Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ В ХАУСДОРФОВОЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКЕ

ПЕНЧО П. ПЕТРУШЕВ

Доказано, что для любой функции f с ограниченной на отрезке $[0, 1]$ вариацией имеют место оценки $R_n(f)_r = o(1/n)$ и $R_n(f)_L = o(1/n)$, где $R_n(f)_r$ и $R_n(f)_L$ — наилучшие приближения функции f на $[0, 1]$ рациональными функциями n-того порядка относительно соответственно хаусдорфовой и интегральной метрики. Эти оценки неулучшаемы в классе функций с ограниченной вариацией.

Определим хаусдорфовое расстояние. Для этого обозначим через F_Δ множество всех замкнутых и ограниченных точечных множеств на плоскости, которые выпуклы относительно оси y и проекция которых на оси x совпадает с интервалом $\Delta=[a, b]$. Хаусдорфовое расстояние между множествами $F, G \in F_\Delta$ определяется через

$$r(F, G)=r(\Delta; F, G)=\max\{\max_{A\in F}\min_{B\in G} d(A, B), \max_{A\in G}\min_{B\in F} d(A, B)\},$$

где $d(A, B)=d(A(a_1, a_2), B(b_1, b_2))=\max\{|a_1-b_1|, |a_2-b_2|\}$. Если обозначим через F^ε и G^ε ε-окрестности соответственно множеств F и G относительно расстояния d, то очевидно $r(\Delta; F, G)=\inf\{\varepsilon : F\subset G^\varepsilon, G\subset F^\varepsilon\}$. Дополненный график $\bar f$ ограниченной на отрезке Δ функции f определяется через $\bar f=\cap\{F : F\in F_\Delta$ и $(x, f(x))\in F$ при $x\in\Delta\}$. Очевидно, если f — ограниченная на отрезке Δ функция, то $\bar f\in F_\Delta$. Тогда хаусдорфовое расстояние между двумя ограниченными на отрезке Δ функциями f, g определяется как хаусдорфовое расстояние между их дополненными графиками, т. е. $r(\Delta; f, g)=r(\Delta; \bar f, \bar g)$. Отметим, что для любых ограниченных на Δ функции f, g справедливы неравенства [1]

$$r(\Delta; f, g)\leqq\|f-g\|_\Delta\leqq r(\Delta; f, g)+\omega(f; r(\Delta; f, g)),$$

где $\|f-g\|_\Delta=\sup\{|f(x)-g(x)| : x\in\Delta\}$, $\omega(f; \delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')| : |x'-x''|\leqq\delta, x', x''\in\Delta\}$. Свойства и особенности хаусдорфового расстояния обсуждаются в [1].

Обозначим через H_n множество всех алгебраических полиномов n-той степени с действительными коэффицентами, а через R_n — множество всех действительных рациональных функций n-того порядка, т. е. $R_n=\{q : q=p_1/p_2, p_1, p_2\in H_n\}$. Далее, через $E_n(f)_\Omega=E_n(f; \Delta)_\Omega$ и $R_n(f)_\Omega=R_n(f; \Delta)_\Omega$, $\Omega=r, C, L_p$ будем обозначать наилучшие приближения функции f элементами соответственно H_n и R_n относительно хаусдорфовой, равномерной и L_p метрики. Например, $R_n(f)_r = \inf\{r(f, q) : q \in R_n\}$.

В [2; 3] мы рассматривали вопрос о рациональной аппроксимации функций с неограниченной вариацией в хаусдорфовой метрике. Для класса функций с ограниченной вариацией В. А. Попов [4] доказал следующую оценку:

(1) $$\sup\{R_n(f)_r : V_0^1 f \leqq 1\} = o(n^{-1}),$$

где $V_0^1 f$ — вариация функции f на $[0, 1]$, и эта оценка очевидно точна по порядку. Отметим, что Бл. Сендов [5; 1] доказал, что для любого множества $f \in F_\Delta$ имеет место $E_n(f)_r = O(\ln n/n)$, и эта оценка точна по порядку даже в классе всех абсолютно непрерывных на $[0, 1]$ функций [6].

