Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О СУЩЕСТВОВАНИИ МИНИМАЛЬНОГО t-ГРАФА С ДАННЫМ ЧИСЛОМ ВЕРШИН

НЕДЯЛКО Д. НЕНОВ

В работе доказывается, что для любого натурального числа $n \neq 1, 2, 3, 4, 5$ и 7 существует минимальный t-граф с n вершинами.

1. Введение и формулировка результатов. Рассматриваются только конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Определение 1. *Будем говорить, что задана 2-раскраска ребер графа, если любое из них покрашено в красный или зеленый цвет.*

Определение 2. *Если в любой 2-раскраске ребер графа все ребра некоторого треугольника имеют одинаковый цвет, будем говорить, что этот треугольник монохроматический в данной 2-раскраске.*

Хорошо известно [11], что в любой 2-раскраске ребер полного графа с 6 вершинами существует монохроматический треугольник.

Определение 3. *Граф G будем называть t-графом, если в любой 2-раскраске его ребер есть монохроматический треугольник.*

Определение 4. *2-раскраску ребер графа будем называть правильной, если в ней нет монохроматических треугольников.*

Ясно, что граф обладает правильной 2-раскраской тогда и только тогда, когда он не является t-графом.

Определение 5. *Будем говорить, что вершины $v_1, \ldots, v_p$ графа G составляют p-клику, если любые две из них смежны.*

Определение 6. *Если граф G содержит s-клику, но не содержит $(s+1)$-клику, будем говорить, что граф G имеет кликовое число s и писать $cl(G)=s$.*

Из того, что полный граф с 6 вершинами является t-графом, [11], очевидно следует, что если $\mathrm{cl}(G) \geq 6$, то G является t-графом. Эрдёш и Хайнал [6] поставили вопрос о существовании t-графов G, для которых $\mathrm{cl}(G) \leq 5$. Линт построил пример t-графа с 14 вершинами и кликовым числом 5. Этот пример не был опубликован Линтом, однако он содержится в [8]. Грахам [7] построил t-граф с 8 вершинами и кликовым числом 5. Шойбле [9] построил t-граф с кликовым числом 4, а Фолкман [10] построил t-граф с кликовым числом 3. Понятно, что t-граф с кликовым числом меньше 3 не существует.

Очевидно, если некоторый граф содержит t-подграф, он тоже является t-графом. Поэтому целесообразно ввести следующее

Определение 7. *t-граф G будем называть минимальным t-графом, если у него нет собственных t-подграфов.*

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 6, 1980, с. 270—274.

Любой t-граф содержит минимальный t-подграф и поэтому следует изучать только минимальные t-графы.

Отметим, что t-граф Линта содержит в качестве подграфа t-граф Грахама [7], так что он не является минимальным t-графом. Однако t-граф Грахама является минимальным t-графом.

Нетрудно показать, что полный граф с 6 вершинами является единственным минимальным t-графом с кликовым числом 6. Интересно знать, сколько же минимальных t-графов с кликовым числом 5? В работе [1] доказано, что их бесконечно много. В [2] построено бесконечно много минимальных t-графов с кликовым числом 4. Пока неизвестно, существует ли бесконечно много минимальных t-графов с кликовым числом 3.

Интересно знать тоже, для каких натуральных n существует минимальный t-граф с n вершинами. В [1] построен минимальный t-граф с n вершинами для любого четного числа $n \geqq 8$. В [3] построен минимальный t-граф с n вершинами для любого нечетного числа $n \geqq 17$. В [4] доказано, что существует минимальный t-граф с 9-вершинами. В настоящей работе мы докажем, что существует минимальный t-граф с n вершинами для любого нечетного числа $n \geqq 9$. Тем самым будет доказано, что для любого натурального числа n, отличного от 1, 2, 3, 4, 5 и 7, существует минимальный t-граф с n вершинами.

Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим соответственно множество вершин и множество ребер графа G. Если $v_1, \ldots, v_k$ — множество вершин графа G, то через $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ обозначим подграф графа G, порожденный множеством $v_1, \ldots, v_k$, т. е. $V(\langle v_1, \ldots, v_k \rangle) = \{v_1, \ldots, v_k\}$ и $E(\langle v_1, \ldots, v_k \rangle)$ состоит из всех ребер графа G, оба конца которых принадлежат множеству $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Определение 8. *Будем говорить, что множество вершин $v_1, \ldots, v_k$ графа G независимо, если подграф $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ не содержит ребер.*

Определение. *Будем говорить, что граф G является r-хроматическим, если множество его вершин можно разбить на r независимых, непересекающихся подмножеств.*

Пусть G_1 и G_2 — два графа, для которых $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Следуя Зыкову [5], под соединением $G_1 + G_2$ графов G_1 и G_2 будем понимать граф G, для которого $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E_{12}$, где E_{12} состоит из всех ребер $[v_1, v_2]$, $v_1 \in V(G_1)$, $v_2 \in V(G_2)$.

Пусть G — граф и $l_1, \ldots, l_k$ — его ребра. Через $G - \{l_1, l_2, \ldots, l_k\}$ будем обозначать подграф G_1 графа G, для которого $V(G_1) = V(G)$ и $E(G_1) = E(G) \setminus \{l_1, \ldots, l_k\}$.

Через C_n обозначим простой цикл длины n. Пусть $C_3 = w_1 w_2 w_3$ и $C_{2r+1} = v_1 v_2 \ldots v_{2r+1}$. Через $A(r)$ обозначим граф $(C_3 + C_{2r+1}) - \{[v_1, w_1]\}$. Пусть $r \geqq 2$ и v_0 есть граф, состоящий из единственной вершины v_0. Через $F(r)$ обозначим граф $(A(r) + v_0) - \{[v_0, v_4], [v_0, w_1]\}$. На рис. 1 изображен граф $F(2)$.

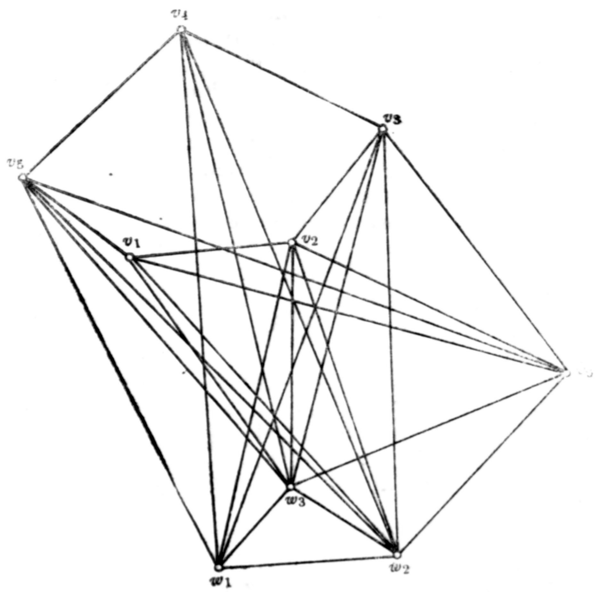
В настоящей работе будет доказана следующая

Теорема. *Граф $F(r)$, $r \geqq 2$, является t-графом. Любой минимальный t-подграф графа $F(r)$ имеет $2r+5$ вершины.*

Непосредственно из теоремы следует, что для любого нечетного числа $n \geqq 9$ существует минимальный t-граф с n-вершинами.

Для доказательства теоремы нам будут нужны следующие леммы:

Лемма 1. *Пусть дан граф G и некоторая 2-раскраска его ребер. Через M_1 обозначим множество всех вершин графа G, которые связаны* *с вершиной v_0 красным ребром, а через M_2 — множество всех вершин, связанных с v_0 зеленым ребром. Если хотя бы один из подграфов $\langle M_1 \rangle$ и $\langle M_2 \rangle$ содержит треугольник, то эта 2-раскраска содержит монохроматический треугольник.*



Рии. 1

Лемма 2. *Если граф G является 5-хроматическим графом, то он не является t-графом.*

