Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

АНДРЕЙ С. АНДРЕЕВ, РУМЕН П. МАЛЕЕВ

Для краевой задачи $(py')'-qy=f$, $y(0)=y(1)=0$, $p(x)\geq \bar{p}>0$, $q(x)\geq 0$ найдена оценка равномерного расстояния между точным решением и приближенным решением, полученным по методу конечных элементов. Из этой оценки, выраженной при помощи новой характеристики функций, можно получить при дополнительных предположениях для функций p, q и f различные по порядку оценки погрешности метода конечных элементов.

1. Рассмотрим характеристику функций, при помощи которой выразим оценку разности между точным и приближенным решением рассматриваемой краевой задачи. Через

$$\omega_k(f,\ x;\ \delta)=\sup\{|\Delta_h^k f(t)|;\ t,\ t+kh\in[x-k\delta/2,\ x+k\delta/2]\cap[0,1]\},$$

$$\Delta_h^k f(t)=\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k+m}\binom{k}{m}f(t+mh),$$

обозначим локальный модуль k-того порядка функцией f в точке $x\in[0,1]$.

Определяем

$$\tau_k(f;\ \delta)_{L_p}=\|\omega_k(f,\ x;\ \delta)\|_{L_p},\quad 1\leq p\leq\infty,\quad k=1,\ 2,\dots \tag{1}$$

Отметим некоторые свойства модуля (1) (см. [5, 6, 8]):

(2)

а) $\tau_k(f;\ \delta)_{L_p}\leq\delta\tau_{k-1}(f';\ \delta)_{L_p}$;

б) $\tau_1(f;\ \delta)_{L_p}\leq\delta\|f'\|_{L_p}$;

в) $\tau_1(f;\ \delta)_{L_p}\leq 2\delta\bigvee_0^1 f$;

г) $\tau_k(f;\ \lambda\delta)_{L_p}\leq(4\lambda+1)^{4k}\tau_k(f;\ \delta)_{L_p}$.

2. Ограничимся рассмотрением краевой задачи

$$Au\equiv(pu')'-qu=f,\quad u(0)=u(1)=0, \tag{3}$$

где $p(x)\geq\bar{p}>0$, $q(x)\geq 0$, $0<x<1$ (случай более общих краевых условий $\alpha_1 y(0)+\beta_1 y'(0)=\gamma_1$, $\alpha_2 y(1)+\beta_2 y'(1)=\gamma_2$ рассматривается аналогичным образом [1, 2, 3, 4]).

Приближенное решение задачи (3) будем искать в виде

$$v(x)=\sum_{k=0}^{n-1}y_k\varphi_k(x), \tag{4}$$

где

$$(5) \quad \varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ (x - x_{i-1})/h, & x \in [x_{i-1}, x_i], \quad x_i = i/n, \quad h = 1/n, \quad i = 1, \dots, n-1. \\ (x_{i+1} - x)/h, & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

В [3; 4] показано, что при таком выборе базисных функций φ_i метод Галеркина и вариационно-разностные методы определения коэффициентов y_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$ в (4) приводят к линейной системе

$$\tilde{p}_i(y_{i-1} - y_i)/h + \tilde{p}_{i+1}(y_{i+1} - y_i)/h - (y_{i-1}\tilde{q}_{i,i-1} + y_i(\tilde{q}_{i,i} + \bar{q}_{i,i}) + y_{i+1}\tilde{q}_{i+1,i}) = \tilde{f}_i$$

$$(6) \quad y_0 = y_n = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

где

$$\tilde{p}_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(t)\,dt, \quad \tilde{q}_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)\varphi_i^2(x)\,dx, \quad q_{i,i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)\varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x)\,dx,$$

$$\bar{q}_{i,i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)\varphi_i^2(x)\,dx, \quad \tilde{f}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)\,dx.$$

Именно выбор функций (5) (один из возможных) с конечным носителем (конечные элементы) и нахождение приближенного решения задачи (3) в форме (4), где коэффициенты y_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$ выбираются на основе минимизации конкретного функционала, связанного с вариационным принципом, приводит к трехдиагональному виду линейной системы (6).

Запишем (6) в безиндексном виде

$$(7) \quad (ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi, \quad y_0 = y_n = 0,$$

где a, d, φ — функции, определенные на сетке $x_i = i/n$, $i = 0, \dots, n$, для которых находим из (6)

$$(8) \quad a_1 = \tilde{p}_i - h\tilde{q}_{i,i-1}, \quad d_i = (1/h)(\tilde{q}_{i,i} + \bar{q}_{i,i} + \tilde{q}_{i,i-1} + \tilde{q}_{i+1,i}), \quad \varphi_i = -\tilde{f}_i/h.$$

Как обычно, $y_{\bar{x},i} = (y_i - y_{i-1})/h$, $y_{x,i} = (y_{i+1} - y_i)/h$.

