Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ СПЛАЙНАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

ГЕОРГИ А. ТОТКОВ

В этой статье получены некоторые обратные теоремы (см. теоремы 2, 3 и 4) для наилучших сплайн приближений в пространствах Орлича. Некоторые из этих результатов анонсированы в [8]. Введена также одна структурная характеристика функции (типа модуля гладкости), дающая возможность получать прямые и обратные теоремы для наилучших приближений свободными сплайнами в произвольных пространствах Орлича (см. теорему 1). Как следствие развитых методов получен один результат (теорема 4) для пространств $L_p([0, 1])$, $1\leq p<\infty$, имеющий окончательный (по порядку) характер.

1. Обозначения. Как обычно, через $S(k, n)$ будем обозначать пространство сплайн-функций k-й степени с $n+1$ узлами на отрезке $\Omega=[0, 1]$, т. е. $s\in S(k, n)$, если существуют такие $n+1$ точек x_i, $i=0, 1, \dots, n$, $0=x_0<x_1<\dots<x_n=1$, что 1) $s\in C^{k-1}(\Omega)$ и 2) в интервале (x_{i-1}, x_i), $i=1, 2, \dots, n$, функция s является алгебраическим многочленом k-й степени ($s|_{(x_{i-1}, x_i)}\in H_k$). Отказываясь от условия 1), получаем класс $\bar{S}(k, n)$ сплайнов k-го порядка с $n+1$ узлами и дефектом k. Для множества (фиксированных) узлов $\Sigma=\{0=x_0<x_1<\dots<x_n=1\}$ введем следующие обозначения: $S(k, \Sigma)$ — все функции s, определенные на Ω и удовлетворяющие 1) и 2),

$$\underline{\Delta}_\Sigma=\min_i |x_{i+1}-x_i|.$$

В случае $k=0$ для удобства будем считать, что функции из $S(0, n)=\bar{S}(0, n)$ и $S(0, \Sigma)$ — непрерывные справа (или слева) в Ω.

Пусть $M(t)$ — функция Орлича, определенная на $(-\infty, +\infty)$ (т. е. $M(t)$ — четная, выпуклая и $M(0)=0$), а $L_M(\Delta)$ (отрезок $\Delta\subseteq\Omega$) — соответствующее пространство функций с нормой [6]:

$$\|f\|_{M(\Delta)}=\inf\{\lambda>0: \int_\Delta M[f(t)/\lambda]dt\leq 1\}.$$

Иногда будем просто писать $\|f\|_\Delta (=\|f\|_{M(\Delta)})$.

Далее через $E_n^k(f)_M$, $E_\Sigma^k(f)_M$ и $\bar{E}_n^k(f)_M$ обозначены наилучшие приближения функции $f\in L_M(\Omega)$ соответственно с элементами из $S(k, n)$, $S(k, \Sigma)$ и $\bar{S}(k, n)$. Так, например, $E_n^k(f)_M=\inf\{\|f-s\|_{M(\Omega)}: s\in S(k, n)\}$.

Как показывает следующая лемма, естественно предполагать в дальнейшем, что функция $M(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию в ∞, т. е. существуют постоянные $l^*>0$, $t_0\geq 0$, такие, что для $t\geq t_0$, $M(2t)\leq l^*M(t)$. Тогда $L_M(\Omega)$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 6, 1980, с. 187—197.

становится банаховым пространством [6]. Это пространство обозначим через $L_M^*(\Omega)$.

Лемма 1 [7]. *Пусть для любой функции $f \in L_M(\Omega)$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует сплайн-функция $s \in S(k, n)$ (для некоторых целых $k, n \geqq 0$), такая, что $\|f - s\|_\Omega < \varepsilon$.*

Тогда $M(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию в ∞.

Доказательство. Из условия леммы 1 следует плотное вложение $B \subset L_M(\Omega)$, где B — множество измеримых и ограниченных на Ω функций. Этого достаточно утверждать [6], что $M(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию в ∞.

k-й модуль гладкости $\omega_k(f;\delta)_M$ функции $f \in L_M(\Omega)$ $(\delta > 0)$ определяется

$$\omega_k(f;\delta)_M = \sup\{\|\Delta_h^k f(u)\|_{M(u\,:\,u,u+kh\in\Omega)} : |h| \leqq \delta\},$$

где

$$\Delta_h^k f(u) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+i}\binom{k}{i} f(u+ih).$$

2. Одна структурная характеристика функции в пространствах Орлича. В многих работах (см., например, [2; 4; 9; 10]) рассматривался вопрос, как найти классы функций, характеризующихся через наилучшие приближения (преимущественно в пространствах $L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$) этих функций сплайнами (теоремы типа Джексона и Бернштейна). Отметим, что в этих работах прямые и обратные теоремы не совпадают в общем случае (для произвольного набора узлов аппроксимирующих сплайнов); обычно совпадение наблюдается, если наложить дополнительные требования (типа равномерного распределения) узлам сплайнов, приближающих функцию.