В этой статье рассматриваем наилучшие рациональные приближения „индивидуальной" функции с ограниченной вариацией. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любой функции f, для которой $V_0^1 f < \infty$, имеет место*

(2) $$R_n(f)_r = o(n^{-1}),$$

т. е. для любой функции f, для которой $V_0^1 f < \infty$, существует последовательность $\{\varepsilon_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n(f) \searrow 0$ при $n \to \infty$ такая, что $R_n(f)_r \leqq \varepsilon_n n^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

Так как оценка (1) точна по порядку, то оценка (2) точна по порядку в классе всех функций с ограниченной вариацией, т. е. для любой последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n \searrow 0$ при $n \to \infty$ существует функция g, для которой $V_0^1 g < \infty$ такая, что

$$\limsup_{n \to \infty} n R_n(g)_r / \varepsilon_n > 0.$$

В [7] найдено следующее соотношение между хаусдорфовой и интегральной метриками: если функции f, g монотонны на отрезке $[a, b]$, $f(a) = g(a) = A$ и $f(b) = g(b) = B$, то

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leqq (b - a + |B - A|) r(f, g).$$

Из последнего и теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. *Если функция f эквивалентна некоторой функции с ограниченной на $[0, 1]$ вариацией, то $R_n(f)_{L_1} = o(n^{-1})$, и эта оценка очевидно точна по порядку в классе всех функций с ограниченной на $[0, 1]$ вариацией.*

Отметим, что $O(n^{-1})$ — точный порядок $E_n(f)_{L_1}$ в классе функций с ограниченной на отрезке $[0, 1]$ вариацией.

В. А. Попов [4] доказал, что если $f \in \mathrm{Lip}\,1$, то $R_n(f)_C = o(n^{-1})$ (гипотеза Д. Нюмана) и высказал гипотезу, что если функция f липшицова в метрике $L_p (1 \leqq p \leqq \infty)$, то $R_n(f)_{L_p} = o(n^{-1})$. Теорема 2 подтверждает справедливость этой гипотезы для $p = 1$.

Метод доказательства теоремы 1 базируется на идее В. А. Попова из [4; 8] (см. также [9]). Результаты анонсированы в [10].

1. Введем обозначения: $S(k, [a, b])$ — множество полигонов с $k+1$ узлами на отрезке $[a, b]$, т. е. $s \in S(k, [a, b])$, если s непрерывна на $[a, b]$ и сущест-

вуют точки $\{x_i\}_{i=0}^k$, $a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$ такие, что s линейна на $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, k$; $R_N=R_{[N]}$, где $[N]$ — целая часть числа $N\geqq 0$; $\Phi(k, \delta, M; N, B)=\sup\{\inf\{r([0, \delta]; s, q): q\in R_N, \|q\|_{(-\infty, \infty)}\leqq B\}: s\in S(k, [0, \delta]), V_0^\delta s\leqq M, s(0)=0\}$, $\|f\|_A=\sup\{|f(x)|: x\in A\}$.
В дальнейшем, не уговаривая это, будем пользоваться фактом, что функция $\Phi(k, \delta, M; N, B)$ монотонна по каждому из своих аргументов.

Лемма 1. *Если* $t>0$, *то*

$$\sup_{\delta>0,\, M\geqq 0} \Phi(1, \delta, M; 2, t^{1/2}M^{3/2})\leqq t^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $s(x)=Dx/\delta$, $|D|\leqq M$, $M>0$ (случай $M=0$ очевиден). Тогда для рациональной функции $q=s/(1+\varepsilon s^2)$, $\varepsilon=M^{-3}t^{-1}$ имеем $q\in R_2$, $r([0, \delta]; s, q)\leqq\|s-q\|_{[0, \delta]}\leqq\varepsilon\|s\|^3_{[0, \delta]}\leqq t^{-1}$, $\|q\|_{(-\infty, \infty)}\leqq 1/2\sqrt{\varepsilon}\leqq t^{1/2}M^{3/2}$, учитывая неравенство $2ab\leqq a^2+b^2$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если k — натуральное число M, A, N, $B\geqq 0$ и $[a, b]$ — конечный отрезок, то*

$$\sup\{\inf f\{r([a, b]; s, q): q\in R_N, \|q\|_{(-\infty, \infty)}\leqq A+B\}: s\in S(k, [a, b]),$$

$$V_a^b s\leqq M, |s(a)|\leqq A\}\leqq\Phi(k, b-a, M; N, B).$$

Доказательство. Пусть $s\in S(k, [a, b])$, $V_a^b s\leqq M$ и $|s(a)|\leqq A$. Тогда для функции $s_1(x)=s(x+a)-s(a)$ имеем $s_1\in S(k, [0, b-a])$, $V_0^{b-a}s_1\leqq M$, $s_1(0)=0$ и, следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует рациональная функция $q\in R_N$ такая, что $\|q\|_{(-\infty, \infty)}\leqq B$ и

$$\Phi(k, b-a, M; N, B)+\varepsilon\geqq r([0, b-a]; s_1, q)=r([a, b]; s, q_1),$$

где $q_1(x)=q(a+x)+s(a)$, $q_1\in R_N$, $\|q_1\|_{(-\infty, \infty)}\leqq|s(a)|+\|q\|_{(-\infty, \infty)}\leqq A+B$.
Так как функция s и число ε выбраны произволно так, чтобы $s\in S(k, [a, b])$, $V_a^b s\leqq M$, $|s(a)|\leqq A$ и $\varepsilon>0$, то лемма доказана.

