Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

БОРНОЛОГИЯ ПОЛИНОРМИРОВАННЫХ АЛГЕБР

КАЛИН П. ПЕТРОВ

Изучается борнология полинормированных пространств и локально m-выпуклых алгебр. Выделяется класс абсолютно борнологических пространств и алгебр. Указывается, что алгебры голоморфных функций на комплексном многообразии (и соотв. — почти голоморфных функций на почти комплексном многообразии) являются абсолютно борнологическими.

1. Локально мультипликативно-выпуклые алгебры. Напомним, что подмножество U алгебры A называется мультипликативно-выпуклым или короче — m-выпуклым, если оно выпукло и, кроме того, множество $UU = \{xy : x \in U,\ y \in U\}$ является подмножеством U, т. е. $UU \subset U$.

Топологическая алгебра называется локально мультипликативно выпуклой, или короче локально m-выпуклой, если m-выпуклые окрестности нуля образуют базис в нуле [5].

Бочкой в локально m-выпуклой алгебре будем называть любое замкнутое, поглощающее, уравновешенное и m-выпуклое подмножество.

Предложение 1.1. *Бочки в локально m-выпуклой алгебре A образуют базис в нуле.*

Доказательство. Рассматривая A как локально выпуклое векторное пространство, можно утверждать, что бочки в смысле локально выпуклых пространств [1; 2] образуют базис в нуле. Если T — любая такая бочка, в нее можно вписать m-выпуклую уравновешенную окрестность нуля V, $V \subset T$. Ясно, что замкнутая оболочка окрестности V тоже будет содержаться в T. Таким образом получили базис в нуле, состоящий из бочек в определенном выше смысле.

Пусть U — поглощающее, уравновешенное, m-выпуклое подмножество топологической алгебры A. Рассмотрим неотрицательную функцию

$$x \to p(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U\},\ x \in A,$$

определенную на A. Функция p — полунепрерывная снизу мультипликативная полунорма на A, т. е. $p(xy) \leq p(x)p(y)$ для всех $x,\ y \in A$.

Если p — полунорма, а r — неотрицательное число, через B_r^p будем обозначать множество всех элементов $x \in A$, для которых $p(x) < r$. Иногда говорят, что B_r^p есть полушар радиуса r, определенного полунормой p. Когда полунорма p является нормой, полушар B_r^p есть шар радиуса r.

Ясно, что для определенных выше полунорм имеют место следующие включения:

$$B_1^p \subset U \subset \overline{B}_1^p,$$

а если U — бочка, имеет место равенство $U=\overline{B}_1^p$. Таким образом, множество бочек в любой локально m-выпуклой алгебре совпадает с множеством замкнутых единичных шаров полунепрерывных снизу мультипликативных полунорм. В дальнейшем всегда будем иметь в виду, что топология локально m-выпуклых алгебр определяется указанной выше системой полунорм, т. е. единичные полушары образуют базу топологии.

Естественное определение ограниченного подмножества локально мультипликативно-выпуклой алгебры следующее: это такое подмножество, которое поглощается любой окрестностью нуля, т. е. если оно ограничено в локально выпуклом пространстве, являющемся носителем алгебры A. Тогда подмножество Q локально m-выпуклой алгебры A будет ограниченным, если любая непрерывная снизу мультипликативная полунорма алгебры A ограничена на Q. Нетрудно доказать, что имеет вместо следующее

Предложение 1.2. *Произведение двух ограниченных подмножеств локально m-выпуклой алгебры всегда ограниченно.*

Указанное выше предложение выясняет как определить понятие борнологической алгебры — точнее: понятие борнологической структуры, совместимой со структорой алгебры.

2. Борнологические векторные пространства и борнологические алгебры. Напомним, что борнологической структурой, или короче борнологией, на множестве X называют структуру, образованную заданием системы β подмножеств X, обладающим свойствами:

В1. Если B и B' принадлежат β, то их объединение $B \cup B'$ тоже принадлежит β.

В2. Каждое подмножество B' множества $B \in \beta$ также принадлежит β.

В3. Для каждого элемента x множества X одноэлементное множество $\{x\}$ принадлежит X.

Ясно, что β есть антифильтр на X.

Элементы системы β называются ограниченными множествами множества X.

Борнологическим пространством называют множество, наделенное борнологической структурой (см. [6]).

