x,\ \nu(t)=n\}$$

$$=[\int_{0+}^{x}\int_{0}^{x-y}P\{\zeta>u,\ \nu(u)=n\}dudF(y)]/[\alpha\mu[\lambda(\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda]^{-1}]$$

$$+F(0)[\int_{0}^{x}P\{\zeta>u,\ \nu(u)=n\}du]/[\alpha\mu[\lambda(\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda)]^{-1}]$$

$$=[\int_{0}^{x}\int_{0}^{x-y}P\{\zeta>u,\ \nu(u)=n\}dudF(y)]/[\alpha\mu[\lambda(\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda]^{-1}],$$

$$\Phi(0, 0)=\lim_{t\to\infty}P\{\nu(t)=0\}=F(0)[\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda u}du]/[\alpha\mu[\lambda(\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda)]^{-1}]=1-\lambda/\mu.$$

Вероятность $P\{\zeta>u,\ \nu(u)=n\}=Q(u, n)$ задается своим преобразованием Лапласа $\pi(s, z)$ производящей функцией числа требований в системе L при условии, что период занятости не окончился.

Из формулы 4.7, стр. 20 [1] следует

$$\pi(s, z)=z[z-\pi(s)]\Big/\Big[z\Big[\mu+s+\frac{\alpha-1}{\alpha}\lambda(1-z)\Big]-\mu\Big].$$

Производящая функция $\widetilde{\Phi}(x, z)$ числа обслуживаемых требований получается следующим образом:

$$\widetilde{\Phi}(x, z)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(x, n)z^n=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\frac{\lambda[\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda]}{\alpha\mu}\int_0^x\int_0^{x-y}Q(u, n)du\,dF(y)$$

$$=\frac{\lambda[\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda]}{\alpha\mu}\int_0^x\int_0^{x-y}\widetilde{Q}(u, z)du\,dF(y) \quad \text{при} \quad x>0,$$

где $\widetilde{Q}(u, z)=M\{z^{\nu(u)}\mid\zeta>u\}$, $\widetilde{\Phi}(0, z)=1-\lambda/\mu$. Тогда

$$\varphi(s, z)=\int_0^{\infty}e^{-sx}d_x\widetilde{\Phi}(x, z)$$

$$=1-\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda[\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda]}{\alpha\mu}\int_{0+}^{\infty}e^{-sx}d_x\int_0^x\int_0^{x-y}\widetilde{Q}(u, z)du\,dF(y)$$

$$=1-\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda[\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda]}{\alpha\mu}\pi(0, z).$$

Отсюда уже находится производящая функция $P(z)$ числа обслуживаемых требований в стационарном режиме и его математическое ожидание $P'(1)$:

$$P(z)=\varphi(0, z)=1-\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda[\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda]}{\alpha\mu}\pi(0, z), \quad P'(1)=\frac{\lambda[\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda]}{\alpha\mu}\pi'_z(0, z).$$

Легко показать, что

$$\pi(0, z)=z\Big/\Big(\mu-\frac{\alpha-1}{\alpha}\lambda z\Big), \quad \pi'_z(0, z)=\mu\Big/\Big(\mu-\frac{\alpha-1}{\alpha}\lambda\Big)^2.$$

Тогда

$$P(z)=1-\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda[\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda]}{\alpha\mu}\Big\{z\Big/\Big[\mu-\frac{\alpha-1}{\alpha}\lambda z\Big]\Big\},$$

$$P'(1)=\alpha\lambda/[\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda]. \tag{1}$$

Производящая функция $q(z)$ длины очереди $\mu(t)$ в стационарном режиме равна

$$q(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}(n!)^{-1}\Big(\frac{\lambda}{\alpha}xz\Big)^n e^{-\frac{\lambda}{\alpha}x}d_x\Phi(x)=\int_0^{\infty}e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(1-z)x}d\Phi(x).$$

Поскольку $\int_0^{\infty}e^{-sx}d\Phi(x)=\varphi(s, 1)$, то

$$q(z)=\varphi\Big(\frac{\lambda}{\alpha}(1-z), 1\Big)=1-\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda}{\mu(1-z)}\Psi\Big(\frac{\lambda}{\alpha}(1-z)\Big)\Big[1-\pi\Big(\frac{\lambda}{\alpha}(1-z)\Big)\Big],$$

$$\lim_{t\to\infty}M\mu(t)=q'(1)=\lambda^2/(\mu-\lambda)(\alpha\mu-(\alpha-1)\lambda),$$

что и требовалось доказать.