Пусть $z = y - u$. Из (3) и (7) для z получаем краевую задачу

$$(9) \quad (az_{\bar{x}})_x - dz = -\psi, \quad z_0 = z_n = 0,$$

где ψ (см. [1, стр. 165]) можно представить в следующей форме:

$$(10) \quad \psi = \eta_x + \psi^*,$$

$$\eta_i = (au_{\bar{x}})_i - (pu')_{i-1/2},$$

$$(11) \quad \psi_i^* = \left(\varphi_i + \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(t)\,dt\right) - \left(d_i u_i - \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(t)u(t)\,dt\right).$$

В (11) как обычно $x_{i-1/2}=x_i-h/2$, $x_{i+1/2}=x_i+h/2$, $g_{i-1/2}=g(x_{i-1/2})$.

Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $x_i-x_{i-1}=h$, $x_{i-1/2}=x_i-h/2$, $x_{i+1/2}=x_i+h/2$, то

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt-f_{i-1/2}\right|\leq(1/2)\,\omega_2(f,\ x_{i-1/2};h/2).$$

Доказательство непосредственно. Заметим, что аналогичным образом можно показать, что $|(f_i-f_{i-1})/h-f'_{i-1/2}|\leq(1/2)\,\omega_2(f',\ x_{i-1/2};\ h/2)$.

Лемма 2. *Если* $c=\bar{p}-(h^2/6)\|q\|_c>0$, *то решение* z *задачи* (9) — (11) *удовлетворяет неравенству*

$$\|z\|_{c,h}=\max_{0\leq i\leq n}|z_i|\leq(2/c)\sum_{i=1}^{n}h(\eta_i+\psi_i^*).$$

Доказательство следует непосредственно как и в [1, стр. 168] имея в виду, что

$$a_i=\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}p(t)\,dt-h\int_{x_{i-1}}^{x_i}q(x)\,\varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x)dx$$

$$\geq\bar{p}-h\|q\|_c\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_{i-1}(x)\,\varphi_i(x)\,dx=\bar{p}-h^2\|q\|_c/6=c>0.$$

Лемма 3. *Пусть* z — *решение задачи* (9) — (11) *при* $c=\bar{p}-h^2\|q\|_c/6>0$ *и*

(12) $$|\eta_i|\leq c_1\,\omega_k(f,\ x_i;\ h)+c_2,\quad|\psi_i^*|\leq c_3\omega_k(\varphi,\ x_i;\ h)+c_4.$$

Тогда $\|z\|_{c,h}\leq(2/c)\,(c_1\,\tau_k(f;\ 3h)+c_3\,\tau_k(\varphi;\ 3h)+c_2+c_4)$.

Доказательство. Из оценки для $|\eta_i|$ и $|\psi_i^*|$ и леммы 2 следует

$$\|z\|_{c,h}\leq(2/c)\,(c_1\sum_{i=1}^{n}h\,\omega_k(f,\ x_i;\ h)+c_3\sum_{i=1}^{n}h\,\omega_k(\varphi,\ x_i;\ h)+c_2+c_4)$$

$$=(2/c)\,(c_1\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\omega_k(f,x_i;h)\,dx+c_3\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\omega_k(\varphi,\ x_i;\ h)\,dx+c_2+c_4)$$

$$\leq(2/c)\,(c_1\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\omega_k(f,x;3h)\,dx+c_3\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\omega_k(\varphi,x;3h)\,dx+c_2+c_4)$$

$$=(2/c)\,(c_1\,\tau_k(f;\ 3h)+c_3\,\tau_k(\varphi;\ 3h)+c_2+c_4),$$

что и требовалось доказать.

