Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

RÄUMLICH HOMOGENE KRITISCHE VERZWEIGUNGSPROZESSE MIT KONTINUIERLICHER ZEIT I

GEORGI S. ČOBANOW

In der vorliegenden Note werden die bekannten Konvergenz- und Strukturaussagen für kritische räumlich homogene Verzweigungsprozesse mit einem Phasenraum R^s, $s \geqq 1$, (vgl. [3] oder Kap. 12 in [6]) auf den Fall kontinuierlicher Zeit übertragen. An die Stelle der Folge $D = D^{[1]}, D^{[2]}, \ldots$ der Schauerpotenzen eines der Bedingung $\int \chi(R^s) D(d\chi) = 1$ genügenden Verteilungsgesetzes eines Punktprozesses tritt jetzt eine schwach stetige Abbildung $D^{(\cdot)}$ von $[0, +\infty)$ in die Menge aller Verteilungsgesetze auf $\mathfrak{M}$, die für alle l, $t \geqq 0$ den Bedingungen

$$\int \chi(R^s) D^{(l)}(d\chi) = 1, \ [D^{(l)}] \circ [D^{(t)}] = [D^{(l+t)}]$$

genügt. Ein spezielles Modell dieser Art wurde von Durrett und ein verwandtes von Dawson (1977) untersucht. Es zeigt sich, daß für die hier behandelten Fragestellungen keine neue Theorie notwendig ist: Die Aussagen im Fall kontinuierlicher Zeit können auf die entsprechenden Ergebnisse im Falle diskreter Zeit zurückgeführt werden.

Im folgenden werden ohne zusätzliche Hinweise Begriffe und Bezeichnungen aus der zusammenfassenden Darstellung [6] benutzt.

1. Kritische räumlich homogene Verzweigungshalbgruppen.

1.1. Definition. *Eine Abbildung $t \to D^{(t)}$ von $[0, +\infty)$ in* **D** *heißt kritische räumlich homogene Verzweigungshalbgruppe, falls sie folgenden Bedingungen genügt:*

a) *Für alle l, $t \geqq 0$ gilt*

$$(D^{(t)})_{[D^{(l)}]} = D^{(l+t)}.$$

b) *Die Abbildung $D^{(\cdot)}$ ist schwach stetig.*

Im folgenden bezeichne $D^{(\cdot)}$ eine beliebige, aber fest gewählte kritische räumlich homogene Verzweigungshalbgruppe.

Unmittelbar aus a) ergibt sich

1.2. *Für alle $t \geqq o$ und alle natürlichen Zahlen n ist $D^{(nt)} = (D^{(t)})^{[n]}$.*

Insbesondere gilt also

$$(*) \qquad D^{(0)} = (D^{(0)})^{[n]} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Berücksichtigen wir nun, daß $(D^{(0)})^{[n]}(\chi(R^s) \in (\,.\,))$ als Verteilungsgesetz der n-ten Generation eines kritischen Galton-Watson-Prozesses mit der Anfangsverteilung δ_1 und der Nachkommensverteilung $D^{(0)}(\chi(R^s) \in (\,.\,))$ interpretiert werden kann, so folgt $D^{(0)}(\chi(R^s) = 1) = 1$, denn andernfalls müßte ja

$$D^{(0)}(\chi(R^s) = 0) = \lim_{n \to \infty} (D^{(0)})^{[n]}(\chi(R^s) = 0) = 1$$

gelten.

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 6, 1980, p. 264—269.

Es existiert also ein Verteilungsgesetz ν auf $\mathfrak{R}^s$ mit der Eigenschaft $D_{\langle 0 \rangle} = Q_\nu$. Erneute Anwendung von (*) ergibt $\nu^n = \nu$ $(n = 1, 2, \dots)$ und damit $\nu = \delta_{[0, \dots, 0]}$. Somit erhalten wir

1.3. $$D^{\langle 0 \rangle} = \delta_{\delta_{[0, \dots, 0]}}.$$

Für alle $t \geq 0$ bezeichne ϱ_t das Intensitätsmaß von $D^{\langle t \rangle}$. Mit Hilfe der Formel 11.7.2. aus [6] ergibt sich aus a)

1.4. *Für alle l, $t \geqq 0$ ist* $\varrho_l * \varrho_t = \varrho_{l+t}$.