Лемма 3. *Существует константа $d>0$ такая, что для любых положительных чисел α, β и γ, $\alpha\leqq\beta$ существует рациональная функция σ порядка не выше $d\ln(e+1/\gamma)\ln(e+\beta/\alpha)$ такая, что $|\sigma(x)|\leqq\gamma^{3/2}$ при $x\in[-\beta, -\alpha]$, $|1-\sigma(x)|\leqq\gamma^{3/2}$ при $x\in[\alpha, \beta]$ и $0\leqq\sigma(x)\leqq 1$ при $x\in(-\infty, \infty)$.*

Справедливость леммы 3 следует непосредственно из результатов А. А. Гончара [11], полученных на основе работе Д. Нюмана [12] (см. также [2, лемму 3]).

Лемма 4. *Если* x_1, x_2, y_1, $y_2\geqq 0$, *то*

$$\ln(e+x_1)\ln(e+y_1)+\ln(e+x_2)\ln(e+y_2)\leqq 2\ln(e+(x_1+x_2)/2)\ln(e+(y_1+y_2)/2),$$

т. е. функция $F(x, y)=-\ln(e+x)\ln(e+y)$ выпукла на множестве $D=\{(x' y): x\geqq 0, y\geqq 0\}$.

Доказательство. Лемма справедлива, так как функции $\partial^2F/\partial x^2$, $\partial^2F/\partial y^2$ и $(\partial^2F/\partial x^2)(\partial^2F/\partial y^2)-(\partial^2F/\partial x\partial y)^2$ неотрицательны на множестве D (см. [13, стр. 94]).

Обозначим

$$N(m, \delta, M, t)=\sum_{i=0}^m 2^i\{d\ln(e+t\delta\,.\,2^{m-2i})\ln(e+tM2^{m-2i})+4\},$$

где d — константа из леммы 3.

Лемма 5. *Пусть m — целое неотрицательное число и $t>0$. Тогда, если*

$$\sup_{\delta>0,\ M\geqq 0} \Phi(2^m, \delta, M;\ N(m, \delta, M, t),\ t^{1/2}M^{3/2}) \leqq \varphi(m)\, t^{-1}, \tag{3}$$

где $\varphi(m)\geqq 1$, то

$$\sup_{\delta>0,\ M\geqq 0} \Phi(2^{m+1}, \delta, M;\ N(m+1, \delta, M, t),\ t^{1/2}M^{3/2}) \leqq \varphi(m)\,(1+4\,.\,2^{-m-1})\, t^{-1}.$$

Доказательство. Пусть для некоторых m и t справедливо неравенство (3). Пусть $s\in S(2^{m+1}, [0, \delta])$, $V_0^\delta s \leqq M$, $s(0)=0$, $\delta>0$, $M\geqq 0$. Если $M\leqq t^{-1}$, то утверждение леммы очевидно выполнено.

Рассмотрим случай, когда $M>t^{-1}$. Пусть z_1 тот узел полигона s, что на отрезках $[0, z_1]$ и $[z_1, \delta]$ s имеет одинаковое число узлов. Положим $z_0=0$, $z_2=\delta$, $\delta_1=z_1-z_0$, $\delta_2=z_2-z_1$, $M_1=V_{z_0}^{z_1}s$, $M_2=V_{z_1}^{z_2}s$. Имеем $\delta_1+\delta_2=\delta$, $M_1+M_2\leqq M$.

Из (3) и леммы 2 следует, что для любого $\eta>0$ существуют рациональные функции q_1, q_2 порядка не выше соответственно $N(m, \delta_1, M_1, t)$ и $N(m, \delta_2, M_2, t)$ такие, что

$$\begin{cases} r([z_{i-1}, z_i];\ s, q_i) \leqq \varphi(m)\,.\,t^{-1}+\eta, \\ \| q_1 \|_{(-\infty,\ \infty)} \leqq t^{1/2} M_1^{3/2} \leqq t^{1/2}\,.\,M^{3/2}, \\ \| q_2 \|_{(-\infty,\ \infty)} \leqq M_1 + t^{1/2} M_2^{3/2} \leqq (tM)^{1/2} M_1 + (tM)^{1/2} M_2 \leqq t^{1/2} M^{3/2}. \end{cases} \tag{4}$$

Далее через $h(\Delta_1, f;\ \Delta_2, g)$ будем обозначать одностороннее хаусдорфово „расстояние" от функции $f\in C_{\Delta_1}$, $\Delta_1=[a, b]$ до функции $g\in C_{\Delta_2}$, $\Delta_2=[c, d]$, т. е.