Используя одну нетрадиционную характеристику функции (топологический модул ν_k), В. Попов [12; 13] получил прямые и обратные теоремы для наилучших приближений сплайнами из $S(k, n)$ в пространствах $L_p(\Omega)$, $1 \leqq p \leqq \infty$. В произвольном пространстве Орлича $L_M^*(\Omega)$ модуль типа ν_k вводится следующим образом [7]. Определим функции (см. и [11])

$$f_M(\varepsilon) = \inf\{M(\varepsilon u)/M(u) : u > 0\}, \quad g_M(\varepsilon) = \sup\{M(\varepsilon u)/M(u) : u > 0\}.$$

Отметим некоторые свойства функций f_M и g_M: 1) g_M — функция Орлича, 2) f_M и g_M — неубывающие в интервал $(0, +\infty)$, 3) для $t \in (-\infty, +\infty)$, $M(1) f_M(t) \leqq M(t) \leqq M(1) g_M(t)$, 4) $g_M(t) f_M(t^{-1}) = 1$, $t \in (-\infty, +\infty)$, 5) $g_M(t\varepsilon) \geqq \varepsilon g_M(t)$, $\varepsilon \geqq 1$, $t \in (-\infty, +\infty)$, 6) $f_M^{-1}(\varepsilon t) \leqq \varepsilon f_M^{-1}(t)$, $\varepsilon \geqq 1$, $t \geqq 0$.

Свойство 1) дает нам возможность рассматривать и норму $\|\cdot\|_{g_M}$, а свойство 2) — образовывать функции f_M^{-1} и g_M^{-1}, обратные соответственно к f_M и g_M в $(0, +\infty)$.

Модуль $\nu_k(f;\delta)_M$ определим для $f \in L_M^*(\Omega)$ и $\delta > 0$

$$\partial_k(f;\delta)_M = \inf_{\varphi \in V} \|\omega_k(f;[\varphi(x-\delta), \varphi(x+\delta)])_M\|_{g_M(x\in\Omega)},$$

где V — класс всех неубывающих функций φ на Ω, для которых положено $\varphi(a) = 0$, $a < 0$ и $\varphi(b) = 1$, $b \geqq 1$, а

$$\omega_k(f;[a,b])_M = \sup\{\|\Delta_h^k f(u)\|_{M(u\,:\,u,\,u+kh\in[a,b])}\}.$$

Приведем некоторые свойства модуля $\nu_{k,M}$ [7]:

1) $\nu_k(\cdot;\delta)_M$ — неубывающая функция $\delta > 0$,

2) для целых $k \geq r \geq 0$, $\nu_k(f;\delta)_M \leq 2^r \nu_{k-r}(f;\delta)_M$,

3) для любой функции $f \in L_M^*(\Omega)$ и $n=1, 2, \ldots$ имеем

$$\nu_{k+1}(f;\, n^{-1})_M \leq \frac{c_1}{g_M^{-1}(n)}\, \omega_{k+1}(f;\, n^{-1})_M \quad (k \geq 0),$$

где c_1 — константа, зависящая только от k,

4) если функция f обладает $(r-1)$-й абсолютно-непрерывной производной $f^{(r-1)}$ и $f^{(r)} \in L_M^*(\Omega)$, то для $k \geq r \geq 0$ и $n=1, 2, \ldots$ имеет место неравенство

$$\nu_{k+1}(f;\, n^{-1})_M \leq C_{k,r} \frac{f_M^{-1}(n)}{g_M^{-1}(n)}\, \nu_{k+1-r}(f^{(r)};\, c_{k,r} n^{-1})_M$$

с константой $c_{k,r}$, зависящей только от k и r.

Следующая теорема дает возможность в любом пространстве Орлича получать оценку снизу и сверху (прямые и обратные теоремы) для наилучших приближений сплайнами из $S(k, n)$ в терминах модуля $\nu_{k,M}$.

Теорема 1. *Если функция $f \in L_M^*(\Omega)$, то для любого натурального числа $n=1, 2, \ldots$ и целого $k \geq 0$ имеем*

$$\frac{c_2}{f_M^{-1}(n)}\, E_m^k(f)_M \leq \nu_{k+1}(f;\, n^{-1})_M \leq \frac{c_3}{g_M^{-1}(n)}\, E_e^k(f)_M, \tag{1}$$

где $m=k(n-1)+n$, $l=[n/9]$, а c_2 и c_3 — константы, зависящие только от k.

Примеры: А) $M(t)=|t|^p/p$, $p>1$ (пространство $L_p(\Omega)$). В этом случае $f_M(t)=g_M(t)=M(t)$, а (1) известно из [12], [13]. Характерная особенность здесь, что оценки сверху и снизу совпадают по порядкам. Б) $M(t)=|t|^p(|\ln|t|(+1)$, $p>1$. Теперь $g_M(t)=M(t)$, $f_M(t)=|t|^p(|\ln|(t)|+1)^{-1}$ и оценки в (1) очень близкие по порядкам.

Примеры А) и Б) показывают, что в терминах функций f_M и g_M оценки (1) неулучшаемые. Несовпадение в общем случае (произвольном пространстве Орлича) порядков оценок снизу и сверху—характерное для пространств Орлича. Вопрос о нахождении других характеристик функции, дающие оценки типа (1), остается открытым.

Доказательство теоремы 1 использует следующие леммы.

Лемма 2 [1]. *Пусть отрезок $\Delta \subseteq \Omega$ и функция $f \in L_M^*(\Delta)$. Существует алгебраический полином P_k степени $\leq k$, для которого*

$$\|f-P_k\|_{M(\Delta)} \leq c_4 \sup_h \|\Delta_h^{k+1} f(u)\|_{M(u\,:\,u,\,u+(k+1)h \in \Delta)},$$

с константой C_4, зависящей только от k.

Лемма 3. *Для любых целых $k \geq 0$ и $n \geq 1$ класс $\widetilde{S}(k, n)$ является подмножеством замыкания класса $S(k, k(n-1)+n)$ в пространстве $L_M^*(\Omega)$.*

Лемма 3 известна в пространствах $L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ [2]; в более общей ситуации она доказана в [7].