3. Виртуальное время ожидания. Из предположения о пуассоновости входящего потока следует, что виртуальное время $W_n(t, x)$ зависит только от числа обслуживаемых требований и их приоритетного индекса в момент поступления требования в систему.

Через $Q_n(x, y)$ обозначим $Q_n(x, y) = P\{W_n(t, x) < y\}$,

$$q_n(s, \omega) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx} e^{-\omega y} Q_n(x, y)\, dy\, dx.$$

Теорема 2. *Производящая функция*

$$q(z, s, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(s, \omega) z^n = \{a\omega(\omega + (a-1)s) + \lambda\omega(\omega +$$

$$s(a-1))\left[(a-1)s + \omega + \lambda\frac{a-1}{a}\right] q_1(s, \omega) - (a-1)^2(\lambda + as)$$

$$z\pi(\omega + s(a-1))\} / [1 - z\pi(\omega + s(a-1))] + z/\left[\omega\left(s + \frac{\omega}{a-1}\right)(1-z)\right],$$

где

$$q_1(s, \omega) = \Big\{\pi(\omega + (a-1)s)\left[\omega\left(s + \frac{\omega}{a-1}\right) - \frac{\lambda}{a}(a-1)\left(s + \frac{\lambda}{a}\right)\right]$$

$$+ \left(s + \frac{\lambda}{a}\right)\left[\omega + \lambda\frac{a-1}{a} + (a-1)s\right]\Big\} \Big/ \Big\{\omega\left[s + \frac{\lambda}{a}[1 - \pi(\omega + (a-1)s)]\right]$$

$$\times \left(s + \frac{\omega}{a-1}\right)\left[\omega + \lambda\frac{a-1}{a} + (a-1)s\right]\Big\},$$

$$\pi(s) = \mu \Big/ \left\{\mu + \lambda\frac{a-1}{a}[1 - \pi(s)]\right\}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0.$$

Доказательство. Через $\Pi_n(y)$ обозначим функцию распределения n-го типа периода занятости системы L. n-й периода занятости нужно понимать так. В начале периода занятости в системе L находятся n требований. Поскольку суммарная интенсивность обслуживания требований в рассматриваемой системе равна μ, то время перехода из состояния $\nu(t) = n$ до следующего скачка приоритетного индекса имеет функцию распределения $\Pi_n(t) = \Pi^{n*}(t)$ с преобразованием Лапласа — Стилтьеса $\pi^n(s)$. Напомним, что $\Pi(t)$ и $\pi(s)$ соответственно функция распределения периода занятости системы L и его преобразование Лапласа — Стилтьеса.

Можно показать, что

$$P\{W_n(t, x) < y\} = \int_0^{x/(a-1)} P\{x + u - Y < au\}\delta(y - u)\, d\Pi_n(u)\, \delta\left(\frac{x}{a-1} - y\right)$$

$$+ \delta\left(\frac{x}{a-1} - y\right) \int_0^{x/(a-1)} \int_{au}^{u+x} P\{W_1(t+u, v - au < y)\} P\{x + u - Y \in (v, v + dv)\}$$

$$\times \delta(y - u)\, d\Pi_n(y) + 1 - \delta\left(\frac{x}{a-1} - y\right),$$

где

$$\delta(x)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad x\geqq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x<0. \end{cases}$$

Действительно, событие $\{W_n(t, x)<y\}$ осуществляется следующими несовместимыми способами:

1. Во-первых, если $y<x/(a-1)$, то в момент окончания периода занятости типа n через время u приоритетный индекс $X(t+u+0)$ может быть $X(t+u)=x+u-Y<au$ с вероятностью

$$\int_0^{x/(a-1)} P\{x+u-Y<au\}\delta(y-u)d\Pi_n(u)\delta\left(\frac{x}{a-1}-y\right)$$

или $v<X(t+u)=x+u-Y<v+dv$, $v\in[au, u+x]$ и $W_1(t+u, v-au)<y-u$ с вероятностью

$$\int_0^{x/(a-1)}\int_{au}^{x+u} P\{W_1(t+u, v-au)<y\}P\{x+u-Y\in(v, v+dv)\}\delta(y-u)d\Pi_n(u).$$

2. Во-вторых, если $y>x/(a-1)$, то $P\{W_n(t, x)<Y\}=1$, откуда и следует последнее слагаемое в правой части выражения для $P\{W_n(t, x)<y\}$. Заметим, что $P\{x+u-Y<au\}=\exp\{-\lambda(x+u-au)/a\}$ и $P\{x+u-Y\in(v, v+dv)\}=\lambda a^{-1}\exp[-\lambda(x+u-v)/a]dv$. Тогда

$$\begin{aligned} Q_n(x, y)=&\int_0^{x/(a-1)}\exp\left[-\lambda\frac{x+u-au}{a}\right]\delta(y-u)d\Pi_n(u)\delta\left(\frac{x}{a-1}-y\right)\\ &+\frac{\lambda}{a}\int_0^{x/(a-1)}\int_{au}^{x+u}Q_1(x-au, y-u)\exp\left[-\frac{\lambda}{a}(x+u-v)\right]\\ &\times\delta(y-u)dv\,d\Pi_n(u)\delta\left(\frac{x}{a-1}-Y\right)+1-\delta\left(\frac{x}{a-1}-y\right). \end{aligned}\tag{2}$$

Для $Q_1(x, y)$ из (2) при $n=1$ получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} Q_1(x, y)=&\int_0^{x/(a-1)}\exp\left[-\lambda\frac{x+u-au}{a}\right]\delta(y-u)d\Pi(u)\delta\left(\frac{x}{a-1}-y\right)\\ &+\frac{\lambda}{a}\int_0^{x/(a-1)}\int_0^{x+u-au}Q_1(t, y-u)\exp\left[-\lambda\frac{x+u-t-au}{a}\right]\\ &\times\delta(y-u)dt\,d\Pi_1(u)\delta\left(\frac{x}{a-1}-y\right)+1-\delta\left(\frac{x}{a-1}-Y\right). \end{aligned}\tag{3}$$

Уравнение (3) будем решать с помощью преобразования Лапласа. Применив преобразование Лапласа по x и y к обеим сторонам уравнения (3), с помощью длинных, но в принципе несложных преобразований получим требуемое выражение для $q_1(s, \omega)$. Аналогичным способом находим $q_n(s, \omega)$, а отсюда и $q(z, s, \omega)$.

4. Математическое ожидание времени обслуживания требования с приведенным временем обслуживания x. Пусть дан марковский процесс $\xi(t)$ с конечным или счетным числом состояний m. Множество состояний обозначим через $H=\{1, 2, \dots\}$ и интенсивности переходов σ_{ij}, $\sigma_i = \sum_{j\neq i}\sigma_{ij}$, $\sigma_{ii}=-\sigma_i$. Функция $f(x)$ определена на состояниях H процесса $\xi(t)$. Мы будем предполагать, что $f(x)>0$. Введем интеграл $I(t)=\int_0^t f[\xi(u)]du$ по траектории марковского процесса $\xi(t)$. Сначала найдем распределение $I_i(t)$, где $I_i(t)=\int_0^t f[\xi(u)]du$ при условии, что $\xi(0)=i$. Пусть $\varphi_i(t, s)=E\exp[-sI_i(t)]$. Тогда

$$\varphi_i(t+h, s)=(1+\sigma_{ii}h)\exp[-sf(i)h]\varphi_i(t, s)+\sum_{j\neq i}\sigma_{ij}h\varphi_j(t, s)+o(h). \tag{4}$$