$$h(\Delta_1, f;\ \Delta_2, g) = \sup_{x\in\Delta_1}\ \inf_{\xi\in\Delta_2}\ \max\{|x-\xi|,\ |f(x)-g(\xi)|\}.$$

Если обозначим через g^ε ε-окрестность графика $\bar g$ функции g, то очевидно $h(\Delta_1, f;\ \Delta_2, g)=\inf\{\varepsilon: \bar f\subset g^\varepsilon\}$. Отметим некоторые свойства одностороннего хаусдорфова „расстояния":

$$h(\Delta_1, f_1;\ \Delta_2, f_2) \leqq h(\Delta_1, f_1;\ \Delta_3, f_3) + h(\Delta_3, f_3;\ \Delta_2, f_2);$$

$$r(\Delta;\ f, g) = \max\{h(\Delta, f;\ \Delta, g),\ h(\Delta, g;\ \Delta, f)\} \leqq \|f-g\|_\Delta;$$

если $\alpha\in C_{\Delta_1}$, $\{\alpha(x): x\in\Delta_1\}=\Delta_2$ и $f\in C_{\Delta_2}$, то $h(\Delta_1, f(\alpha);\ \Delta_2, f) \leqq \max_{x\in\Delta_1}|\alpha(x)-x|$ и $h(\Delta_2, f;\ \Delta_1, f(\alpha)) \leqq \max_{x\in\Delta_1}|\alpha(x)-x|$.

Положим $\varepsilon=t^{-1}\,.\,2^{-m-1}$. Рассмотрим сначала случай, когда имеет место хотя бы одно из неравенств $\delta_1\leqq\varepsilon$, $\delta_2\leqq\varepsilon$. Пусть $\delta_1\leqq\varepsilon$. Обозначим через α линейную трансформацию, которая отображает отрезок $\Delta=[z_0, z_2]$ на отрезке $[z_1, z_2]$. Так как $\delta_1\leqq\varepsilon$, то

$$|\alpha(x)-x| \leqq \varepsilon \text{ при } x\in\Delta. \tag{5}$$

Рассмотрим рациональную функцию $q=q_2(\alpha)+u$, где $u\in R_4$ такая, что

$$\|u\|_{(-\infty,\ z_0]\cup[z_1,\ \infty)} \leqq \min\{M_1(tM)^{1/2}-M_1,\ \varepsilon\},$$

$$\max_{x\in[z_0,\ z_1]} q(x) = \max\{\max_{x\in[z_0,\ z_1]} s(x),\ \max_{x\in[z_0,\ z_1]} q_2(\alpha(x))\},$$

$$\min_{x\in[z_0,\ z_1]} q(x) = \min\{\min_{x\in[z_0,\ z_1]} s(x),\ \min_{x\in[z_0,\ z_1]} q_2(\alpha(x))\}.$$

Так как $M>t^{-1}$ и $R_2(\delta, (-\infty, \infty))_r=0$, $\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, то рациональная функция u с вышеуказанными свойствами существует. Ясно, что рациональная функция q имеет порядок не выше $N(m, \delta_2, M_2, t)+4\leqq N(m+1, \delta, M, t)$. Учитывая (4), имеем

$$\|q\|_{(-\infty, \infty)}\leqq \max\{\|q_2\|_{(-\infty, \infty)}+\|u\|_{(-\infty, z_0]\cup[z_1, \infty)}, \|s\|_{[z_0, z_2)}\}$$
$$\leqq \max\{M_1(tM)^{1/2}+M_2(tM)^{1/2}, M\}\leqq t^{1/2}\,.\,M^{3/2}.$$

Осталось оценить $r([z_0, z_2]; q, s)$. Используя (4), (5) и определение рациональной функции q, получаем

$$h([z_1, z_2], q; [z_0, z_2], s)$$
$$\leqq h([z_1, z_2], q; [z_1, z_2], q_2(\alpha))+h([z_0, z_2], q_2(\alpha); [z_1, z_2], q_2)+h([z_1, z_2], q_2; [z_1, z_2], s)$$
$$\leqq \|q-q_2(\alpha)\|_{[z_1, z_2]}+\|\alpha(x)-x\|_{[z_0, z_2]}+r([z_1, z_2]; q_2, s)$$
$$\leqq 2\varepsilon+\varphi(m)\,t^{-1}+\eta\leqq \varphi(m)\,t^{-1}(1+2\,.\,2^{-m-1})+\eta,$$
$$h([z_0, z_1], q; [z_0, z_2], s)\leqq \varepsilon+h([z_0, z_1], q_2(\alpha); [z_0, z_2], s)$$
$$\leqq \varepsilon+h([z_0, z_1], q_2(\alpha); [z_1, z_2], q_2)+h([z_1, z_2], q_2; [z_1, z_2], s)$$
$$\leqq \varepsilon+\|\alpha(x)-x\|_{[z_0, z_2]}+\varphi(m)\,t^{-1}+\eta\leqq \varphi(m)\,t^{-1}(1+2\,.\,2^{-m-1})+\eta$$

