Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБЩАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

ВАСИЛ М. ВЕСЕЛИНОВ, ИВАН КИРКОРОВ

В работе получена общая оценка для хаусдорфова приближения функций при помощи линейных операторов класса S. В доказательстве применяется метод, разработанный в [1]. Класс S содержит в частности полиномы Бернштейна и операторы Миракьяна — Саса и Баскакова.

Пусть Ω — класс комплекснозначных функций, заданных на полуоси $[0, \infty)$ с ростом на бесконечности не выше экспоненциального. Рассмотрим последовательность линейных ограниченных операторов $\{L_n(f(t); x)\}_1^\infty$, заданных на множестве Ω, $x\in[0, 1]$ и $L_n(1; x)=1$. Предположим, что неравенство $L_n(f(t); x)\geqq 0 (0\leqq x\leqq 1)$ выполнено для любой функции $f(t)\geqq 0 (0\leqq t<\infty)$, т. е. операторы L_n являются положительными. Возьмем функцию $\exp zt (t\in [0, \infty))$, где z — любое комплексное число. Пусть для любого $\theta\in(0, n)$ и любого $x\in[0, 1]$ выполнено условие

$$(1)\qquad \lambda(\theta; x)=\max_{|z|=\theta} |\exp(-zx)L_n(\exp zt; x)|\leqq \exp\left\{4n\left(\exp\frac{\theta}{n}-1-\frac{\theta}{n}\right)\right\}.$$

Класс всех операторов L_n, для которых выполняется условие (1), будем обозначать через S. Легко проверяется, что в классе S входят некоторые известные операторы.

а. полином Бернштейна $B_n(f(t); x)=\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}$. Имеем

$$\exp(-zx)B_n(\exp zt; x)=\exp(-zx)\sum_{\nu=0}^{n}\exp\frac{z\nu}{n}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}$$

$$=\exp(-zx)\left(x\exp\frac{z}{n}+1-x\right)^n=\{\Psi_n(z, x)\}^n,$$

где $\Psi_n(z, x)=1+x(1-x)\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{z}{n}\right)^\nu\{(1-x)^{\nu-1}-(-x)^{\nu-1}\}$.

Следовательно, для $x\in[0, 1]$ будет выполнено

$$\lambda(\theta; x)\leqq\exp\left\{\frac{1}{4}n\left(\exp\frac{\theta}{n}-1-\frac{\theta}{n}\right)\right\},\quad \text{т. е.}\quad B_n\in S.$$

б. оператор Миракьяна — Саса $M_n(f(t); x)=\exp(-nx)\sum_{\nu=0}^{\infty}f\left(\frac{\nu}{n}\right)\frac{(nx)^\nu}{\nu!}$. В этом случае

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 6, 1980, с. 275—277.

$$\exp(-zx)M_n(\exp zt;\ x)=\exp(-zx)\exp(-nx)\sum_{\nu=0}^{\infty}\exp\frac{z\nu}{n}\,\frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

$$=\exp(-zx)\ \exp\left\{nx\left(\exp\frac{z}{n}-1\right)\right\}=\exp\left\{nx\left(\exp\frac{z}{n}-1-\frac{z}{n}\right)\right\}.$$

Эти соотношения показывают, что для $x\in[0,\ 1]$ будем иметь $\lambda(\theta;x)\leqq\exp\left\{n\left(\exp\frac{\theta}{n}-1-\frac{\theta}{n}\right)\right\}$, а это означает, что и $M_n\in S$.

в. оператор Баскакова $B_n^*(f(t);\ x)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{-n}{\nu}(-x)^\nu(1+x)^{-n-\nu}$. Имеем

$$\exp(-zx)B_n^*(\exp zt;\, x)=\exp(-zx)\sum_{\nu=0}^{\infty}\exp\frac{z\nu}{n}\binom{-n}{\nu}(-x)^\nu(1+x)^{-n-\nu}$$

$$=\left\{(1+x)\exp\frac{zx}{n}-x\exp\frac{z(1+x)}{n}\right\}^{-n}$$

$$=\{1+x(1+x)\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{z}{n}\right)^\nu\{x^{\nu-1}-(1+x)^{\nu-1}\}^{-n}.$$

Следовательно, для $x\in[0,\ 1]$ будет выполнено

$$\lambda(\theta;\, x)\leqq\left\{1-2\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\theta}{n}\right)^\nu\right\}^{-n}\leqq\exp\left\{4n\left(\exp\frac{\theta}{n}-1-\frac{\theta}{n}\right)\right\}$$

и значит $B_n^*\in S$.

Введем еще следующие обозначения: R_Δ — класс действительных функций, заданных и ограниченных на отрезке (интервале) Δ; $r_\alpha(\Delta;f,g)$ — хаусдорфово расстояние с параметром $\alpha>0$ между функциями f, $g\in R_\Delta$ (см. [2; 3]); $\tau_\alpha(\Delta,f;\ \delta)$ — модуль H-непрерывности функции f на отрезке Δ, $\tau_\alpha(\Delta,\ f;\ \delta)=r_\alpha(\Delta;\ S(\delta/2,\ f),\ I(\delta/2,\ f)$, где $S(\delta,\ f;\ x)=\sup\{y:y\in f(t),\ \ t\in[x-\delta,\ \ x+\delta]\cap\Delta\}$, $I(\delta,\ f;\ x)=\inf\{y:y\in f(t),\ \ t\in[x-\delta,\ \ x+\delta]\cap\Delta\}$; $A_\varkappa^M$ — класс функций $f\in R_{(-\infty,\infty)}$, таких, что $f(x)=\mathrm{const}$ для $x\geqq\varkappa$, $\lim\limits_{\delta\to+0}\tau_\alpha([0,\ 1],\ f;\ \delta)=0$, $\|f\|=\sup\limits_x|f(x)|\leqq M$, $0<\varkappa<1$, M — постоянная.