Действительно, за время h марковский процесс $\xi(t)$ не меняет свое состояние i с вероятностью $1+\sigma_{ii}h$, при этом

$$\int_0^h f[\xi(u)]du=f(i)h, \qquad \int_h^{t+h} f[\xi(u)]du=I_i(t).$$

Если за время h $\xi(t)$ переходит в состояние j с вероятностью $\sigma_{ij}h$, то

$$\int_0^{h_1} f[\xi(u)]du=f(i)h_1+o(h), \quad \int_{h_1}^{t+h} f[\xi(u)]du=\int_h^{t+h} f[\xi(u)]du+o(h),$$

где h_1 является моментом перехода u, $0<h_1<h$. Два и более перехода марковского процесса за время h имеют вероятность $o(h)$. Если вычтем из обеих сторон (4) $\varphi_i(t, s)$, поделим на h и перейдем к пределу по $h\to 0$, получим

$$\frac{\partial\varphi_i(t, s)}{\partial t}=-sf(i)\varphi_i(t, s)+\sum\sigma_{ij}\varphi_j(t, s). \tag{5}$$

Последнюю систему решим с помощью преобразования Лапласа. Пусть $\psi_i(\omega, s)=\int_0^\infty e^{-\omega t}\varphi_i(t, s)dt$. Тогда, применив преобразование Лапласа к обеим сторонам (5), получим

$$-1+\omega\Psi_i(\omega, s)=-f(i)\psi_i(\omega, s)+\sum_{j\neq i}\sigma_{ij}\Psi_j(\omega, s),$$

так как $\psi_i(\omega, s)=1$. Поскольку $\Delta_i(\omega, s)$ и $\Delta(\omega, s)$ многочлены, то обращение по ω возможно и

$$\psi_i(\omega, s)=\frac{\Delta_i(\omega, s)}{\Delta(\omega, s)}, \quad \varphi_i(t, s)=\sum_{j\in H}a_{ij}(s)e^{-b_j(s)t},$$

где $a_{ij}(s)$ и $b_j(s)$ — алгебраические функции. Второе обращение по s значительно сложнее. Из системы (5) можно найти $EI_i(t)=A_i(t)$. Продифференцировав (5) по s при $s>0$ и умножив обе стороны на -1, получим

$$\frac{dA_i(t)}{dt}=f(i)+\sum_{j\in H}\sigma_{ij}A_j(t). \tag{6}$$

Пусть $a_i(\omega)=\int_0^\infty e^{-\omega t}dA_i(t)$. Применив преобразование по t к обеим сторонам (6), получим систему

$$\omega a_i(\omega)=\frac{f(i)}{\omega}+\sum_{j\in H}\sigma_{ij}a_j(\omega). \tag{7}$$

Снова при $m<\infty$ по правилу Крамера можно решить последнюю систему $a_i(\omega)=\frac{\Delta_i(\omega)}{\Delta(\omega)}$, где $\Delta(\omega)=|\omega E-\sigma|$, $\sigma=\|\sigma_{ij}\|$. Обращение $a_i(\omega)$ несложно.

Наряду с $I_i(t)$ рассмотрим еще случайную величину $\tau_i(x)$, которая определяется равенством $\int_0^{\tau_i(x)} f[\xi(u)]du=x$, а индекс i у $I_i(t)$ указывает, что $\xi(0)=i$. Заметим, что $P\{\tau_i(x)>t\}=P\{I_i(t)<x\}=F_i(x, t)$. Из последнего равенства следует, что изучение распределения $\tau_i(x)$ сводится к изучению распределения $I_i(t)$. Поскольку $\int_0^\infty P\{\tau_i(x)>t\}dt=E\tau_i(x)=m_i(x)$, то интегрируя по t обе стороны равенства $\varphi_i(t, s)=\int_0^\infty e^{-sx}d_xF_i(x,t)$, получим $\varphi_i(s)=\int_0^\infty \varphi_i(t,s)dt=\int_0^\infty e^{-sx}dm_i(x)$. Из равенства (5) находим

$$-1=-sf(i)\varphi_i(s)+\sum \sigma_{ij}\varphi_j(s). \tag{8}$$

При конечных m эту систему нетрудно решить и применить обратное преобразование Лапласа.