и, следовательно,

$$h([z_0, z_2], q; [z_0, z_2], s)\leqq \varphi(m)\,t^{-1}(1+2\,.\,2^{-m-1})+\eta. \tag{6}$$

Аналогично получаем

$$h([z_1, z_2], s; [z_0, z_2], q)$$
$$\leqq h([z_1, z_2], s; [z_1, z_2], q_2)+h([z_1, z_2], q_2; [z_0, z_2], q_2(\alpha))+h([z_0, z_2], q_2(\alpha); [z_0, z_2], q)$$
$$\leqq \varphi(m)\,t^{-1}+\eta+\varepsilon+h([z_0, z_1], q_2(\alpha); [z_0, z_2], q)+h([z_1, z_2], q_2(\alpha); [z_0, z_2], q)$$
$$\leqq \varphi(m)\,t^{-1}+\eta+2\varepsilon+\|u\|_{[z_1, z_2]}\leqq \varphi(m)\,t^{-1}(1+3\,.\,2^{-m-1})+\eta,$$
$$h([z_0, z_1], s; [z_0, z_2], q)\leqq \varepsilon=t^{-1}\,.\,2^{-m-1}$$

и, следовательно,

$$h([z_0, z_2], q; [z_0, z_2], s)\leqq \varphi(m)\,t^{-1}(1+3\,.\,2^{-m-1})+\eta. \tag{7}$$

Из (6), (7) получаем

$$r([z_0, z_2]; q, s)\leqq \varphi(m)\,t^{-1}(1+3\,.\,2^{-m-1})+\eta.$$

Случай, когда $\delta_2\leqq\varepsilon$, рассматривается аналогично.

Пусть $\delta_1>\varepsilon$ и $\delta_2>\varepsilon$. Пусть α_1, α_2 — линейные трансформации, отображающие отрезки $\Delta_1=[z_0, z_1+\varepsilon]$, $\Delta_2=[z_1-\varepsilon, z_2]$ соответственно на $[z_0, z_1]$, $[z_1, z_2]$. Очевидно имеем

$$|\alpha_i(x)-x|\leqq\varepsilon \quad \text{при} \quad x\in\Delta_i,\ i=1, 2. \tag{8}$$

Рассмотрим рациональную функцию $w=q+u$, где $q(x)=q_1(\alpha_1(x))+\sigma(x-z_1)(q_2(\alpha_2(x))-q_1(\alpha_1(x)))$, σ — рациональная функция из леммы 3, примененная с $\beta=\delta$, $\alpha=\varepsilon=t^{-1}2^{-m-1}$ и $\gamma=t^{-1}M^{-1}2^{-m-1}$, а рациональная функция $u\in R_4$ выбрана так, чтобы

$$\| u \|_{(-\infty,\, z_1-\varepsilon]\cup[z_1+\varepsilon,\, \infty)} \leqq \min\{t^{1/2}M^{3/2}-t^{1/2}M_1^{3/2},\ t^{1/2}M^{3/2}-M_1-t^{1/2}M_2^{3/2},\ \varepsilon\},$$

$$\max_{x\in[z_1-\varepsilon,\, z_1+\varepsilon]} w(x)=\max\{\max_{x\in[z_1-\varepsilon,\, z_1+\varepsilon]} q_1(\alpha_1(x)),\ \max_{x\in[z_1-\varepsilon,\, z_1+\varepsilon]} q_2(\alpha_2(x))\},$$

$$\min_{x\in[z_1-\varepsilon,\, z_1+\varepsilon]} w(x)=\min\{\min_{x\in[z_1-\varepsilon,\, z_1+\varepsilon]} q_1(\alpha_1(x)),\ \min_{x\in[z_1-\varepsilon,\, z_1+\varepsilon]} q_2(\alpha_2(x))\}.$$

Учитывая, что $M>t^{-1}$ и $R_2(\delta, (-\infty, \infty))_r=0$, ясно, что существует рациональная функция u с вышеуказанными свойствами. Очевидно рациональная функция w имеет порядок не выше

$$N(m, \delta_1, M_1, t)+N(m, \delta_2, M_2, t)+d\ln(e+t\delta 2^{m+1})\ln(e+tM2^{m+1})+4$$

$$=\sum_{i=0}^{m} 2^i\{d\ln(e+t\delta_1, 2^{m-2i})\ln(e+tM_1 2^{m-2i})+d\ln(e+t\delta_2 2^{m-2i})\ln(e+tM_2 2^{m-2i})$$

$$+2.4\}+d\ln(e+t\delta 2^{m+1})\ln(e+tM2^{m+1})+4\leqq\sum_{i=0}^{m} 2^i\{2d\ln(e+t\left(\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)2^{m-2i}$$

$$\times\ln(e+t\left(\frac{M_1+M^2}{2}\right)2^{m-2i})+2.4\}+d\ln(e+t\delta 2^{m+1})\ln(e+tM2^{m+1})+4$$

$$\leqq\sum_{j=0}^{m+1} 2^j\{d\ln(e+t\delta 2^{m+1-2j})\ln(e+tM\,.\,2^{m+1-2j})+4\}=N(m+1, \delta, M, t).$$

В последних оценках использовали неравенство из леммы 4.