Получим теперь для $|\eta_i|$ и $|\psi_i^*|$ оценки типа (12). Из (11) при помощи леммы 1 получим

$$|\eta_i|=\left|\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}p(t)\,dt\cdot\frac{u_i-u_{i-1}}{h}-p_{i-1/2}u'_{i-1/2}+p_{i-1/2}\frac{u_i-u_{i-1}}{h}-p_{i-1/2}\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right.$$

$$\left.-(u_i-u_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}q(x)\,\varphi_{i-1}(x)\,\varphi_i(x)\,dx\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left| p_{i-1/2}\left(\frac{u_i-u_{i-1}}{h}-u'_{i-1/2}\right)\right| + \left|\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\cdot\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(p(t)-p_{i-1/2})\,dt\right| \\
&\quad + \left| hu'(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)\varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x)\,dt\right| \qquad (13)\\
&\leq 1/2\,\|p\|_c\,\omega_2(u',\ x_{i-1/2};\ h/2) + 1/2\,\|u'\|_c\,\omega_2(p,\ x_{i-1/2};\ h/2) + \|u'\|_c\,\|q\|_c\,h^2/6.
\end{aligned}
$$

Аналогично, используя, что $\|\varphi_i\|_c \leqq 1$ и $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(t)\,dt = h$, получим

$$
\begin{aligned}
&\left|\varphi_i - \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(t)\,dt\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(t)\varphi_i(t)\,dt + f_i - f_i\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}(f(t)-f_i)\,dt\right| + \left|\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(f(t)\varphi_i(t)-\varphi_i(t)f_i)\,dt\right| \qquad (14)\\
&\leqq 1/2\,\omega_2(f,\ x_i;\ h/2) + \frac{1}{h}\,\|\varphi_i\|_c\left|\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(f(t)-f_i)\,dt\right| \leqq 3/2\,\omega_2(f,\ x_i,\ h).
\end{aligned}
$$

Кроме того,

$$
\begin{aligned}
&\left| d_i u_i - \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x)\,dx\right| \\
&= \left| u_i\left(\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)\varphi_i^2(x)\,dx + \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)\varphi_i^2(x)\,dx + \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)\varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x)dx\right.\right. \qquad (15)\\
&\quad \left.\left. + \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)\varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)dx\right) - \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x)\,dx\right| \\
&= \left|\frac{u_i}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q(x)\left[\bar{\varphi}_i^2(x) + \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x) + \varphi_i^2(x) + \varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x)\right]dx\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x)\,dx + q_i u_i - q_i u_i\right|,
\end{aligned}
$$

где

$$
\bar{\varphi}_i(x) = \begin{cases} \varphi_i(x), & x \in [x_{i-1},\ x_i], \\ 0, & x \bar{\in} [x_{i-1},\ x_i]. \end{cases}
$$

При помощи леммы 1 и имея в виду, что

$$
\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\bar{\varphi}_i^2(x) + \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x) + \bar{\varphi}_i^2(x) + \varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x))\,dx = h,
$$

$$
\max_{x\in[x_{i-1},x_{i+1}]} \left|\bar{\varphi}_i^2(x) + \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x) + \bar{\varphi}_i^2(x) + \varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x)\right| \leqq 2,
$$

из (15) следует

$$\left| d_i\ u_i - \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\, u(x)\, dx \right|$$

$$\leq \left| \frac{u_i}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (q(x)-q_i)(\varphi_i^2+1)+\varphi_i(x)\,\varphi_{i+1}(x)+\varphi_i^2(x)+\varphi_{i-1}(x)\,\varphi_i(x)\,dx \right|$$

$$+\left| \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,u(x)\,dx-q_i\,u_i \right| \leq 4\,\|u\|_c\,\omega_2(q,\ x_i;\ h)$$

(16)

$$+\left| \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x)\,(q(x)-q_i)\,dx\right| + \left| \frac{q_i}{h}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (u_i-u_i(x))\,dx \right|$$

$$\leq 4\,\|u\|_c\,\omega_2(q,\ x_i;\ h)+1/2\,\|u\|_c\,\omega_2(q,\ x_i;\ h)+1/2\,\|q\|_c\,\omega_2(u,\ x_i,\ h/2)$$

$$=9/2\,\|u\|_c\,\omega_2(q,\ x_i;\ h)+1/2\,\|q\|_c\,\omega_2(u,\ x_i;h/)+h\,\|u'\|_c\,\omega(q,x_i;\ h).$$

Теперь, комбинируя (13), (14) и (16), при помощи леммы 3 получим:

Теорема 1. *Пусть u — решение задачи* (3), *а y — решение задачи* (7), (8) *при $c=\bar{p}-h^2\,\|q\|_c/6>0$. Тогда*

$$\|u-y\|_{c,h}=\max_{0\leq i\leq h}|u_i-y_i|$$

$$\leq \frac{2}{c}\{1/4\,\|u\|_c\,\tau_2(p;\ h)_L+1/2\,\|p\|_c\,\tau_2(u';\ h)+3/2\,\tau_2(f,\ 2h)+9/2\,\|u\|_c\,\tau_2(q;\ 2h)$$

$$+1/2\,\|q\|_c\tau_2(u;\ h)_L+h\,\|u'\|\,c^{\tau}(q;\ 3\,h)\ +\|u'\|_c\,\|q\|_c\,.\ \frac{h^2}{6}\}.$$