Теперь вернемся к изучению математического ожидания времени обслуживания требования с приведенным временем x. Время обслуживания $\tau_i(x)$ требования с приведенным временем x при условии, что в момент начала его обслуживания наряду с ним обслуживаются еще i других требований, можно определить из равенства $\int_0^{\tau_i(x)} f[\nu^*(u)]du=x$, где $\nu^*(u)$ — марковский процесс со счетным числом состояний $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и интенсивностями перехода $\sigma_{i,i+1}=\lambda(a-1)/a$, $\sigma_{i,i-1}=\mu i/(i+1)$, $f[\nu^*(u)]=1/(i+1)$, если $\nu^*(u)=i$,

$$m_i(x)=M\tau_i(x), \quad m=\sum_{i=0}^{\infty} p_i m_i(x),$$

$$P(z)=\sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i=1-\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda[a\mu-(a-1)\lambda]}{a\mu}\,\frac{z}{\mu-\lambda(a-1)z/a},$$

$$\varphi_i(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dm_i(x), \quad \Phi(s, \omega)=\sum_{i=0}^{\infty}\omega^i\varphi_i(s).$$

Теорема 3. *Имеет место формула*

$$\Phi(s, \omega)=\frac{\mu+s-\mu\omega}{s[s+\mu-\lambda(a-1)/a](1-\omega)^2},$$

$$m(x)=\frac{a\mu}{a\mu-\lambda(a-1)}x+\frac{a\lambda}{[a\mu-\lambda(a-1)]^2}\left[1-\exp\left[-\left(\mu-\lambda\frac{a-1}{a}\right)x\right]\right].$$

Доказательство. Поставив в (8) $f(i)=1/(i+1)$, $\sigma_{i,i+1}=\lambda(a-1)/a$, $\sigma_{i,i-1}=\mu i/(i+1)$, получим

$$-1=-s\frac{\varphi_i(s)}{i+1}-\left(\lambda\frac{a-1}{a}+\mu\frac{i}{i+1}\right)+\varphi_i(s)+\lambda\frac{a-1}{a}\varphi_{i+1}(s)+\mu\frac{i}{i+1}\varphi_{i-1}(s).$$

Умножим обе стороны последнего равенства на $(i+1)\omega^i$ и просуммируем по i от нуля до бесконечности. Так как

$$\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\omega^i=\frac{1}{(1-\omega)^2}; \quad \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\omega^i\varphi_i(s)=\Phi(s, \omega)+\omega\frac{\partial\Phi(s, \omega)}{\partial\omega};$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\omega^i\varphi_i(s)=\omega\frac{\partial\Phi(s,\omega)}{\partial\omega}; \quad \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\omega^i\varphi_{i+1}(s)=\frac{\partial\Phi(s,\omega)}{\partial\omega};$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\omega^i\varphi_{i-1}(s)=\omega^2\frac{\partial\Phi(s,\omega)}{\partial\omega}+\omega\Phi(s,\omega),$$

то получим

$$\left(\mu\omega-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(1-\omega)\frac{\partial\Phi(s,\omega)}{\partial\omega}-\left(\mu\omega-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}-s\right)\Phi(s,\omega)=\frac{1}{(1-\omega)^2}.$$

Сделаем замену $\Phi(s,\omega)=\Psi(s,\omega)/(1-\omega)^2$. Тогда

$$\left(\mu\omega-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(1-\omega)\frac{\partial\Psi(s,\omega)}{\partial\omega}-\left(\mu\omega-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}+s\right)\Psi(s,\omega)=1. \tag{9}$$

Будем искать частное решение уравнения (9) в виде

$$\Psi_r(s,\omega)=a\omega+b,\ a\left(\mu\omega-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(1-\omega)=(a\omega+b)\left(\mu\omega-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}+s\right)=1.$$