2. Доказательство лемм. Доказательство леммы 1. Допустим, что $w_1, w_2, w_3 \in M_1$ и $\langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ является треугольником. Из определения M_1 следует, что ребра $[v_0, w_1]$, $[v_0, w_2]$, $[v_0, w_3]$ — красные. Если хотя бы одно из ребер $[w_1, w_2]$, $[w_2, w_3]$, $[w_1, w_3]$ тоже красное, получим красный треугольник с вершиной v_0. Иначе все ребра треугольника $[w_1, w_2, w_3]$ зеленые. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть

$$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V_5 \tag{1}$$

является 5-хроматическим разложением для графа G. Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер графа G:

1. Все ребра, имеющие один конец в V_1, а второй в V_2 — красные.
2. Все ребра, имеющие один конец в V_2, а второй в V_3 — красные.
3. Все ребра, имеющие один конец в V_3, а второй в V_4 — красные.
4. Все ребра, имеющие один конец в V_4, а второй в V_5 — красные.
5. Все ребра, имеющие один конец в V_5, а второй в V_1 — красные.
6. Все остальные ребра — зеленые.

Эта 2-раскраска ребер графа G правильная. Действительно, если G не содержит треугольник — это очевидно. Допустим, что G содержит треугольник $[w_1, w_2, w_3]$. Вершины w_1, w_2 и w_3 принадлежат различным подмножествам разложения (1). Из способа построения рассматриваемой 2-раскраски следует, что одновременно все ребра треугольника $[w_1, w_3, w_3]$ не могут быть красными, а также — и зелеными. Лемма 2 доказана.

3. **Доказательство теоремы.** 1. Граф $F(r)$ является t-графом. Допустим, что это не так. Рассмотрим произвольную правильную 2-раскраску его ребер. Обозначим через M_1 множество всех вершин графа $F(r)$, связанных с вершиной w_3 красным ребром, а через M_2 — множества всех вершин графа $F(r)$, связанных с вершиной w_3 зеленым ребром. Из леммы 1 следует, что подграфы $\langle M_1\rangle$ и $\langle M_2\rangle$ не содержат треугольников. Без ограничения общности можно предположить, что $w_1 \in M_1$. Покажем, что $w_2 \in M_1$. Допустим, что $w_2 \in M_2$. Рассмотрим два случая:

а) $v_3 \in M_1$. Из того, что $\langle M_1\rangle$ не содержит треугольников и что $w_1 \in M_1$ и $v_3 \in M_1$, следует, что v_2, $v_4 \in M_2$. Из $v_4 \in M_2$, $v_2 \in M_2$, $w_2 \in M_2$ следует, что $v_0 \in M_1$, $v_5 \in M_1$, $v_1 \in M_1$. Если $r>2$, из $v_5 \in M_1$ и $w_2 \in M_1$ получаем $v_6 \in M_2$, а из $v_6 \in M_2$ и $w_2 \in M_2$ получаем $v_7 \in M_1$ и т. д., т. е. в случае а) имеем

$$M_1=\{w_1, v_0, v_1, v_3, \ldots v_{2r+1}\}, \quad M_2=\{w_2, v_2, v_4, \ldots, v_{2r}\}.$$

Получили, что $\langle M_1\rangle$ содержит треугольник $[v_0, v_1, v_{2r+1}]$, что невозможно;

б) $v_3 \in M_2$. Из того, что $\langle M_2\rangle$ не содержит треугольников и что $w_2 \in M_2$ и $v_3 \in M_2$, следует $v_0 \in M_1$, $v_2 \in M_1$ и $v_4 \in M_1$. Из v_4, v_2, v_0, $w_1 \in M_1$ следует v_1, $v_5 \in M_1$ и т. д., из $v_{2r-1} \in M_2$ и $w_2 \in M_2$ следует $v_{2r} \in M_1$, а из $v_{2r} \in M_1$ и $W_1 \in M_1$ следует $v_{2r+1} \in M_2$. Следовательно, в случае б)

$$M_1=\{w_1, v_0, v_2, v_4, \ldots, v_{2r}\}, \quad M_2=\{w_2, v_1, v_3, \ldots, v_{2r+1}\}.$$

Получили, что $\langle M_2\rangle$ содержит треугольник $[w_2, v_1, v_{2r+1}]$, что является противоречием.

Итак, мы доказали, что в рассматриваемой 2-раскраске ребер графа $F(r)$ ребра $[w_1, w_3]$ и $[w_2, w_3]$ имеют одинаковый цвет.