Лемма 4. *Пусть функция $f \in L_M^*(\Omega)$. Для любого целого $n \geq 1$ существуют $l+1$ точек x_i, $i=0, 1, \ldots, l$, $f_M g_M^{-1}(n) \leq l \leq n$, $0=x_0<x_1<\ldots<x_l=1$ такие, что для $\Delta_i=[x_{i-1}, x_i]$,*

$$\|f\|_{\Delta_l}\leq\|f\|_{\Delta_i}=\|f\|_{\Omega}/g_M^{-1}(n),\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,l-1.$$

Лемма 5. *Пусть функция* $f\in L_M^*(\Omega)$. *Для любого целого* $n\geq1$ *существуют* $l+1$ *точек* x_i, $i=0,\,1,\,\ldots,\,l$, $n\leq l\leq g_Mf_M^{-1}(n)$, $0=x_0<\ldots<x_m=1$ *такие, что для* $\Delta_i=[x_{i-1},\,x_i]$

$$\|f\|_{\Delta_l}\leq\|f\|_{\Delta_i}=\|f\|_{\Omega}/f_M^{-1}(n),\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,l-1.$$

Леммы 4 и 5 доказаны в [7].

Доказательство теоремы 1. Докажем сперва второе неравенство в (1). Пусть $\varepsilon>0$, $s\in S(k,\,n)$ и $\|f-s\|_{\Omega}<E_n^k(f)_M+\varepsilon$. Из леммы 4 и $s\in S(k,\,n)$ следует: существуют $m+1$ точек x_i, $i=0,\,1,\,\ldots,\,m$, $0=x_0<x_1<\ldots<x_m=1$ такие, что $(\Delta_i=[x_{i-1},\,x_i])$

$$\|f-s\|_{\Delta_i}\leq\|f-s\|_{\Omega}/g_M^{-1}(n),\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,m, \tag{2}$$

$$n+f_Mg_M^{-1}(n)\leq m\leq 2n. \tag{3}$$

Пусть функция $\varphi\in V$ определена

$$\varphi(x)=\begin{cases}x_i, & i/(m+1)\leq x<(i+1)/(m+1),\quad i=0,\,1,\,\ldots,\,m,\\ 1, & x\geq1,\\ 0, & x\leq0,\end{cases}$$

и $\lambda=2^{k+1}\|f-s\|_{\Omega}/g_M^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)g_M^{-1}(n)$. Положим $x_{-1}=x_0$, $x_{m+1}=x_m$, $\Delta_i'=[x_{[(i-1)/2]}$, $x_{[(i-1)/2]+1}]$, $i=0,\,1,\,\ldots,\,2m+1$.

Для $\delta=1/4(m+1)$, используя (2), последовательно имеем

$$\int_0^1 g_M\left[\frac{1}{\lambda}\sup_h\|\Delta_h^{k+1}f(u)\|_{M(u,\,u+(k+1)h\in[\varphi(x-\delta),\,\varphi(x+\delta)])}\right]dx$$

$$=\sum_{i=0}^{2(m+1)}\int_{\delta+(i-1)/2(m+1)}^{\delta+i/2(m+1)}g_M[\ldots]dx\leq\sum_{i=0}^{2(m+1)}\frac{1}{2(m+1)}g_M\left[\frac{1}{\lambda}\sup_h\|\Delta_h^{k+1}f(u)\|_{\Delta_i'}\right]$$

$$\leq\frac{3}{2(m+1)}\sum_{j=1}^{m}g_M\left[\frac{1}{\lambda}\sup_h\|\Delta_h^{k+1}(f-s)(u)\|_{(u\,:\,u,u+(k+1)h\in\Delta_j}\right]$$

$$\leq\frac{3}{2(m+1)}\sum_{j=1}^{m}g_M\left[g_M^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]=\frac{m}{m+1}<1.$$

Последнее неравенство дает нам

$$\nu_{k+1}(f;\;1/4(m+1))_M\leq2^{k+1}[E_n^k(f)_M+\varepsilon]/g_M^{-1}(n)g_M^{-1}\left(\frac{2}{3}\right),$$

что доказывает $(\varepsilon\to0)$ второе неравенство в (1), так как (см. (3)) $m\leq2n$.

Доказательство первого неравенства в (1). Пусть $\varepsilon>0$, $\varphi\in V$, $\delta=n^{-1}$ и

$$\nu_{k+1}(f;\;n^{-1})_M+\varepsilon\geq\|\sup_h\|\Delta_h^{k+1}f(u)\|_{[\varphi(x-\delta),\,\varphi(x+\delta)]}\|g_M(x\in\Omega). \tag{4}$$

Положим $x_i=\varphi(i/n)$, $\Delta_i=[x_{i-1},\,x_i]$ для $i=0,\,1,\,\ldots,\,n$. Очевидно, имеем $0=x_0\leq x_1\leq\ldots\leq x_n=1$. По лемме 2 существуют полиномы $s_i\in H_k$, $i=1,\,2,\,\ldots,\,n$, для которых

(5) $$\|f-s_i\|_{\Delta_i}\leqq c_1 \sup_h \|\Delta_h^{k+1} f(u)\|_{M(u\,:\,u,u+(k+1)h\in\Delta_i)}.$$

Определим сплайн $\widetilde{s}\in\widetilde{S}(k, n)$, полагая $\widetilde{s}|_{\Delta_i}=s_i$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Пусть теперь точки x'_j, $j=0, 1, \ldots, l$, $0=x'_0<x'_1<\ldots<x'_l=1$ построены по лемме 5 для функции $f-\widetilde{s}$ и число $3n$, т. е.