Для a и b получаем уравнения

$$a(\mu+s)+b\mu=0, \quad -a\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}+b\left(s-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)=1,$$

откуда

$$a=-\mu/\left[s\left(s+\mu-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right], \quad b=(\mu+s)/\left[s\left(\mu+s-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right].$$

Итак,

$$\Psi_r(s,\omega)=[\mu+s-\omega\mu]/\left[s\left(s+\mu-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right],$$

$$\Phi_r(s,\omega)=[\mu+s-\mu\omega]/\left[s\left(\mu+s-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(1-\omega)^2\right].$$

Нетрудно показать, что общее решение однородного уравнения

$$\left(\mu\omega-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(1-\omega)\frac{\partial\Phi(s\omega)}{\partial\omega}-\left(\mu\omega-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}-s\right)\Phi(s,\omega)=0$$

имеет следующий вид:

$$\Phi_0(s,\omega)=C(s)\left\{|1-\omega|^{1-s/(\mu-\lambda(\alpha-1)/\alpha)}\ \left|\mu\omega-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}\right|^{s/(\mu-\lambda(\alpha-1)/\alpha)}\right\}^{-1}.$$

Тогда $\Phi(s,\omega)=\Phi_0(s,\omega)+\Phi_z(s,\omega)$. Очевидно, $\omega=\lambda(\alpha-1)/\alpha\mu$ является полюсом $\Phi_0(s,\omega)$. Поскольку $\Phi(s,\omega)$ аналитична при $|\omega|<1$, то по необходимости следует, что $C(s)$ должно быть равным нулю и поэтому

$$\Phi(s,\omega)=(\mu+s-\mu\omega)/\left[s\left(s+\mu-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(1-\omega)^2\right].$$

Разложив $\Phi(s,\omega)$ по степеням ω, получим

$$\varphi_i(s)=[\mu+s(i+1)]/\left[s\left(s+\mu-\lambda\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right], \tag{10}$$

а $m_i'(x)$ можно получить из $\varphi_i(s)$ по формуле обращения преобразования Лапласа

$$m_i'(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{[\mu+s(i+1)]e^{sx}}{s\left(\mu+s-\lambda\frac{a-1}{a}\right)}ds$$

$$=\mu/\left(\mu-\lambda\frac{a-1}{a}\right)+\left(i+1-\mu/\left(\mu-\lambda\frac{a-1}{a}\right)\right)\exp\left[-\left(\mu-\lambda\frac{a-1}{a}\right)x\right],$$

где контур C охватывает нули знаменателя. Тогда

$$m_i(x)=\mu x/\left(\mu-\lambda\frac{a-1}{a}\right)+\left(i+1-\mu/\left(\mu-\lambda\frac{a-1}{a}\right)\right)\left\{1-\exp\left[-\left(\mu-\lambda\frac{a-1}{a}\right)x\right]\right\}/\left(\mu-\lambda\frac{a-1}{a}\right).$$

Отсюда, поскольку $P'(1)=a\lambda/(a\mu-\lambda(a-1)$, можно найти математическое ожидание $m(x)$ времени обслуживания требования с приведенным временем x. Итак,

$$m(x)=\sum_i P_i m_i(x)=\frac{a\mu}{a\mu-\lambda(a-1)}x+a\lambda\left[1-\exp\left[-\left(\mu-\lambda\frac{a-1}{a}\right)x\right]\right][a\mu-\lambda(a-1)]^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, Э. А. Даниелян, Б. Н. Димитров, Г. П. Климов, В. Ф. Матвеев. Приоритетные системы обслуживания. Москва, 1973.
2. И. И. Ежов. Эргодическая теорема для марковских процессов, описывающих общие системы массового обслуживания. *Кибернетика*, 2, 1966, № 5, 79—81.
3. L. Takacz. On fluctuation problems in the theory of quenes. *Adv. Appl. Probability*, 8, 1975, 548—583.

Высший экономический институт
Кафедра математики София

Поступила 22. 1. 1979