Отображение u борнологического пространства X в борнологическое пространство Y называется борнологическим, если каждое ограниченное множество множества X отображается в ограниченное подмножество Y. Легко увидеть, что композиция борнологических отображений является тоже борнологическим отображением. Это показывает, что борнологические пространства образуют категорию.

Пусть γ — покрытие X, такое, что для любых двух элементов $C_1 \in \gamma$, $C_2 \in \gamma$ существует элемент $C \in \gamma$, для которого $C_1 \cup C_2 \subset C$. Далее, рассмотрим систему множеств $B \subset X$, таких, что $B \subset C$ для некоторого $C \in \gamma$. Легко увидеть, что β есть борнология на X. Наоборот, если γ—произвольное покрытие, для которого система β является борнологией, то γ удовлетворяет указанное выше свойство. О γ говорят, что оно является базой борнологии.

Если β_i — борнология множества X_i, $i=1, 2$, рассмотрим систему всех множеств $B_1 \times B_2 \subset X_1 \times X_2$, где $B_i \in \beta_i$, $i=1, 2$. Нетрудно увидеть, что указанная система есть база борнологии на $X_1 \times X_2$, называемая произведением борнологии β_1 и β_2.

Будем рассматривать векторные пространства и алгебры над полем K, где K — либо поле вещественных чисел R, либо поле комплексных чисел C.

Пусть множество E наделено одновременно борнологической структурой и структурой векторного пространства над полем $\mathbb{K}$. Говорят, что E — борнологическое векторное пространство (см. [6]), если следующие аксиомы имеют место:

EB1. Отображение $E \times E \to E$, задаваемое правилом „суммирования" $(x, y) \to x+y$, $x \in E$, $y \in E$, является борнологическим.

EB2. Отображение $\mathbb{K} \times E \to E$, задаваемое правилом „умножение на скаляр" $(\lambda, x) \to \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$, тоже борнологическое.

Иногда говорят, что борнологическая структура и структура векторного пространства, удовлетворяющие EB1 и EB2, являются совместимыми.

Пусть множество A наделено борнологической структурой и структурой алгебры над полем $\mathbb{K}$. Будем называть A борнологической алгеброй, если рассматривая A как векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, имеем, что борнологическая структура и структура векторного пространства совместимы (аксиомы EB1 и EB2, которые сейчас обозначим AB1 и AB2) и, кроме этого, имеет место аксиома:

AB3. Отображение $A \times A \to A$, задаваемое правилом „умножения" $(x, y) \to xy$, $x \in A$, $y \in A$, является борнологическим.

Иногда говорят, что борнологическая структура и структура алгебры, удовлетворяющие AB1, AB2 и AB3, являются совместимыми.

Пусть множество E наделено топологией τ, борнологией β и структурой векторного пространства над полем $\mathbb{K}$ таким образом, чтобы относительно топологии τ и структуры векторного пространства оно являлось топологическим векторным пространством, а относительно борнологии β и структуры векторного пространства — борнологическим векторным пространством. Говорят, что топология τ и борнология β совместимы, если (см. [6]):

ETB1. Каждое ограниченное множество поглощается любой окрестностью нуля.

ETB2. Замкнутая оболочка каждого ограниченного подмножества пространства E является ограниченным подмножеством E.

Когда упомянутые условия удовлетворены, говорят, что E является топологическо-борнологическим векторным пространством.

Аналогичным образом можно определить понятие топологическо-борнологической алгебры. В самом деле, пусть множество A наделено топологией τ, борнологией β и структурой алгебры таким образом, чтобы относительно топологии τ и структуры алгебры являлось топологической алгеброй, а относительно борнологии β и структуры алгебры — борнологической алгеброй. Будем говорить, что A — топологическо-борнологическая алгебра, если топология τ и борнология β совместимы в локально выпуклом пространстве, являющимся носителем алгебры A. Точнее, имеем ввиду следующие аксиомы:

ATB1. Каждое ограниченное множество B алгебры A поглощается любой окрестностью нуля.

ATB2. Замкнутая оболочка ограниченного множества B также ограничена.

Когда упомянутые выше условия удовлетворены, будем говорить, что A является топологическо-борнологической алгеброй.

Топологическо-борнологические алгебры образуют категорию. В этой категории существуют проективные и индуктивные пределы.

Существование проективных пределов установить легко. Покажем существование индуктивных пределов.