Получим оценку для хаусдорфова расстояния между функцией $f\in A_\varkappa^M$ и оператором $L_n(f)\in S$.

Теорема 1. *Для любой функции $f\in A_\varkappa^M$ и любого натурального $n\geqq C_1(\varkappa,\alpha)$ выполняется*

(2) $$r_\alpha([0,\ 1];\ f,\ L_n(f))\leqq\tau_\alpha([0,\ 1],\ f;\ 2e^2(n^{-1}\ln n)^{1/2})+C_2Mn^{-1},$$

где константа $C_1(\varkappa,\alpha)>0$ зависит только от $\varkappa$ и α, а константа $C_2>0$ — абсолютная.

Доказательство. Согласно теореме 3 [1] будем иметь

(3) $$r_\alpha([0,\ 1];\ f,\ L_n(f))\leqq\tau_\alpha([0,\ 1],\ f;\ 2\delta)+2M\sup\{L_n(\sigma;\ x):x\in[0,\ 1]\},$$

$$\text{где } \sigma(\delta,\ x;\ t)=\begin{cases}0 & \text{для } t\in[x-\delta,\ x+\delta]\cap[0,\ \infty)\\ 1 & \text{для } t\in[0,\infty)\setminus[x-\delta,\ x+\delta].\end{cases}$$

Из (3) получаем для любого натурального k

(4) $$r_\alpha([0,1];f,L_n(f))\leqq\tau_\alpha([0,1],f;2\delta)+2M\delta^{-2k}\sup\{L_n((t-x)^{2k};x):x\in[0,1]\}.$$

Согласно лемме 2[4] имеем

(5) $$L_n((t-x)^{2k};x)\leqq(2k)!\ \lambda(\theta)\theta^{-2k}\quad \text{для}\quad x\in[0,1],$$

где $\lambda(\theta)=\sup\{\lambda(\theta;x):x\in[0,1]\}$. (4), (5) и формула Стирлинга дают

(6) $$r_\alpha([0,1];f,L_n(f))\leqq\tau_\alpha([0,1],f;2\delta)+6M\sqrt{\pi k}(2k)^{2k}(e\delta\theta)^{-2k}\lambda(\theta).$$

Пользуясь условием (1), получим для $\theta=(n\ln n)^{1/2}$

$$\lambda((n\ln n)^{1/2})\leqq\exp\left\{4n\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(n^{-1}\ln n)^{\nu/2}\right\}$$

$$=\exp\left\{4\ln n\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(n^{-1}\ln n)^{\nu/2-1}\right\}\leqq\exp(3\ln n)$$

и, следовательно,

(7) $$\lambda((n\ln n)^{1/2})\leqq n^3.$$

Пусть число $C_1(\varkappa,\alpha)>0$ такое, что при $n\geqq C_1(\varkappa,\alpha)$ выполнено $e^2(n^{-1}\ln n)^{1/2}<2\alpha\varkappa$. Положим в (6) $\delta=e^2(n^{-1}\ln n)^{1/2}$, $\theta=(n\ln n)^{1/2}$, $k=[\ln n]$ и воспользуемся неравенством (7). Получим для $n\geqq C_1(\varkappa,\alpha)$

$$r_\alpha([0,1];f,L_n(f))\leqq\tau_\alpha([0,1],f;2e^2(n^{-1}\ln n)^{1/2})+C_2M\sqrt{\pi}e^8n^{-1}.$$

Этим доказательство теоремы окончено.

Замечание. Оценка (2) установлена ранее в случае операторов B_n и M_n в [1] и [5]. Оценки другого типа (через модуль немонотонности приближаемой функции) получены в [4]. Порядок $(n^{-1}\ln n)^{1/2}$ в (2) нельзя, вообще говоря, улучшить на классе A_λ^M (см. [1]). Ясно также, что этот порядок сохраняется и если в условии (1) вместо константы 4 поставим любую положительную константу. Ограничения справа для функции f можно отбросить в случае полиномов Бернштейна (см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Веселинов. О точном порядке приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна в метрике Хаусдорфа. *Матем. заметки*, **12**, 1972, 501—510.
2. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 5, 141—178.
3. Бл. Сендов. Хаусдорфовые приближения. София, 1979.
4. V. A. Popov, V. M. Veselinov. One generalization of the Popoviciu's theorem for Bernstein polynomials. *Mathematica* (RSR), **16**, 1974, 159—172.
5. В. М. Веселинов. О хаусдорфовом приближении производными линейных операторов и полиномами Бернштейна. *Доклады БАН*, **31**, 1978, 639—642.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373
Высший экономический институт
София

Поступила 23. 4. 1970