Somit sind alle ϱ_t, $t \geq 0$, unbegrenzt teilbar. Weiterhin gilt

1.5. *Die Abbildung $t \to \varrho_t$ von $[0, +\infty)$ in die Menge aller Verteilungsgesetze auf $\mathfrak{R}^s$ ist schwach stetig.*

Beweis. Es sei (t_n) eine gegen t strebende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Vermöge Satz 3.1.12. aus [6] können wir aus b) für alle der Bedingung $\varrho_t(\partial B) = 0$ genügenden beschränkten B aus $\mathfrak{R}^s$ auf

(+) $$\varrho_t(B) \leq \liminf_{n \to \infty} \varrho_{t_n}(B)$$

schließen.

Es sei nun X irgendeine der Bedingung $\varrho_t(\partial X) = 0$ genügende Menge aus $\mathfrak{R}^s$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine beschränkte Menge B_ε in $\mathfrak{R}^s$ mit den Eigenschaften $\varrho_t(\partial B_\varepsilon) = 0$, $\varrho_t(B_\varepsilon) \geqq 1 - \varepsilon$

Vermöge (+) erhalten wir

$$\varrho_t(X) - \varepsilon \leqq \varrho_t(X \cap B_\varepsilon) \leqq \liminf_{n \to \infty} \varrho_{t_n}(X \cap B_\varepsilon) \leqq \liminf_{n \to \infty} \varrho_{t_n}(X)$$

und damit

(++) $$\varrho_t(X) \leqq \liminf_{n \to \infty} \varrho_{t_n}(X).$$

Durch Übergang von X zu $R^s \setminus X$ geht (++) in

(+++) $$\limsup_{n \to \infty} \varrho_{t_n}(X) \leqq \varrho_t(X)$$

über. Somit gilt

$$\varrho_{t_n}(X) \xrightarrow[n \to \infty]{} \varrho_t(X).$$

Im folgenden benötigen wir das Lemma

1.6. *Es sei (P_n) eine Folge von Verteilungsgesetzen auf $\mathfrak{M}$, die für alle beschränkten X in $\mathfrak{R}^s$ der Bedingung*

$$\sup_{x \in R^s;\, n = 1, 2, \dots} \varrho_{P_n}(X + x) < \infty$$

genügt. Ferner sei (t_n) eine gegen t strebende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Unter diesen Annahmen kann aus $P_n \underset{n \to \infty}{\Longrightarrow} P$ auf

$$(P_n)_{[D^{\langle t_n \rangle}]} \underset{n \to \infty}{\Longrightarrow} P_{[D^{\langle t \rangle}]}$$

geschlossen werden.

Beweis. 1. Bekanntlich ist die Abbildung $[x, \Phi] \to T_x \Phi$ von $R^s \times M$ in M stetig bezüglich der vagen Topologie in M. Gemäß Theorem 5.5. in [1] ergibt sich hieraus die Stetigkeit der Abbildung $[x, P] \to [P]_{(x)}$ von $R^s \times \mathbf{P}$ in $\mathbf{P}$ bezüglich der schwachen Topologie in $\mathbf{P}$.