Из (4) и определения функции w следует, что

$$\| w \|_{(-\infty,\infty)}\leqq\max\{\| q \|_{(-\infty,\infty)}+\| u \|_{(-\infty,\, z_1-\varepsilon]\cup[z_1+\varepsilon,\, \infty)},\ \| q_1 \|_{(-\infty,\infty)},\ \| q_2 \|_{(-\infty,\infty)}\}$$

$$\leqq\max\{\sup_{x\in(-\infty,\infty)}\{\| q_1 \|_{(-\infty,\infty)}(1-\sigma(x-z_1))+\| q_2 \|_{(-\infty,\infty)}\sigma(x-z_1)\}$$

$$+\| u \|_{(-\infty, z_1-\varepsilon]\cup[z_1+\varepsilon,\infty)},\ t^{1/2}M^{3/2}\}\leqq\max\{\max\{t^{1/2}M_1^{3/2},\ M_1+t^{1/2}M_2^{3/2}\}$$

$$+\min\{t^{1/2}M^{3/2}-t^{1/2}M_1^{3/2},\ t^{1/2}M^{3/2}-M_1-t^{1/2}M_2^{3/2}\},\ t^{1/2}M^{3/2}\}\leqq t^{1/2}M^{3/2}.$$

Осталось оценить $r(\Delta;\ w, s)$. Имея в виду (4), (8), лемму 3 и определения функции w, получаем

$$h([z_0, z_1-\varepsilon], w;\ \Delta, s)$$

$$\leqq h([z_0, z_1-\varepsilon], w;\ [z_0, z_1-\varepsilon],\ q_1(\alpha_1))+h([z_0, z_1-\varepsilon], q_1(\alpha_1);\ [z_0, z_1], q)$$

$$+h([z_0, z_1], q;\ [z_0, z_1], s)\leqq\| w-q_1(\alpha_1)\|_{[z_0,\, z_1-\varepsilon]}+\| \alpha_1(x)-x \|_{\Delta_1}+\varphi(m)t^{-2}+\eta$$

$$\leqq\| \sigma \|_{[-\delta,\, -\varepsilon]}(\| q_1 \|_{(-\infty,\infty)}+\| q_2 \|_{(-\infty,\infty)})+\| u \|_{[z_0,\, z_1-\varepsilon]}+\varepsilon+\varphi(m)t^{-1}+\eta$$

$$\leqq(tM2^{m+1})^{-3/2}\,.\,2t^{1/2}M^{3/2}+2\varepsilon+\varphi(m)t^{-1}+\eta\leqq\varphi(m)t^{-1}(1+4\,.\,2^{-m-1})+\eta,$$

аналогично

$$h([z_1+\varepsilon, z_2], w;\ \Delta, s)\leqq\varphi(m)t^{-1}(1+4\,.\,2^{-m-1})+\eta,\ h([z_1-\varepsilon, z_1+\varepsilon], w;\ \Delta, s)$$

$$\leqq 2\varepsilon+\max\{h([z_1-\varepsilon, z_1+\varepsilon], q_1(\alpha_1);\ \Delta, s),\ h([z_1-\varepsilon, z_1+\varepsilon], q_2(\alpha_2);\ \Delta, s)\}$$

$$\leqq 2\varepsilon+\max\{h(\Delta_1, q_1(\alpha_1), [z_0, z_1], q_1)+h([z_0, z_1], q_1;\ [z_0, z_1], s),$$

$$h(\Delta_2, q_2(\alpha_2);\ [z_1, z_2], q_2)+h([z_1, z_2], q_2, [z_1, z_2], s)\}$$

$$\leqq 3\varepsilon+\varphi(m)t^{-1}+\eta\leqq\varphi(m)t^{-1}(1+3\,.\,2^{-m-1})+\eta$$

и, следовательно,

(9) $$h(\Delta, w;\ \Delta, s) \leqq \varphi(m)\, t^{-1}(1+4\,.\,2^{-m-1})+\eta.$$