Пусть $\{A_i, \{f_j^i\}: i, j \in I\}$ — индуктивная система в этой категории. Забывая о топологическо-борнологической структуре, берем индуктивный предел A указанной индуктивной системы в категории алгебр и гомоморфизмов. Наделим A финальной топологией, порожденной гомоморфизмами $f^i: A_i \to A$, и борнологией, для которой система подмножеств $\overline{f_i(B_i)}$, где B_i пробегая ограниченные подмножества алгебры A_i, является базой. Легко установить, что указанные топология и борнология совместимы со структурой алгебры A и между собой. Таким образом наделенная алгебра A является индуктивным пределом в категории топологическо-борнологических алгебр и гомоморфизмов.

Забывая о структуре алгебры, можно утверждать, что $\{A_i \{f_j^i\}: i \in I\}$ является индуктивным пределом $\{A_i, \{f_j^i\}: i, j \in I\}$ в категории топологическо-борнологических векторных пространств.

3. Полинормированные алгебры. Пусть на алгебре A задана система S мультипликативных полунорм. Будем рассматривать максимальную (относительно включения) борнологию на A, для которой любая полунорма из S является борнологической функцией со значения в $\mathbb{R}_+$. Упомянутая борнология состоит из всех множеств $B \subset A$, которые отображаются в ограниченных множествах положительной оси $\mathbb{R}_+$ через каждую полунорму из S. Оказывается, что эта борнология на A совместима со структурой алгебры A.

С другой стороны, известно, что существует слабейшая топология на A, совместимая со структурой алгебры и сохраняющая непрерывность всех полунорм системы S. Оказывается, что введенная выше борнология на A совместима в смысле предыдущего пункта с только что указанной топологией на A. В дальнейшем, упомянутые выше топологию и борнологию будем называть для краткости порожденными системой полунорм S. Алгебру A, снабженную топологией и борнологией, порожденными системой полунорм S, будем называть полинормированной алгеброй. Ясно, что это есть локально m-выпуклая алгебра, которая снабжена борнологией, определенной в п. 1.

Предложение 3.1. *Каждая непрерывная полунорма p на топологическо-борнологической алгебре A является борнологической.*

Предложение 3.2. *Если A — полинормированная алгебра, а B — топологическо-борнологическая алгебра, то каждый непрерывный гомоморфизм $f: B \to A$ является борнологическим.*

Доказательство. Если $U \subset A$ — открытое множество, содержащее начало A, то прообраз $f^{-1}(U) \subset B$ — открытое множество, содержащее начало B. Тогда для каждого ограниченного подмножества Q алгебры B существует $\lambda \in \mathbb{K}$, такое, что $\lambda Q \subset f^{-1}(U)$ и, следовательно, $\lambda f(Q) \subset U$. Ввиду произвольности выбора ограниченного множества Q можно заключить, что f — борнологический гомоморфизм.

Предложение 3.3. *При условии предложения 3.2., если любая борнологическая мультипликативная полунорма на B непрерывна, можно утверждать, что если гомоморфизм алгебр $f: B \to A$ является борнологическим, то он также непрерывен.*

Доказательство. Достаточно проверить, что для любой полунормы p из системы полунорм на A композиция $p \circ f$ есть борнологическая мультипликативная полунорма на B и, следовательно, она непрерывна. Тогда гомоморфизм f также непрерывен.

Имеет место следующая теорема, которая будет использована в дальнейшем (см. п. 5).

Теорема 3.4. *Если определяющая система полунорм S полинормированной алгебры A счетная, то любая борнологическая полунорма на A непрерывна.*

Доказательство. Действительно, если $q: A \to \mathbb{R}_+$ — борнологическая полунорма, которая не является непрерывной, то для каждого натурального числа n существует точка $x_n \in A$ такая, что $x_n \in U_n$, $x_n \notin B_n^q$, где $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ — счетная база окрестностей нуля. Такая база существует потому, что S по условию счетная система. В таком случае, последовательность $\{x_n\}$ стремится к нулю, откуда следует, что она ограничена. Следовательно, существует вещественное число $r > 0$ такое, что $q(x_n) < r$ для каждого натурального числа n (ввиду того что q — борнологическая полунорма). Но согласно выбору последовательности $\{x_n\}$, если $n > r$, то $r < q(x_n)$, что противоречит предыдущему неравенству.

Ясно, что изложенное доказательство вполне аналогично соответствующему рассуждению для пространств.