2. Vermöge 1. kann aus $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ auf

$$[D^{\langle t_n\rangle}]_{(x_n)} \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} [D^{\langle t\rangle}]_{(x)}$$

geschlossen werden. Auf Grund eines Stetigkeitssatzes aus [5] impliziert nun $P_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} P$ die behauptete Konvergenzaussage, falls für alle beschränkten X_0 in $\mathfrak{R}^s$

$$\text{(o)} \qquad \inf_X \sup_{n=1,2,\ldots} \int_{R^s\setminus X} [D^{\langle t_n\rangle}]_{(x)}(\chi(X_0)>0)\, \varrho_{P_n}(dx) = 0$$

erfüllt ist, wobei X alle beschränkten Mengen in $\mathfrak{R}^s$ durchläuft. Wegen 1.5. ist die Menge $\{\varrho_{t_n}\}_{n=1,2,\ldots}$ relativ kompakt bezüglich der schwachen Topologie in der Menge aller Verteilungsgesetze auf $\mathfrak{R}^s$. Zu jedem $\varepsilon>0$ existiert somit eine kompakte Menge B mit der Eigenschaft

$$\sup_{n=1,2,\ldots} \varrho_{t_n}(R^s\setminus B) \leq \varepsilon$$

Wir erhalten

$$\inf_X \sup_{n=1,2,\ldots} \int_{R^s\setminus X} [D^{\langle t_n\rangle}]_{(x)}(\chi(X_0)>0)\, \varrho_{P_n}(dx) \leq \inf_X \sup_{n=1,2,\ldots} \int_{R^s\setminus X} \varrho_{t_n}(X_0-x)\, \varrho_{P_n}(dx)$$

$$\leq \inf_X \sup_{n=1,2,\ldots} \int_{R^s\setminus X} \varrho_{t_n}((X_0-x)\cap B)\, \varrho_{P_n}(dx) + \sup_{n=1,2,\ldots} \int \varrho_{t_n}((X_0-x)\setminus B)\, \varrho_{P_n}(dx)$$

$$= \sup_{n=1,2,\ldots} \int \varrho_{P_n}(X_0-x)\, \varrho_{t_n}((dx)\setminus B) \leq \varepsilon \sup_{\substack{z\in R^s\\ n=1,2,\ldots}} \varrho_{P_n}(X_0+z).$$

Somit gilt (o) für alle beschränkten X in $\mathfrak{R}^s$.

In Verallgemeinerung einer Monotonieaussage aus [3] zeigen wir nun

1.7. *Für alle V, W aus* $\mathbf{D}$ *und alle beschränkten X in $\mathfrak{R}^s$ gilt*

$$\int W_{[V]}(\chi(X-x)>0)\, \mu(dx) \leq \int V(\chi(X-x)>0)\, \mu(dx).$$

B e w e i s. Wir erhalten

$$\int W_{[V]}(\chi(X-x)>0)\, \mu(dx) = \int\left(\int [V]_{(\Phi)}(\chi(X-x)>0)\right) W(d\Phi))\, \mu(dx)$$

$$\leq \int\left(\int\left(\int V(\chi(X-x-y)>0)\Phi(dy)\right)W(d\Phi)\right)\mu(dx) = \int\left(\int V(\chi(X-x-y)>0)\, \varrho_W(dy)\right)\mu(dx) = \int\left(\int V(\chi(X-x-y)>0)\, \mu(dx)\right)\varrho_W(dy) = \int\left(\int V(\chi(X-x)>0)\, \mu(dx)\right)\varrho_W(dy)$$

$$= \int V(\chi(X-x)>0)\, \mu(dx).$$

1.8. D e f i n i t i o n. *$D^{\langle\cdot\rangle}$ heißt stabil, falls ein stationäres Verteilungsgesetz P auf $\mathfrak{M}$ existiert, das folgenden Bedingungen genügt:*

$$0 < i_P < +\infty; \quad P_{[D^{\langle t\rangle}]} = P \text{ für alle } t \geq 0$$

1.9. S a t z. *Für jede positive Zahl t sind folgende Aussagen gleichbedeutend:*

x) *$D^{\langle\cdot\rangle}$ ist stabil.*

y) *$D^{\langle t\rangle}$ ist stabil.*

z) *Für alle nichtleeren beschränkten offenen Mengen X aus $\mathfrak{R}^s$ gilt*

$$\inf_{l\geq 0} \int D^{(l)}(\chi(X-x)>0)\,\mu(dx)>0.$$

Beweis. 1. Unmittelbar aus den Definitionen der Stabilität von $D^{(\cdot)}$ bzw. $D^{(t)}$ ergibt sich, daß y) eine Konsequenz von x) ist.