Оценим $h(\Delta, s;\ \Delta, w)$. Имеем

$$h([z_0, z_1], s;\ \Delta, w)$$

$$\leqq h([z_0, z_1], s;\ [z_0, z_1], q_1)+h([z_0, z_1], q_1;\ \Delta_1, q_1(\alpha_1))+h(\Delta_1, q_1(\alpha_1);\ \Delta, w)$$

$$\leqq \varphi(m)\, t^{-1}+\eta+\varepsilon+\max\{h([z_0, z_1-\varepsilon],\ q_1(\alpha_1);\ [z_0, z_1-\varepsilon], w),$$

$$h([z_1-\varepsilon, z_1+\varepsilon], q_1(\alpha_1), \Delta, w)\} \leqq \varphi(m)\, t^{-1}+\eta+\varepsilon+$$

$$+\max\{\|w-q_1(\alpha_1)\|_{[z_0, z_1-\varepsilon]}, 2\varepsilon\} \leqq \varphi(m)\, t^{-1}+\eta+4\varepsilon \leqq \varphi(m)\, t^{-1}(1+4\,.\,2^{-m-1})+\eta.$$

Аналогично получаем

$$h([z_1, z_2], s;\ \Delta, w) \leqq \varphi(m)\, t^{-1}(1+4\,.\,2^{-m-1})+\eta.$$

Следовательно,

(10) $$h(\Delta, s;\ \Delta, w) \leqq \varphi(m) t^{-1}(1+4\,.\,2^{-m-1})+\eta.$$

Из (9), (10) следует, что

$$r(\Delta;\ w, s) \leqq \varphi(m)\, t^{-1}(1+4\,.\,2^{-m-1})+\eta.$$

Так как числа $\delta>0$, $M\geqq 0$, $\eta>0$ выбраны произвольно, а s — произвольная функция из класса $S(2^{m+1}, [0, \delta])$ такая, что $V_0^\delta s \leqq M$, $s(0)=0$, то лемма 5 доказана.

2. Доказательство теоремы 1. Из леммы 1 следует, что для любого $t>0$ имеет место неравенство

$$\sup_{\delta>0,\ M\geqq 0} \Phi(2^0, \delta, M;\ N(0, \delta, M, t), t^{1/2}M^{3/2}) \leqq t^{-1}.$$

Применяя лемму 5 ν раз (ν — произвольное натуральное число), начиная с последнего неравенства, получаем

(11) $$\sup_{\delta>0,\ M\geqq 0} \Phi(2^\nu, \delta, M;\ N(\nu, \delta, M, t), t^{1/2}M^{3/2}) \leqq t^{-1}\prod_{i=1}^{\nu}(1+4\,.\,2^{-i}) \leqq C_1\, t^{-1},\ C_1=e^4.$$

Пусть функция f такая, что $V_0^1 f \leqq M$, $0<M<\infty$. Оценим $R_n(f)_r$. Ввиду того, что для функции $g(x)=M^{-1}f(x)$ имеем $V_0^1 g \leqq 1$ и $R_n(f)_r \leqq (1+M^{-1})R_n(g)_r$, $n=1, 2, 3, \ldots$, то не ограничивая общность, будем считать, что $V_0^1 f \leqq 1$.

Из [7, теорема 1] следует, что для любой функции ψ, $V_0^1\psi \leqq 1$ существуют последовательность полигонов $\{\bar{s}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\bar{s}_n \in S(n, [0, 1])$ и последовательность чисел $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\eta_n \searrow 0$ при $n\to\infty$ такие, что $V_0^1 \bar{s}_n \leqq 2$ и $r([0, 1]; \psi, \bar{s}_n) \leqq \eta_n/n$, $n=1, 2, 3, \ldots$. Из последнего утверждения следует, что существуют последовательность натуральных чисел $\{k(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $k(n)\nearrow\infty$ при $n\to\infty$, $k(n)=o(n)$, последовательность полигонов $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n \in S(k(n), [0, 1])$ и последовательность чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n \searrow 0$ при $n\to\infty$ такие, что $V_0^1 s_n \leqq 2$ и $r([0, 1];\ f, s_n) \leqq \varepsilon_n/n$, $n=1, 2, 3, \ldots$

Пусть $t=t(n)=n^2/k(n)$, а $\nu=\nu(n)$ — натуральное число, такое, что $2^{\nu-1}\leqq k(n)\leqq 2^\nu$. Для функций $s_n^*(x)=s_n(x)-s_n(0)$ имеем $s_n^*\in S(k(n),[0,1]$, $V_0^1 s_n^*=V_0^1 s_n\leqq 2$, $s_n^*(0)=0$ и $R_m(s_n^*)_r=R_m(s_n)_r$, $m=0,1,2,\ldots;\ n=1,2,3,\ldots$ Тогда из (11) следует, что

$$R_N(s_n)_r\leqq C_1 t^{-1}(n)=C_1k(n)/n^2,\quad n=1,2,3,\ldots,$$

где $N=N(\nu(n),1,2,n^2/k(n))$ и, следовательно,

$$R_N(f)_r\leqq r([0,1];f,s_n)+R_N(s_n)_r\leqq\varepsilon_n/n+C_1k(n)\,n^{-1}/n=o(n^{-1}).$$