(6) $$\|f-\widetilde{S}\|_{\Omega_l}\leqq\|f-\widetilde{S}\|_{\Omega_j}=\|f-\widetilde{s}\|_{\Omega}/f_M^{-1}(3n),\quad j=1, 2, \ldots, l-1,$$

где $\Omega_j=[x'_{i-1}, x'_i]$, $j=1, 2, \ldots, l$ и

(7) $$3n\leqq l\leqq g_M f_M^{-1}(3n).$$

Обозначим через Ω_{js}, $j=1, 2, \ldots, p_s$ те множества из $\{\Omega_j\}_{j=1}^{l}$, которые содержатся в Δ_s (возможно и $p_s=0$):

(8) $$\Delta_s\supseteq\bigcup_{j=1}^{p_s}\Omega_{js},\quad s=1, 2, \ldots, n.$$

С другой стороны, имеем не менее чем (см. (7)) $l-1-(n-1)\geqq 3n-1-n+1=2n$ множеств из $\{\Omega_j\}_{j=1}^{e}$, не содержащих точки из x_i, $i=1, 2, \ldots, n$, следовательно,

(9) $$\sum_{s=1}^{u} p_s\geqq 2n.$$

Из (6) и (8) для $j=1, 2, \ldots n-1$ получаем

$$p_j\leqq\int_{\Delta_j} M\left[\frac{|f-\widetilde{s}|(u)}{\|f-\widetilde{s}\|_{\Omega}}f_M^{-1}(3n)\right]du$$

и

$$p_n-1<\int_{\Delta_n} M\left[\frac{|f-\widetilde{s}|(u)}{\|f-\widetilde{s}\|_{\Omega}}f_M^{-1}(3n)\right]du.$$

Из этих неравенств находим, что для $p_i\neq 0$, $i=1, 2, \ldots, n-1$

(10) $$\|f-\widetilde{s}\|_{\Delta_i}\geqq\|f-\widetilde{s}\|_{\Omega}/f_M^{-1}(3n)\,f_M^{-1}(p_i^{-1}),$$

а для $p_n\geqq 2$ в последнем неравенстве необходимо заменить p_n^{-1} на $1/(p_n-1)$.

Норму $\|f\|_{\Delta}$ функции $f\in L_M^*(\Omega)$ можно вычислять по формуле [6]

(11) $$\|f\|_{\Delta}=\inf_{l>0}\frac{1}{l}\left\{1+\int_{\Delta} M[lf(t)]dt\right\}.$$

Используя (11), (4), (5) и (10), для $\delta=1/n$ имеем

(12) $$\nu_{k+1}(f;\ n^{-1})_M+\varepsilon$$

$$\geqq\inf_{l>0}\frac{1}{l}\left\{1+\int_{\Omega} g_M[l\sup_h\|\Delta_h^{k+1}f(u)\|_{(u,u+(k+1)h\in[\varphi(x-\delta),\,\varphi(x+\delta)])}]dx\right\}$$

$$\geqq\inf_{l>0}\frac{1}{l}\left\{1+\sum_{i=1}^{n}\int_{(i-1)/n}^{i/n} g_M[\ldots]dx\right\}\geqq\inf_{l>0}\frac{1}{l}\left\{1+n^{-1}\sum_{i=1}^{n} g_M[l\|f-\widetilde{s}\|_{\Delta_i}/c_1]\right\}$$

$$\geq \inf_{l>0} \left\{ 1+n^{-1} \sum_{p_i\neq 0}' g_M[l\,\|f-\widetilde{s}\|_\Omega / c_1 f_M^{-1}(3n) f_M^{-1}(p_i^{-1})\right\} = \inf_{l>0} R_l,$$

где под Σ' понимается, что в этой сумме для $p_n \geq 2$, p_n надо заменить на $(p_n-1)^{-1}$, а для $p_n=0,1$ необходимо, чтобы пропустить член, содержащий p_n^{-1}.

Тогда для $0<l\leq c_1 f_M^{-1}(3n)/\|f-\widetilde{s}\|_\Omega$ имеем

$$P_l \geq \frac{1}{l} \geq \|f-\widetilde{s}\|_\Omega / c_1 f_M^{-1}(3n). \tag{13}$$

Для $l>c_1 f_M^{-1}(3n)/\|f-\widetilde{s}\|_\Omega$, используя свойства 4) и 5) функций g_M и (9), последовательно находим

$$P_l \geq \frac{1}{l}\left\{1+n^{-1} \sum_{p_i\neq 0}' [l\,\|f-\widetilde{s}\|_\Omega / c_1 f_M^{-1}(3n)] g_M[1/f_M^{-1}(p_i^{-1})]\right\} \tag{13'}$$

$$=\frac{1}{l}\left\{1+n^{-1}[l\,\|f-\widetilde{s}\|_\Omega / c_1 f_M^{-1}(3n)] \sum_{p_i\neq 0}' 1/f_M[f_M^{-1}(p_i^{-1})]\right\}$$

$$\geq [\,\|f-\widetilde{s}\|_\Omega / c_1 f_M^{-1}(3n) \sum_{p_i\neq 0} p_i \geq \frac{(2n-1)\,\|f-\widetilde{s}\|_\Omega}{c_1 n f_M^{-1}(3n)}.$$

Из (13), (13′) и (12), имея в виду и свойство 6) функции f_M, получаем

$$\nu_{k+1}(f;\, n^{-1})_M+\varepsilon \geq \|f-\widetilde{s}\|_\Omega / 3c_1 f_M^{-1}(n) \geq \widetilde{E}_n^k(f)_M / 3c_1 f_M^{-1}(n).$$

В последнем неравенстве используем также, что $s \in S(\widetilde{k}, \widetilde{n})$.
Полученное неравенство и лемма 3 доказывают ($\varepsilon \to 0$) первое неравенство в (1). Этим доказательство теоремы 1 завершено.