2. Bekanntlich (vgl. [3]), folgt aus y) für alle nichtleeren beschränkten offenen X in $\mathfrak{R}^s$

$$\inf_{n=1,2,\ldots} \int (D^{(t)})^{[n]}(\chi(X-x)>0)\,\mu(dx)>0.$$

Auf Grund von 1.2. und 1.7. ist aber diese Ungleichung gleichbedeutend mit

$$\inf_{l\geq 0} \int D^{(l)}(\chi(X-x)>0)\,\mu(dx)>0.$$

3. Vermöge 1.6. ist die Abbildung $l\to(P_\mu)_{[D^{(l)}]}$ von $[0,+\infty)$ in $\mathbf{P}$ meßbar bezüglich der σ-Algebra $\mathfrak{P}$. Somit ist für alle $x>0$ die Mischung

$$H_x=x^{-1}\int_0^x (P_\mu)_{[D^{(y)}]}(\cdot)\,\mu(dy)$$

sinnvoll. Die Verteilungsgesetze H_x, $x>0$, sind stationär und besitzen die Intensität Eins. Vermöge Satz 3.2.8. in [6] ist daher $\{H_x\}_{x>0}$ relativ kompakt bezüglich der schwachen Topologie in $\mathbf{P}$. Somit existiert eine monoton wachsende Folge (x_n) positiver reeller Zahlen mit den Eigenschaften

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \quad H_{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} P.$$

Aus den entsprechenden Eigenschaften der Verteilungsgesetze H_x, $x>0$, folgt, daß P stationär ist und $i_P\leqq 1$ gilt. Ebenso wie im Beweis von Satz 4.4. in [3] schließen wir nun weiter mit Hilfe von z) auf

$$i_P>0; \quad P_{[D^{(t)}]}=P \quad \text{für alle} \quad t\geqq 0.$$

Somit ist x) eine Konsequenz von z).

2. Konvergenz-und Struktursätze im nichtgitterförmigen Fall.

2.1. Definition. *$D^{(\cdot)}$ heißt nichtgitterförmig, falls zu jeder echten abgeschlossenen Untergruppe H von R^s eine nichtnegative reelle Zahl t_H existiert, so daß*

$$D^{(t_H)}(\chi(H+x)<\chi(R^s))>0$$

für alle x in R^s erfüllt ist.

Diese Definition läßt sich vereinfachen:

2.2. *Für jedes $t>o$ ist das Verteilungsgesetz $D^{(t)}$ genau dann nichtgitterförmig, wenn $D^{(\cdot)}$ diese Eigenschaft besitzt.*

Beweis. 1. Für alle $l\geqq 0$ bezeichne H_l die Gittergruppe von ϱ_l, d. h. die kleinste (supp ϱ_l)-(supp ϱ_l) umfassende abgeschlossene Untergruppe von $\mathfrak{R}^s$. Unmittelbar aus 1.4. ergibt sich, daß H_l monoton wachsend von l abhängt. Andererseits ist aber $H_{nl}=H_l$ $(l\geqq 0;\ n=1,2,\ldots)$. Somit fallen alle H_l, $l>0$, zusammen.

2. Unmittelbar aus den Definitionen ergibt sich, daß $D^{(\cdot)}$ nichtgitterförmig ist, falls $D^{(t)}$ diese Eigenschft besitzt.

