Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

О ЧИСЛЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ГРАФА

НИКОЛА Й. МАРТИНОВ

Через $\varphi(n, s, q)$ обозначается число q-клик s-цветного графа Турана с n вершинами. Проведены некоторые исследования функции φ и, используя их, получено новое доказательство теоремы Турана — Романа о числе q-клик графа. Излагается и обобщение этой теоремы для случая $q=3$.

Будем рассматривать конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер. Будем придерживаться терминологии и обозначений Ф. Харари [1], за исключением случаев, для которых даем соответствующие определения. Если q — натуральное число, то q-кликой графа Γ будем называть каждый полный граф K_q с q вершинами, который является подграфом Γ; через $X_q(\Gamma)$ будем обозначать множество всех q-клик Γ. В частности, через $X_1(\Gamma)$ и $X_2(\Gamma)$ будем обозначать множества соответственно вершин и ребер Γ.

Пусть $n \geqq s \geqq 1$ — натуральные числа и

$$[n/s]=p, \quad n-ps=r. \tag{1}$$

Через $T(n, s)$ будем обозначать s-цветный граф Турана с n вершинами, т. е полный s-дольный граф, r доли которого имеют по $p+1$ вершине, а остальные $s-r$ доли имеют по p вершинам. Очевидно, что n и s определяют $T(n, s)$ однозначно с точностью до изоморфизма и, следовательно, $|X_q(T(n, s))|$ является функцией только n, s и q. Таким образом в области натуральных чисел определена функция $\varphi(n, s, q)=|X_q(T)n, s))|$. Для удобства принимаем еще $\varphi(n, s, 0)=1$.

Туран [2] доказал, что если G — граф с n вершинами, для которого $|X_{s+1}(G)|=0$ (т. е. который не содержит K_{s+1}), то

$$|X_2(G)| \leqq \varphi(n, s, 2), \tag{2}$$

причем равенство достигается только при $G=T(n, s)$. При тех же предположениях Роман [3] доказал, что при произвольном натуральном числе q

$$|X_q(G)| \leqq \varphi(n, s, q), \tag{3}$$

причем и теперь равенство достигается только для $G=T(n, s)$.

В [4] доказано неравенство (2) при более слабых требованиях — только при предположении, что у G есть по крайней мере один порожденный подграф с $\Delta(G)$ вершинами, который не содержит K_s. Здесь, в сочетании с [5], обобщим этот результат для 3-клик (треугольников) графа G; мы дадим и другое доказательство теоремы Романа (неравенства (3)).

Прежде всего мы докажем некоторые вспомогательные утверждения. Для удобства полагаем $0^0=0$.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том. 6, 1980, с. 318—323.

Лемма 1. *Если $n>s\geq 2$ и q — натуральные числа, то при обозначениях* (1) *выполняется* $\varphi(n, s, q)=\varphi(n-1, s, q)+\varphi(n-p-r^\circ, s-1, q-1)$.

Доказательство. Очевидно, что утверждение выполнено для $q=1$. Пусть $q>1$. Фиксируем граф $\Gamma=T(n, s)$ и пусть v — одна из вершин максимального одноцветного класса (из максимальной доли) A графа Γ. Тогда $|A|=p+r^\circ>1$, так как $n>s$. Убираем из Γ вершину v или весь класс A (вместе с инцидентными ребрами), получаем соответственно

$$\Gamma-v=T(n-1, s), \qquad \Gamma-A=T(n-p-r^\circ, s-1). \tag{4}$$

Из первого равенства следует

$$|X_q(\Gamma-v)|=\varphi(n-1, s, q). \tag{5}$$

Но число q-клик Γ, содержащих вершину v, равно числу $(q-1)$-клик $\Gamma-A$, а оно, по второму равенству (4), равно $\varphi(n-p-r^\circ, s-1, q-1)$. Следовательно, $\varphi(n, s, q)=|X_q(\Gamma-v)|+\varphi(n-p-r^\circ, s-1, q-1)$. Отсюда и из (5) вытекает лемма.

Лемма 2. *Пусть $n\geq s\geq 2$, $n\geq d\geq s-1$ и $q\leq s$, $q\leq n$ — натуральные числа; $\alpha=d/(s-1)$ и*

$$\Delta(n, s, d, q)=\varphi(n, s, q)-\varphi(d, s-1, q)-(n-d)\varphi(d, s-1, q-1).$$

Тогда $\Delta(n, s, d, q)\geq 0$; если $\Delta(n, s, d, q)=0$, то либо $q=1$, либо $n-d\in\{[\alpha], [\alpha]+1, \alpha-1\}$.