3. Обратные теоремы. Пусть $\Sigma_n=\{0=x_{0,n}<x_{1,n}<\ldots<x_{n,n}=1\}$ — заданное множество узлов на интервал $\Omega=[0,\,1]$ для $n=1,\,2,\ldots$. Будем решать следующую (обратную) задачу: оценить $k+1$-го модуля гладкости функции $f \in L_M^*(\Omega)$ через наилучшие сплайн-приближения $E_{\Sigma_n}^k(f)_M$ функции f в метрике пространства $L_M^*(\Omega)$. В случае пространств $L_p(\Omega)$, $1\leq p\leq\infty$ подобные задачи решались, например, в [2; 4; 9; 10] и т. д.

Здесь мы сформулируем две обратные теоремы и в общем случае произвольного пространства Орлича. Первая из этих теорем (теорема 2) точная по порядку. В формулировке теоремы 2 используется функция $G_M(t)$, определенная для $t\geq 1$

$$G_M(t)=\sup\{M(Q^{-1}) g_M(a): 1\leq a\leq t\}.$$

Заметим, что в рассмотренном выше примере A) пространстве $L_p(\Omega)$, $1\leq n<\infty/$, $G_M(t)=1$, а в примере Б), $G_M(t)=[1+\,|\ln|t||]^2$.

Теорема 2. *Пусть функция $f\in L_M^*(\Omega)$ и $\Sigma_m=\{0=x_{0,m}<x_{1,m}<\ldots<x_{m,m}=1\}$ — произвольное множество узлов на Ω для $m=1,\,2,\ldots,\,n$. Тогда*

$$\omega_{k+1}(f;\,\Delta_n)_M \leq c_5\left[\varepsilon_n+\frac{(\Delta_n)^k}{g_M^{-1}(\Delta_n^{-1})} \sum_{j=1}^{n} \frac{M^{-1}(\Delta_j^{-1})\varepsilon_j}{(\Delta_j)^k g_M^{-1}(j) g_M^{-1}[1/jG_M(j)]}\right],$$

где c_5 — константа, зависящая только от k, $\underline{\Delta}_j=\underline{\Delta}_{\Sigma_j}$ и $\varepsilon_j=E^k_{\Sigma^j}(f)_M$, $j=1, 2, \ldots, n$.

В пространствах $L_p(\Omega)$, $1\leqq p<\infty$ (пример А)), $g_M^{-1}(j)g_M^{-1}(1/G_M(j)j)=1$, $g_M^{-1}(t)=M^{-1}(t)=|pt|^{1/p}$, а теорема 2 имеет окончательный (по порядку) характер [10].

Структура следующего результата (хотя и не окончательного по порядку) проще, чем теорема 2.

Теорема 3. *В условиях и обозначениях теоремы 2*

$$\omega_{k+1}(f;\ \underline{\Delta}_n)_M\leqq c_5\sum_{j=1}^{n}(\underline{\Delta}_n/\underline{\Delta}_j)^k M^{-1}(\underline{\Delta}_j^{-1})\varepsilon_j/M^{-1}(\underline{\Delta}_j)g_M^{-1}(\underline{\Delta}_n^{-1}).$$

Методы доказательств, развитые для теорем 2 и 3, дают возможность показать следующий результат для приближений сплайнами в пространствах $L_p(\Omega)$, $1\leqq p<\infty$.

Теорема 4. *Если функция $f\in L_p(\Omega)$, $1\leqq p<\infty$ и $k\geqq 0$, то для любого $n=1, 2, \ldots$*

$$\omega_{k+1}(f;\ n^{-1})_{L_p}\leqq c_6\left[\frac{1}{3n}\sum_{j=n+1}^{4n}(\varepsilon_j)^p\right]^{1/p}\leqq c_7\omega_{k+1}(f;\ n^{-1})_{L_p},$$

где c_6 и c_7 — константы, зависящие только от k, $\varepsilon_j=E^k_{\Sigma^j}(f)_{L_p}$ и $\Sigma^j=\{i/j\}_{i=0}^{j}$, $j=n+1,\ n+2, \ldots, 4n$.

В доказательствах теорем 2, 3 и 4 оценивается гладкость аппроксимирующего сплайна $s\in S(k, n)$ в терминах полунормы

$$J(s^{(k)};\ \Sigma)_M=\inf\left\{\lambda>0:\ \sum_{i=1}^{n}M([S^{(k)}]_{x_i}/\lambda)\leqq 1\right\},$$

где $\Sigma=\{0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1\}$ и

$$[S^{(k)}]_{x_i}=|S^{(k)}(x_i+0)-S^{(k)}(x_i-0)|,\quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Используя обычный метод оценивания полунормы J (в случае пространств $L_p(\Omega)$, $1\leqq p<\infty$ см. [10]), можно доказать леммы (см. и [7]):

Лемма 6. *Пусть $f\in L^*_M(\Omega)$, $s_n\in S(k, \Sigma_n)$, $s_m\in S(k, \Sigma_m)$ и $\|f-s_n\|_\Omega\leqq\varepsilon_n$, $\|f-s_m\|_\Omega\leqq\varepsilon_m$. Тогда*

$$J(s_n^{(k)};\ \Sigma_n)_M\leqq c_7(a_n\varepsilon_n+Q_m\varepsilon_m)+J(S_m^{(k)};\ \Sigma_m)_M,$$

где c_7 — константа, зависящая только от k, $\underline{\Delta}_s=\underline{\Delta}_{\Sigma_s}$ и

$$a_s-\min\{(\underline{\Delta}_s)^{-k}M^{-1}(\underline{\Delta}_s^{-1})/g_M^{-1}(s)g_M^{-1}(1/sG_M(s)),\quad (\Delta_s)^{-k}b_s\},\quad s=m,\ n.$$

$$b_s=M^{-1}(\underline{\Delta}_s^{-1})/M^{-1}(\underline{\Delta}_s).$$

В пространствах $L_p(\Omega)$, $1\leqq p<\infty$ имеем просто $a_s(\underline{\Delta}_s)^{-k-1/p}$.