Es sei nun umgekehrt $D^{\langle t\rangle}$ gitterförmig, d. h. $H_t \neq R^s$. Wegen 1. existiert dann für alle $l>0$ ein x_l mit der Eigenschaft

$$D^{\langle l\rangle}(\chi(H_t+x_l)=\chi(R^s))=1.$$

Wegen 1.3. gilt dies auch für $l=0$. Somit ist $D^{\langle\cdot\rangle}$ gitterförmig.

2.3. Satz. *$D^{\langle\cdot\rangle}$ stabil und nichtgitterförmig, so gilt dies auch für das Verteilungsgesetz $V=D^{\langle 1\rangle}$ und*

$$\sigma \to P=\int]V[_{(l)}(\,.\,)\,\sigma(dl)$$

ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge aller Verteilungsgesetze σ zufälliger nichtnegativer reeller Zahlen auf die Menge aller stationären P in $\mathbf{P}$ mit der Eigenschaft

$$P_{[D^{\langle t\rangle}]}=P \quad \textit{für alle} \quad t\geqq 0.$$

Beweis. Vermöge 1.9. und 2.2. sind alle Verteilungsgesetze $D^{\langle t\rangle}$, $t>0$, stabil und nichtgitterförmig. Wegen Theorem 12.4.1. in [6] existiert somit für jedes $t>0$ und jedes $l\geqq 0$ genau ein ergodisches stationäres bezüglich $[D^{\langle t\rangle}]$ schauerinvariantes Verteilungsgesetz mit der Intensität l, nämlich $]D^{\langle t\rangle}[_{(l)}$

Für alle $l\geqq 0$ und alle natürlichen Zahlen n kann aus

$$(\,]D^{\langle n^{-1}\rangle}[_{(l)})_{[D^{\langle n^{-1}\rangle}]}=]D^{\langle n^{-1}\rangle}[_{(l)}$$

auf

$$(\,]D^{\langle n^{-1}\rangle}[_{(l)})_{[(D^{\langle n^{-1}\rangle})^{[n]}]}=]D^{\langle n^{-1}\rangle}[_{(l)},$$

d. h. wegen 1.2. auf

$$(\,]D^{\langle n^{-1}\rangle}[_{(l)})_{[V]}=]D^{\langle n^{-1}\rangle}[_{(l)}$$

geschlossen werden. Aus der oben angeführten Eindeutigkeitsaussage folgt nun

$$]D^{\langle n^{-1}\rangle}[_{(l)}=]V[_{(l)} \quad (l\geqq 0;\ n=1, 2, \ldots)$$

Somit gilt

$$(\,]V[_{(l)})_{[D^{\langle n^{-1}\rangle}]}=]V[_{(l)} \quad (l\geqq 0;\ n=1, 2, \ldots)$$

und damit auch

$$(\,]V[_{(l)})_{[D^{\langle n^{-1}m\rangle}]}=]V[_{(l)} \quad (l\geqq 0;\ m=0, 1, \ldots;\ n=1, 2, \ldots)$$

Mit Hilfe von 1.6. folgt hieraus

$$(\,]V[_{(l)})_{[D^{\langle t\rangle}]}=]V[_{(l)} \quad (l\geqq 0;\ t\geqq 0).$$

Somit ist $\sigma\to P=\int]V[_{(l)}(\,.\,)\,\sigma(dl)$ eine Abbildung in die Menge aller stationären Verteilungsgesetze P und der Eigenschaft $P_{[D^{\langle t\rangle}]}=P$ für alle $t\geqq 0$.

Vermöge Theorem 12.4.6. in [6] ist diese Abbildung umkehrbar eindeutig, und jedes stationäre bezüglich $[V]$ schauerinvariante Verteilungsgesetz besitzt die Gestalt $\int]V[_{(l)}(\,.\,)\,\sigma(dl)$.

2.4. Satz. *Ist $D^{\langle\cdot\rangle}$ stabil und nichtgitterförmig, so gilt für jedes L in $\mathbf{S}$*

$$L_{[D^{\langle t\rangle}]}\underset{t\to\infty}{\Longrightarrow}\int]V[_{(l)}(\,.\,)\,\sigma_L(dl),$$

wobei $V=D^{\langle 1\rangle}$ zu setzen ist.