Так как вершины w_2 и w_3 равноправны в графе $F(r)$, то аналогичным образом следует, что ребра $[w_1, w_2]$ и $[w_2, w_3]$ тоже имеют одинаковый цвет в рассматриваемой 2-раскраске. Мы получили, что треугольник $[w_1, w_2, w_3]$ монохроматический, что невозможно, так как мы предположили, что рассматриваемая 2-раскраска ребер графа $F(r)$ правильная.

Этим мы доказали, что $F(r)$ является t-графом, $r \geqq 2$.

2. Любой минимальный t-подграф графа $F(r)$ имеет $2r+5$ вершин. Для доказательства этого факта достаточно показать, что после удаления произвольной вершины графа $F(r)$ получается подграф, который не является t-графом. Рассмотрим все принципиально различные случаи:

а) удалена одна из вершин w_1, w_2, w_3, например w_1. Пусть $A_1 \cup A_2$ является 2-хроматическим разложением для подграфа цикла $v_1 v_2 \ldots v_{2r+1}$, полученного после удаления вершины v_4 (такое разложение очевидно существует). Тогда $\{w_1\} \cup \{w_2\} \cup A_1 \cup A_2 \cup \{v_0, v_4\}$ является 5-хроматическим разложением для полученного подграфа графа $F(r)$. Согласно лемме 2 этот подграф не является t-графом;

b) удалена одна из вершин цикла $v_1 v_2 \ldots v_{2r+1}$. Пусть $A_1 \cup A_2$ является 2-хроматическим разложением для оставшейся части этого цикла. Тогда $\{w_1, w_0\} \cup \{w_2\} \cup \{w_3\} \cup A_1 \cup A_2$ является 5-хроматическим разложением для полученного подграфа графа $F(r)$. Согласно лемме 2 этот подграф не является t-графом;

c) удалена вершина v_0. В этом случае

$$\{v_1, w_1\} \cup \{w_2\} \cup \{w_3\} \cup \{v_2, v_4, \ldots, v_{2r}\} \cup \{v_3, v_5, \ldots, v_{2r+1}\}$$

является 5-хроматическим разложением для полученного подграфа. Согласно лемме 2 этот подграф не является t-графом. Теорема доказана.

Следствие. *Для любого натурального* $n \neq 1, 2, 3, 4, 5$ *и* 7 *существует минимальный* t*-граф с* n *вершинами.*

Следствие вытекает из теоремы и из результатов в [1].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Н. Хадживанову за внимание к этой работе и оказанную помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. О графах, содержащих монохроматический треугольник при произвольной двуцветной раскраске ребер. *Сердика*. **5**, 1979, 303—305.
2. Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов. t-графы с кликовым числом, равным четырем. *Математика и математическое образование*, 1979. София, 1979, 565—577.
3. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. О минимальных t-графах. *Сердика*, **6**, 1980, 128—142.
4. Н. Д. Ненов. О существовании минимального t-графа с девятью вершинами. *Годишник СУ*, **72**, 1978 (в печати).
5. А. Зыков. О некоторых свойствах линейных комплексов. *Мат. сборник*, **24**, 1949, 163—188.
6. P. Erdos, A. Hajnal. Research problem 2—5. *J. Combin. Theory*, **2**, 1976, 107.
7. R. Graham. On edgewise 2-coloured graphs with monochromatic triangles containing complete hexagon. *J. Combin. Theory*, **4**, 1968, 300.
8. R. Graham, J. Spencer. On small graphs with forced monochromatic triangles. *Lecture Notes Math.*, **186**, 137—141.
9. M. Schauble. Zu einem Kanten ferbungsproblem. *Wiss. Z. Th. Ilemenau* 15, 2, 1969, 55—58.
10. J. Folkman. Graphs with monochromatic complete subgraphs in every edge coloring. *SIAM J. Appl. Math.*, **18**, 1970, 19—24.
11. R. E. Greenwood, A. M. Gleason. Combinatorial relation and chromatic graphs. *Canad. J. Math.*, **7**, 1955, 1—8.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 12. 4. 1979