Лемма 7. *Пусть функция $f\in L^*_M(\Omega)$, $s_n\in S(k, \Sigma_n)$ и $\|f-s_n\|_\Omega\leqq\varepsilon_n$. Тогда для $\underline{\Delta}_n=\underline{\Delta}_{\Sigma_n}$*

$$\omega_{k+1}(f;\ \underline{\Delta}_n)_M\leqq c_8[\varepsilon_n+J(s_n^{(k)};\ \Sigma_n)_M(\underline{\Delta}_n)^k/g_M^{-1}(\underline{\Delta}_n^{-1})],$$

где c_8 — константа, зависящая только от k.

Теоремы 2 и 3 следуют из леммы 7 после n-кратного применения леммы 6.

В доказательстве теоремы 4 продемонстрируем некоторые моменты доказательств теорем 2 и 3.

Будем рассматривать множества

$$U_l=[1/2(l+1),\ 1/2l),\quad V_l=(1-1/2l,\ 1-1/2(l+1)],\ l=1, 2, \ldots, [n/2]-1,$$

$$U_{[n/2]}=[0,\ 1/2[n/2]],\quad V_{[n/2]}=(1-1/2[n/2],\ 1].$$

Лемма 8. *Пусть m и n — натуральные числа, $n\leq m\leq n+[n/2]$. Тогда для любого $i=1, 2, \ldots, m-1$, существуют целые j, l, $1\leq l\leq [n/2]$, $1\leq j \leq n+l$, такие, что*

$$\min\{(i/m-j/(m+l)m,\quad (j+1)/(m+l)-i/m)m\}\geq 1/6.$$

Доказательство. Если $i/m\in U_l$, положим $j=i$; если $i/m\in V_l$, положим $j=i+l-1$. Лемма 8 легко следует из способа построения множеств U_l и V_l [7].

Для $q=n+1, n+2, \ldots, 2n$ и $l=1, 2, \ldots, [n/2]$ введем множества индексов

$$I_{l,q}=\{i: i/(q-l)\in U_l,\ 1\leq i\leq q-l-1\},\quad J_{l,q}=\{i: i/(q-l)\in V_l,\ 1\leq i\leq q-l-1\}.$$

Заметим, что для каждого $m=[n/2], \ldots, n+[n/2]$ имеем

$$\bigcup_{l=1}^{[n/2]}\{I_{l,m+l}\cup J_{l,m+l}\}=\{0,\ 1, \ldots,\ m\}. \tag{14}$$

По лемме 8 для каждого $i\in I_{l,q}$ (целые l, q, $1\leq l\leq [n/2]$, $n+1\leq q\leq 2n$) существует целое $j(i)$, $1\leq j(i)\leq q-1$ такое, что

$$\frac{i}{q-l}-\frac{j(i)}{q}\geq\frac{1}{6(q-l)}\geq\frac{1}{12n},\quad \frac{j(i)+1}{q}-\frac{i}{q-l}\geq\frac{1}{6(q-l)}\geq\frac{1}{12n}. \tag{15}$$

Рассмотрим следующие (возможно и пустые) подмножества Ω:

$$U_{l,q}=\bigcup_{i\in I_{l,q}}\left[\frac{i}{q-l}-\frac{1}{12n},\ \frac{i}{q-l}+\frac{1}{12n}\right],\quad V_{l,q}=\bigcup_{i\in J_{l,q}}\left[\frac{i}{q-l}-\frac{1}{12n},\ \frac{i}{q-l}+\frac{1}{12n}\right],$$

$$q=n+1,\ n+2, \ldots, 2n,\quad l=1,\ 2, \ldots, [n/2].$$

Теперь докажем

Лемма 9. *Для любой функции $f\in L_p(\Omega)$, $1\leq p<\infty$ и $q=n+1, n+2, \ldots, n+[n/2]$ имеем*

$$\sum_{l=1}^{[n/2]}[\|f\|^p_{L_p(U_{l,q})}+\|f\|^p_{L_p(V_{l,q})}]\leq 4\|f\|^p_{L_p(\Omega)}, \tag{16}$$

$$\bigcup_{l=1}^{[n/2]}[\|f\|^p_{L_p(U_{l,l+q})}+\|f\|^p_{L_p(V_{l,l+q})}]\leq\|f\|^p_{L_p(\Omega)}. \tag{17}$$

Доказательство. Нетрудно установить, что (16) сразу вытекает из следующего утверждения:

$$\text{если } l_1<l_2<l_3 \text{ и } U_{l_2,q}\neq\emptyset,\ \text{то } U_{l_1,q}\cap U_{l_3,q}=\emptyset. \tag{18}$$

Для множеств $\{V_{l,q}\}$ имеем то же.

Покажем (18): допустим, что $U_{l_1,q} \cap U_{l_3,q} \neq \emptyset$. Тогда для некоторых точек

$$(19) \qquad i_p/(q-l_p) \in U_{l_p}$$

и отрезков $\Delta_p = [i_p/(q-l_p) - 1/12n,\ i_p/(q-l_p)+1/12n]$, $p=1, 2, 3$ имеем $\Delta_1 \cap \Delta_3 \neq 0$, или

$$(20) \qquad |i_1/(q-l_1) - i_3/(q-l_3)| \leqq 2/12n - 1/6n.$$

Из (19) и способа построения множеств $\{U_l\}$ следует $i_1/(q-l_1) > i_2/(q-l_2) > i_3/(q-l_3)$, откуда $(l_1 < l_2 < l_3)$ получаем $i_1 > i_2 > i_3$, т. е. $i_1 - i_3 \geqq 2$.