Beweis. 1. Gemäß 2.3. ist das Verteilungsgesetz V stabil und nichtgitterförmig. Vermöge 1.2. und Theorem 12.4.3. aus [6] erhalten wir somit für alle L aus $\bigcup_{c>0} \mathbf{S}^{(c)}$

$$L_{[D\langle n\rangle]} = L_{[V[n]]} \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} P = \int]V[_{(l)}(\,.\,)\,\sigma_L(dl).$$

2. Mit Hilfe von 11.7.2. sowie 11.7.7. aus [6] erhalten wir für alle beschränkten X in $\mathfrak{R}^s$

$$\sup_{\substack{x\in R^s;\\ n=1,\dots}} \varrho_{L_{[V][n]}}(X+x) \sup_{\substack{x\in R^s;\\ n=1,2,\dots}} \int (\varrho_V)^n (X+x-y)\,\varrho_L(dy)$$

$$= \sup_{\substack{x\in R^s\\ n=1,2,\dots}} \int \varrho_L(X+x-y)(\varrho_V)^n(dy) \leqq \sup_{z\in R^s} \varrho_L(X+z) \quad < +\infty.$$

Ist nun (m_k) irgendeine gegen $+\infty$ strebende Folge nichtnegativer ganzer Zahlen und (r_k) eine gegen r strebende Folge von Zahlen aus $[0, 1)$, so erhalten wir auf Grund von 1., 1.6. und 2.3.

$$L_{[D\langle m_k+r_k\rangle]} = (L_{[D\langle m_k\rangle]})_{[D\langle r_k\rangle]} \underset{k\to\infty}{\Longrightarrow} P_{[D\langle r\rangle]} = P.$$

3. Es sei (t_k) irgendeine gegen $+\infty$ strebende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Wir setzen $t_k m =_k + r_k$, wobei m_k den ganzen Anteil von t_k bezeichnet. Jede Teilfolge von (t_k) besitzt ihrerseits eine Teilfolge (t_{k_n}) für die (r_{k_n}) konvergiert und somit gemäß 2. die Folge $(L_{[D\langle t_{k_n}\rangle]})$ schwach gegen P strebt. Somit erhalten wir

$$L_{[D\langle t_k\rangle]} \underset{k\to\infty}{\Longrightarrow} P = \int]V[_{(l)}(\,.\,)\,\sigma_L(dl),$$

d. h. unsere Behauptung gilt für alle L aus $\bigcup_{c>0} \mathbf{S}^{(c)}$. Ebenso wie im letzten Schritt des Beweises von Theorem 11.8.6. in [6] kann man sich nun von der uneingeschränkten Gültigkeit der Konvergenz

$$L_{[D\langle t\rangle]} \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \int]\,V[_{(l)}(\,.\,)\,\sigma_L(dl)$$

für alle L aus $\mathbf{S}$ überzeugen.

LITERATUR

1. P. Billingsley. Convergence of probability measures. New York, 1968.
2. D. A. Dawson. The critical measure diffusion process. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie u. verw. Gebiete*, **40**, 1977, 125–145.
3. H. Debes, J. Kerstan, A. Liemant, K. Matthes. Verallgemeinerungen eines Satzes von Dobruschin I. *Math. Nachr.*, **47**, 1970, 183—244.
4. R. Durrett. An infinite particle system with additive interaction. Manuskript.
5. K. Fleischmann. A continuity theorem for clustering. *Лит. Мат. Сб.*, 19, 1979, № 1, 187—196.
6. K. Matthes, J. Kerstan, J. Mecke. Infinitely divisible point processes. New York, 1978

Centre for Mathematics and Mechanics
1090 Sofia *P. O. Box 373*

Received 27. 3. 1979