Осталось доказать, что для достаточно больших n имеет место неравенство $N(\nu(n),1,2,n^2/k(n))\leqq n$. Учитывая, что функции $2^x(\nu(n)+1+2/\ln 2-x)$ и $2^x(\nu(n)+1+2/\ln 2-x)^2$ монотонно возрастают на отрезке $[0,\nu(n)+1]$, для достаточно больших n получаем

$$N(\nu(n),1,2,n^2/k(n))=\sum_{i=0}^{\nu(n)}2^i\{d\ln(e+n^2 2^{\nu(n)-2i}/k(n))\ln(e+2\,.\,n^2\,.\,2^{\nu(n)-2i}/k(n))+4\}$$

$$\leqq d\sum_{i=0}^{\nu(n)}2^i\ln^2(3\,.\,n^2\,.\,2^{\nu(n)-2i}/k(n))+8\,.\,2^{\nu(n)}\leqq d\sum_{i+0}^{\nu(n)}2^i\ln^2((n/k(n))^2 4^{\nu(n)+1+2/\ln 2-i})+8.2^{\nu(n)}$$

$$\leqq d\sum_{i=0}^{\nu(n)}2^i\{4\ln^2(n/k(n))+4\ln(n/k(n)(\ln 4)(\nu(n)+1+2/\ln 2-i)$$

$$+(\ln^2 4)(\nu(n)+1+2/\ln 2-i)^2\}+8\,.\,2^{\nu(n)}\leqq 8d2^{\nu(n)}\ln^2(n/k(n))$$

$$+4(\ln 4)d\ln(n/k(n))\int_0^{\nu(n)+1}2^x(\nu(n)+1+2/\ln 2-x)\,dx$$

$$+(\ln^2 4)\,.\,d\int_0^{\nu(n)+1}2^x(\nu(n)+1+2/\ln 2-x)^2dx+8\,.\,2^{\nu(n)}\leqq 8d2^{\nu(n)}\ln^2(n/k(n))$$

$$+4(\ln 4)d\ln(n/k(n))\,2^{\nu(n)+5}+\ln^2 4\,.\,d2^{\nu(n)+8}+82^{\nu(n)}\leqq 2^{12}\,d\ln^2(n/k(n))\,.\,2^{\nu(n)-1}$$

$$\leqq 2^{12}\,d\ln^2(n/k(n))\,.\,k(n)=2^{12}\,dn\ln^2(n/k(n))\,(n/k(n))^{-1}.$$

Так как $k(n)=o(n)$, то из последнего следует, что для достаточно больших n имеет место неравенство $N(\nu(n),1,2,n^2/k(n))\leqq n$. Тем самым теорема I доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в Хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 5, 141—178.
2. П. П. Петрушев, Наилучшие рациональные приближения в хаусдорфовой метрике. *Сердика*, **6**, 1980, 29—41.
3. П. П. Петрушев. Оценки снизу для наилучщих рациональных приближений в хаусдорфовой метрике. *Сердика*, **6**, 1980, 120—127.
4. V. A. Popov. Uniform rational approximation of the class V_r and its applications. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **29**, 1977, 119—129.
5. Бл. Сендов. Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфовски тип. *Годишник Соф. унив., Физ.-мат. фак.*, **55**, 1962, 1—39.

6. Т. П. Боянов. О порядке наилучшего приближения алгебраическими многочленами относительно расстояния хаусдорфовского типа. *Доклады БАН*, **23**, 1970, 635—638.
7. Бл. Сендов, В. А. Попов. Об аппроксимации сплайн-функциями. *Доклады БАН*, **23**, 1970, 756—758.
8. В. А. Попов, П. П. Петрушев Точный порядок наилучшего равномерного приближения выпуклых функций рациональными функциями. *Матем. сборник*, **103**, 1977, 285—292.
9. П. П. Петрушев. Равномерные рациональные аппроксимации функций класса V_r. *Доклады БАН*, **31**, 1978.
10. П. П. Петрушев. Рациональные приближения в хаусдорфовой метрике. *Доклады БАН*, **31**, 1977, 155—158, 155—158.
11. А. А. Гончар. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями. *Матем. сборник*, **73**, 1976, 630—638.
12. D. Newman. Rational approximation to $|x|$. *Michigan Math*. J., 11, 1964, 11—14.
13. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства. Москва, 1948.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 20. 11. 1978.