С другой стороны, лемма 8 для $j = i_p$ (см. и (15)) дает нам неравенство

$$0 < i_p/(q-l_p) - i_p/q = 1/q - ((i_p+1)/q - i_p/(q-l_p)) \leqq 1/q - 1/6n, \quad p=1, 2, 3.$$

Из этих неравенств и (20) получаем, что

$$\left|\frac{i_3-i_1}{q}\right| \leqq \left|\frac{i_1}{q} - \frac{i_1}{q=l_1}\right| + \left|\frac{i_3}{q} - \frac{i_3}{q-l_3}\right| + \left|\frac{i_1}{q-l_1} - \frac{i_3}{q-l_3}\right| \leqq \frac{2}{q} - \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n} < \frac{2}{q},$$

или $|i_3 - i_1| < 2$ — противно уже полученному неравенству $i_1 - i_3 \geqq 2$; Этим (18) доказано.

Нетрудно установить, что (17) сразу вытекает из следующего утверждения:

$$(21) \qquad \text{если} \quad l \neq s, \quad \text{то} \quad U_{l,q+l} \cap U_{s,q+l} = \emptyset,$$

$$V_{l,q+l} \cap V_{s,q+s} = \emptyset, \quad U_{l,q+e} \cap V_{s,q+s} = \emptyset.$$

Покажем, например, первое равенство в (21) (остальные выводятся подобным образом): допустим противное — $U_{l,q+l} \cap U_{s,q+s} \neq \emptyset$. Тогда для некоторых целых i и j выполнены $i/q \in U_l$, $j/q \in U_s$, $|i/q - j/q| \leqq 1/6n$, т. е. $|i-q| \leqq q/6n \leqq 2n/6n = 1/3 < 1$, или $i=j$. Следует, что $\{i/q = i/q\} \in U_l \cap U_s$ — противно способу построения множеств $\{U_l\}$. Полученное противоречие показывает, что (21) выполнены. Этим лемма 9 доказана.

Доказательство теоремы 4. Второе неравенство в утверждении теоремы 4 следует, например, из [3].

Теперь докажем первое неравенство. Из леммы 6 для множеств узлов Σ^n и Σ^q, $n+1 \leqq q \leqq n+[n/2]$ и сплайны $s_n \in S(k, \Sigma^n)$, $s_q \in S(k, \Sigma^q)$ получаем

$$(22) \qquad J(s_n^{(k)};\ \Sigma^n)_p \leqq c'_7 n^{k+1/p}[\|f-s_n\|_{L_p(\Omega)} + \|f-s_q\|_{L_p(\Omega)}] + J(s_q^{(k)};\ \Sigma^q)_p,$$

где c'_7 — константа, зависящая только от k, а

$$J(s_n^{(k)};\ \Sigma^n)_p = \{\sum_{i=1}^{n-1} ([s_n^{(k)}]_{i/n})^p\}^{1/p}.$$

Оценим $J(s_q^{(k)};\ \Sigma^q)_p$ для $q = n+1, n+2, \ldots, n+[n/2]$. Используя (14), (15), (17) и L_p-неравенство Маркова, последовательно выводим

$$[J(s_q^{(k)};\ \Sigma^q)]^p = \sum_{l=1}^{[n/2]} \sum_{i \in I_{l,q+l}} ([S_q^{(k)}]_{i/q})^p + \sum_{i \in I_{l,q+l}} ([s_q^{(k)}]_{i/q})^p]$$

$$=\sum_{l=1}^{[n/2]}\Big(\sum_{i/q\in U_l}+\sum_{i/q\in V_l}\Big)\Big[\max_{x\in[i/q-1/12n,\ i/q]}|s_q^{(k)}(x)-s_{q+l}^{(k)}(x)|^p$$

$$+\max_{x\in[i/q,\ i/q+1/12n]}|s_q^{(k)}(x)-s_{q+l}^{(k)}(x)|^p\Big]$$

$$\leq\sum_{l=1}^{[n/2]}\Big(\sum_{i/q\in U_l}+\sum_{i/q\in Vl}\Big)c_9n^{kp+1}\|s_q-s_{q+l}\|^p_{L_p(i/q-1/12n,\ i/q+1/12n)}$$

$$=c_9n^{kp\pm1}\sum_{l=1}^{[n/2]}(\|s_q-s_{q+l}\|^p_{L_p(Ul,l+q)}+\|s_q-s_{q+l}\|^p_{L_p(V_{l,l+q})})$$

$$\leq 2^pc_9n^{kp+1}\sum_{l=1}^{[n/2]}(\|f-s_q\|^p_{L_p(U_{l,l+q}\cup V_{l,l+q})}+\|f-s_{q+l}\|^p_{L_p(U_{l,l+q}\cup Vl,l+q)})$$

$$\leq 2^pc_9n^{kp+1}[\|f-s_q\|^p_{L_p(\Omega)}+\sum_{l=1}^{[n/2]}\|f-s_{q+l}\|^p_{L_p(U_{l,l+q}\cup Vl,l+q)}]$$