Из этой теоремы и (2) можно получить

Следствие 1. *Если* $\bigvee\limits_0^1 p<\infty,\ \bigvee\limits_0^1 q<\infty,\ \bigvee\limits_0^1 f<\infty$, *то*

$$\|u-y\|_{c,h}=O(h).$$

Следствие 2. *Если* $\bigvee\limits_0^1 p'<\infty,\ \bigvee\limits_0^1 q'<\infty,\ \bigvee\limits_0^1 f'<\infty$, *то*

$$\|u-y\|_{c,h}=O(h^2).$$

Пусть L — полином первой степени такой, что

$$L(x_{i-1})=u_i-y_i,$$
$$L(x_i)=u_{i+1}-y_{i+1}.$$

По теореме Уитни [7]

$$\max_{x\in[x_i,\,x_{i+1}]}|L(x)-(u(x)-y(x))|\leq\omega_2(u-y,\ x_{i+1/2};h/2)$$

и так как $y(x)$ линейна в $[x_i,\ x_{i+1}]$, то

$$\max_{x\in[x_i,-x_{i+1}]}|L(x)-(u(x)-y(x))|\leq\omega_2(u,\ x_{i+1/2};\ h/2)\leq 2h^2\,\|u''\|_c. \tag{17}$$

С другой стороны, согласно теореме 1

$$\max_{x\in[x_i,\,x_{i+1}]}|L(x)|=\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\left|\frac{x-x_i}{h}(y_{i+1}-u_{i+1})+\frac{x_{i+1}-x}{h}(y_i-u_i)\right|$$

$$(18)\qquad \leq\max_{x\in[x_i,\,x_{i+1}]}\left|\frac{x-x_i}{h}+\frac{x_{i+1}-x}{h}\right|\,\|y-u\|_{c,h}=\|y-u\|_{c,h},\; i=1,\,2,\,\ldots,\,n-1.$$

Из (17) и (18) находим оценку

$$\max_{x\in[x_i,\,x_{i+1}]}|u(x)-y(x)|\leq\max_{x\in[x_i\,x_{i+1}]}|u(x)-y(x)-L(x)|+\max_{x\in[x_i,\,x_{i+1}]}|L(x)|$$

$$\leq 2h^2\|u''\|_c+\|y-u\|_{c,h},\; i=1,\,2,\ldots,n-1.$$

Последний результат можно сформулировать в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть u — решение задачи* (3), *а y определяется из* (4), *где коэффициенты $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ находится как решение задачи* (7), (8) *при условии $c=\bar{p}-h^2\|q\|_c/6>0$. Тогда*

$$\|u-y\|_c\leq\|y-u\|_{c,h}+2h^2\|u''\|_c.$$

Из этой теоремы и (2) можно получить непосредственно

Следствие 3. *Если* $\bigvee_0^1 p<\infty,\ \bigvee_0^1 q<\infty,\ \bigvee_0^1 f<\infty$, *то*

$$\|u-y\|_c=O(h).$$

Следствие 4. *Если* $\bigvee_0^1 p'<\infty,\ \bigvee_0^1 q'<\infty,\ \bigvee_0^1 f'<\infty$, *то*

$$\|u-y\|_c=O(h^2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Самарский. Теория разностных схем. Москва, 1977.
2. Г. Стренг, Дж. Фикс. Теория метода конечных элементов. Москва, 1977.
3. Бл. Сендов, В. Попов. Числени методи, II. София, 1978.
4. Г. И. Марчук. Методы вычислительной математики. Новосибирск, 1973.
5. Bl. Sendov, V. A. Popov. Steckin's type theorems for onesided trigonometrical and spline approximation. *C. R. Acad. Sci. Bulg.*, 31, 1978, 151—154.
6. Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов. О приближениях функций в хаусдорфовой метрике кусочно-монотонными функц. . *Мат. сб.*, 101, 1976, 508—531.
7. H. Whitney. On functions with bounded n^{th} differences. *J. Math. pures et appl.*, 36, 1957, 64—95.
8. А. С. Андреев, В. А. Попов, Бл. Х. Сендов. Оценки погрешности численных решений обыкновенных дифференциальных уравнений. *Доклады БАН* (в печати).

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 25. 4. 1979