4. Абсолютно борнологические алгебры. Полинормированная алгебра B называется абсолютно борнологической, если каждое m-выпуклое и уравновешенное ее подмножество, поглощающее каждое ограниченное подмножество B, является окрестностью нулевого элемента. Из изложенного выше вытекает, что для того чтобы полинормированная алгебра B являлась абсолютно борнологической, необходимо и достаточно, чтобы каждая борнологическая мультипликативная полунорма на B была непрерывной. Отсюда следует, что каждая полинормированная алгебра со счетной системой полунорм является абсолютно борнологической. Это вытекает из теоремы 3.4. Кроме того, из предложения 3.3 следует, что абсолютно борнологические алгебры вполне характеризуются следующим утверждением.

Теорема 4.1. *Пусть B — абсолютно борнологическая алгебра, а A — полинормированная алгебра. Тогда каждый борнологический гомоморфизм $g: B \to A$ является непрерывным.*

Абсолютно борнологические алгебры образуют категорию. Оказывается, что в этой категории существуют индуктивные пределы. Существование индуктивных пределов в категории локально m-выпуклых алгебр и в категории абсолютно борнологических алгебр (которая очевидно является полной подкатегорией первой) следует легко из следующей теоремы:

Теорема 4.2. *Пусть заданы алгебра B, фамилия топологических алгебр $\{B_i : i \in I\}$ и гомоморфизмов $f_i: B_i \to B$. Тогда существует сильнейшая локально m-выпуклая топология на B среди всех таких топологий на B, для которых все f_i непрерывны. Если B снабжена этой топологией, то любой гомоморфизм $g: B \to A$, где A — произвольная полинормированная алгебра, является непрерывным тогда и только тогда, когда все композиции $g \circ f_i$ такие же.*

Доказательство. Легко проверить, что упомянутая локально m-выпуклая топология на B порождается системой мультипликативных полунорм на B, для которых композиция $p \circ f_i$ является мультипликативной полунормой на B_i. При этом, если все алгебры B_i абсолютно борнологические, то и B такая же. В самом деле, если B наделена этой топологией, то каждая борнологическая мультипликативная полунорма на B также и непрерывна.

Известно понятие функционально-непрерывной топологической алгебры (см. [5, определение 12.1]). Это такая топологическая алгебра, на которой любой мультипликативный функционал непрерывен.

Аналогичным образом можно определить понятие функционально-борнологической алгебры. Это такая борнологическая алгебра, на которой любой мультипликативный функционал борнологичен.

Предложение 4.3. *Любая функционально-непрерывная полинормированная алгебра является функционально-борнологической.*

Это следует из предложения 3.2.

Предложение 4.4. *Любая абсолютно борнологическая алгебра является функционально-непрерывной тогда и только тогда, когда она функционально-борнологическая.*

Предложение 4.4 следует из предложения 3.2 и предложения 3.3.

Ниже сформулировано одно предложение, доказанное Майклом (см. [5, предложение 12.2]).

Предложение 4.5. *Пусть T — некомпактное, счетное в бесконечности, вполне регулярное пространство, которое либо локально компактно, либо удовлетворяет первую аксиому счетности.*

Пусть $A = C(T)$ — алгебра непрерывных функций на T, снабженной компактно-открытой топологией.

Тогда

a) *A — полная, коммутативная полинормированная алгебра;*

b) *A не является функционально непрерывной;*

c) *A — функционально-борнологическая.*

Из этого вытекает, что нельзя обратить предложение 4.3 и, кроме того, что класс абсолютно борнологических алгебр не совпадает с классом полинормированных алгебр.

5. Примеры. Сначале отметим, что если Ω — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, а K — компактное подмножество Ω, то для любого числа $m>0$ положительная функция, которую можно определить на $\mathcal{E}(\Omega)$ (пространство бесконечно дифференцируемых функций со значениями в $\mathbb{K}$), полагая что

$$N_m^k(\varphi) = \sup\{|\partial^p \varphi(x)| : x \in K, |p| \leq m\}$$

является нормой. (Здесь мы положили $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $|p| = p_1 + \cdots + p_n$, $\partial^p = (\partial/\partial x_1)^{p_1} \ldots (\partial/\partial x_n)^{p_n}$).

Если X — дифференцируемое многообразие класса C^∞, то пространство $\mathcal{E}(X)$ всех функций класса C^∞ на X, а также и $\mathcal{E}^r(X)$ — всех форм на X степени r с коэффициентами из класса C^∞, можно снабдить топологией равномерной сходимости всех частных производных (соотв. коэффициентов форм) на каждом компакте при помощи локальных карт и вышеупомянутой топологией на $\mathcal{E}(\Omega)$. Отметим, что эту топологию можно описать при помощи полунорм. Притом, как легко увидеть, каждый компакт определяет счетное число полунорм, так что получаются абсолютно борнологические пространства.