(c_9 — константа, зависящая только от k). Из последнего неравенства и (22) для $q=n+1,\ n+2,\ldots,\ n+[n/2]$ получаем неравенство

$$[J(s_n^{(k)};\ \Sigma^n)_p]^p\leq c_{10}n^{kp+1}\{\|f-s_n\|^p_{L_p(\Omega)}+\|f-s_q\|^p_{L_p(\Omega)}$$

$$+\sum_{l=1}^{[n/2]}\|f-s_{q+l}\|^p_{L_p(U_{l,l+q}\cup V_{l,l+g})}\},$$

с константой c_{10}, зависящей только от k. Суммируя это неравенство для $q=n+1,\ n+2,\ldots,\ n+[n/2]$, находим

$$\left[\frac{n}{2}\right][J(s_n^{(k)};\ \Sigma^n)_p]^p\leq c_{10}n^{kp+1}\Big\{\left[\frac{n}{2}\right]\|f-s_n\|^p_{L_p(\Omega)}\tag{23}$$

$$+\sum_{q=n+1}^{n+[n/2]}\|f-s_q\|^p_{L_p(\Omega)}+\sum_{q=n+1}^{n+[n/2]}\sum_{l=1}^{[n/2]}\|f-s_{q+l}\|^p_{L_p(U_{l,l+q}\cup V_{l,l+q})}\Big\}.$$

Имея в виду (16), оценим последнюю сумму в (23):

$$\sum_{q=n+1}^{n+[n/2]}\sum_{l=1}^{[n/2]}\|f-s_{q+l}\|^p_{L_p(U_{l,l+q}\cup V_{l,l+q})}$$

$$=\sum_{m=n+1}^{2n}\ \sum_{l=1}^{\min\{[n/2],\ m-n\}}\|f-s_m\|^p_{L_p(U_{l,m}\cup V_{l,m})}\leq 4\sum_{m=n+1}^{2n}\|f-s_m\|^p_{L_p(\Omega)}.$$

Из этого неравенства и (23) следует

$$[J(s_n^{(k)};\ \Sigma^n)_p]^p\leq c_{11}n^{kp+1}[\|f-s_n\|^p_{L_p(\Omega)}+n^{-1}\sum_{m=n+1}^{2n}\|f-s_m\|^p_{L_p(\Omega)}]$$

для некоторой константы c_{11}, зависящей только от k. Полученное неравенство и лемма 7 (в случае $L_p(\Omega)$, $1\leq p<\infty$, множество узлов $\Sigma^n=\{i/n\}_{i=0}^n$, имеем $\Delta_n=n^{-1}$, $g_M^{-1}(\Delta_n^{-1})=n^{-1/p}$) дают нам неравенство

$$\omega_{k+1}(f;\ n^{-1})_{L_p} \leq c_{12}\{\varepsilon_n + [n^{-1} \sum_{m=n+1}^{2n} (\varepsilon_m)^p]^{1/p}\}$$

с константой c_{12}, зависящей только от k, $\varepsilon_m = E^k_{\sum m}(f)_{L_p}$.

Используя это неравенство для $n = m+1,\ m+2, \dots, 2m$, последовательно имеем:

$$m\omega_{k+1}(f;\ 1/2m)_p \leq \sum_{n=m+1}^{2m} \omega_{k+1}(f;\ n^{-1})_p$$

$$\leq c_{12} \sum_{n=m+1}^{2m} \{\varepsilon_n + [n^{-1} \sum_{i=n+1}^{2n} (\varepsilon_i)^p]^{1/p}\} \quad \leq c_{12}\{\sum_{n=m+1}^{4m} \varepsilon_n + m[m^{-1} \sum_{n=m+1}^{4m} (\varepsilon_n)^p]^{1/p}\}$$

$$\leq c_{12}\{3m[(3m)^{-1} \sum_{n=m+1}^{4m} (\varepsilon_n)^p]^{1/p} + m[m^{-1} \sum_{n=m+1}^{4m} (\varepsilon_m)^p]^{1/p}\}.$$

Это неравенство доказывает требуемое утверждение.

Автор благодарит В. А. Попову за постановку задач и внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Брудный. Многомерный аналог одной теоремы Уитни. *Мат. сб.*, **82**, 1970, 175—191.
2. Ю. Брудный. Кусочно-полиномиальная аппроксимация и локальные приближения. *Доклады АН СССР*, **201**, 1971, 16—19.
3. В. Попов, Г. Фройд. Некоторые вопросы, связанные с аппроксимацией сплайн-функциями и полиномами. *Stud. Sci. Math. Hung.*, **5**, 1970, 161—171.
4. В. Попов, Бл. Сендов. О классах, характеризуемых наилучшими приближениями сплайн-функциями. *Мат. заметки*, **8**, 1970, 131—148.
5. В. Попов. Прави и обратни теореми в теория на апроксимациите. Дисертация, София, 1977.
6. М. Красносельский, Я. Рутицкий. Выпуклые функции и пространства Орлича. Москва, 1958.
7. Г. Тотков. Сплайн-приближения в някои функционални пространства. Дисертация. София, 1978.
8. Г. Тотков. Об аппроксимации сплан-функциями в пространствах Орлича (в печати).
9. G. Butler, F. Richards. An L_p-saturation theorem for splines. *Canad. J. Math.* **24**, 1972, 957—966.
10. R. Devore, K. Sherer. A constructure theory for approximation by splines with an arbitrary sequence of knot seas. (to appear).
11. R. Maleev, S. Troyanski. On the modulus of convexity and smoothness in Orlich space. *Studia Math.*, **54**, 1975, 131—141.
12. V. Popov. Direct and converse theorems for spline-approximation with free knots. *C. r. Acad. bulg. Sci.*, **26**, 1973, 1297—1299.
13. V. Popov. Direct and converse theorems for spline-approximation with free knots. *Serdica*, 1, 1975, 218—224.

Единый центр математики и механики
1090 п. я. 373

Поступила 27. 2. 1979