Во всех примерах будем считать, что пространство $\mathcal{E}(U)$ наделено этой локально выпуклой топологией для каждого открытого подмножества U многообразия X.

Предполагается, что все рассматриваемые многообразия класса C^∞ и счетные в бесконечности.

Пример 5.1. Пусть X — комплексно-аналитическое многообразие. Тогда для каждого открытого $U \subset X$ подпространство $\mathcal{H}(U) \subset \mathcal{E}(U)$ голоморфных функций наделяется индуцированной топологией, и она определяется всеми полунормами вида $p_k = N_0^k$, как видно из теоремы 2.2.3 из [4]. Так что $\mathcal{H}(U)$ — абсолютно борнологическая алгебра, а, следовательно, такая же и

$$\mathcal{H}(Y) = \lim \operatorname{ind} \mathcal{H}(U)$$

для произвольного $Y \subset X$, где индуктивный предел берется по всем открытым $U \supset Y$.

Пример 5.2. Если X — почти комплексное многообразие (см. [4]), то подпространство почти голоморфных функций $\mathcal{A}\mathcal{H}(U) \subset \mathcal{E}(U)$ (см. [7, 8]) наделяется индуцированной топологией и можно рассматривать индуктивный предел

$$\mathcal{A}\mathcal{H}(Y) = \lim \operatorname{ind} \mathcal{A}\mathcal{H}(U),$$

используя те же самые обозначения, как и выше, как абсолютно борнологическую алгебру.

Пример 5.3. Если Ω открыто в $\mathbb{R}^n$, то обозначим через $\mathcal{D}_K$ подпространство всех элементов $\mathcal{E}(\Omega)$ с носителями в K, где K — компактное подмножество (см. [2]). Наделим $\mathcal{D}_K$ индуцированной топологией. Она определяется, очевидно, полунормами $\{N_m^K\}$. Итак, можно рассматривать индуктивный предел по всем компактам $K \subset \Omega$

$$\mathcal{D} = \lim \operatorname{ind} \mathcal{D}_K.$$

Каждая непрерывная линейная форма Φ на $\mathcal{D}$ называется распределением на $\mathcal{D}$. Ввиду того, что $\mathcal{D}$ — абсолютно борнологическое пространство, достаточно, чтобы Φ являлась борнологической.

Пример 5.4. Если X — ориентированное вещественное многообразие размерности n, класса C^∞, то обозначим через $\mathcal{D}_K^r$ пространство всех форм степени r класса C^∞, носитель которых содержится в компакте $K \subset X$. Наделим его индуцированной топологией из $\mathcal{E}^r$, которую, конечно, можно определить счетным числом полунорм. Так что $\mathcal{D}_K^r$ — абсолютно борнологическое пространство. Как и выше, определим $\mathcal{D}^r$ следующим образом:

$$\mathcal{D}^r = \lim \operatorname{ind} \mathcal{D}_K^r.$$

Это тоже абсолютно борнологическое пространство.

Потоком T степени r называется каждая непрерывная линейная форма на $\mathcal{D}^{n-r}$ (см. [3]). Для этого необходимо и достаточно, чтобы форма T являлась борнологической.

Этот пример, очевидно, является обобщением предыдущего.

Автор благодарен С. Димиеву за постановку проблемы и предложения, способствующие улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Бурбаки. Топологические векторные пространства. Москва, 1959.
2. Р. Эдвардс. Функциональный анализ. Москва, 1969.

3. Л. Шварц. Комплексные аналитические многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными. Москва, 1964.
4. Л. Хёрмандер. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных Москва, 1968.
5. E. A. Michael. Locally Multiplicatively Convex Topological Algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, **11**, 1952.
6. C. Houzel. Seminaire Banach, chap. I et II. Paris, 1967.
7. S. Dimiev, O. Mushkarov. Fonctions presque pluiriharmoniques. *C. R. Acad. Bulg. Sci.* **33**, 1980.
8. W. Bootby, S. Kobayachi and N. C. Wang. A note on mappings and automorphisms of almost complex manifolds. *Ann. Math.*, **77**, 1963, 329—334.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 26. 12. 1978.
в переработанном виде 12. 3. 1980