Доказательство. Мы применим индукцию по числу q. При $q=1$ утверждение очевидно в силе.

Предположим, что $q>1$ и что для любых натуральных чисел n', s', d', для которых $n'\geq s'\geq 2$, $n'\geq d'\geq s'-1$ и $q-1\leq s'$, выполнено

$$\Delta(n', s', d', q-1)\geq 0. \tag{6}$$

Докажем, что $\Delta(n, s, d, q)\geq 0$ и что если $\Delta(n, s, d, q)=0$, то $n-d\in\{[\alpha]$ $[\alpha]+1, \alpha-1\}$, причем для $d\leq n-p-r^\circ$ доказательство выполним прямым способом, а потом, для $d>n-p-r^\circ$, применим индукцию по d. (Здесь p и r вводятся согласно (1)).

Непосредственно проверяется, что при $s=2$ лемма выполнена, поэтому дальше предполагаем $s>2$.

Пусть $d\leq n-p-r^\circ$. Фиксируем графы $\Gamma=T(n, s)$ и $\Gamma_1=T(d, s-1)$. Классы их одноцветных вершин обозначаем через $A_0, A_1, \ldots, A_{s-1}$ и. $B_1, \ldots, B_{s-1}$ таким образом, что $|A_0|\geq|A_1|\geq\ldots\geq|A_{s-1}|$ и $|B_1|\geq\ldots\geq|B_{s-1}|$. Тогда $|A_0|=p+r^\circ\leq n-d$ и, следовательно, $|A_k|\geq|B_k|$, $k=1, 2, \ldots, s-1$. На основании этого предполагаем, что $A_k\supseteq B_k$, т. е. что Γ_1 является подграфом Γ. Оценим число тех q-клик Γ, которые не принадлежат Γ_1.

Пусть $M\in V=X_1(\Gamma)\setminus X_1(\Gamma_1)$. Через $X_q[M]$ обозначаем множество q-клик графа Γ, для которых M — вершина, а остальные их вершины принадлежат $A_0\cup X_1(\Gamma_1)$.

1. Пусть $d=n-p-r^\circ$. Тогда $V=A_0$ и, следовательно, все вершины q-клик $X_q[M]$, кроме M, принадлежат $X_1(\Gamma_1)$. Следовательно, будет выполнено $|X_q[M]|=|X_{q-1}(\Gamma_1)|=\varphi(d, s-1, q-1)$. Отсюда вытекает, что

$$|X_q(\Gamma)\setminus X_q(\Gamma_1)|=\sum_{M\in V}|X_q[M]|=(n-d)\varphi(d, s-1, q-1).$$

Таким образом получаем, что в этом подслучае $\Delta(n, s, d, q)=0$. Но из условия $d=n-p-r^{\circ}$ следует, что $p=[\alpha]$, а оттуда — что $n-d\in\{[\alpha], [\alpha]+1\}$.

2. Пусть $d<n-p-r^{\circ}$. Теперь у V есть вершины вне A_0, т. е. для некоторого k выполнено $A_k\setminus B_k\neq\varnothing$. Если $M'\in A_k\setminus B_k$, то остальные вершины q-клик из $X_q[M']$ будут из $A_0\cup X_1(\Gamma_1)\setminus B_k$. Отсюда, принимая, что $|A_0|>|B_k|$, заключаем, что

$$(9)\qquad |X_q[M']|>|X_{q-1}(\Gamma_1)|=\varphi(d, s-1, q-1).$$

Но для каждых двух различных точек M_1 и M_2 из V выполнено $X_q[M_1]\cap X_q[M_2]=\varnothing$. Отсюда и из (9) следует

$$|X_q(\Gamma)\setminus X_q(\Gamma_1)|\geqq\sum_{M\in V}|X_q[M]|>(n-d)\varphi(d, s-1, q-1).$$

Следовательно в этом подслучае $\Delta(n, s, d, q)>0$.

Как мы уже указали, для доказательства утверждения при $d>n-p-r^{\circ}$ применим индукцию по d. Предполагаем, что

$$(10)\qquad d>n-p-r^{\circ},$$

$$(11)\qquad \Delta(n, s, d-1, q)\geq 0.$$

По лемме 1,

$$\varphi(d, s-1, q)=\varphi(d-1, s-1, q)+\varphi(d-p_1-r_1^0, s-2, q-1),$$

$$\varphi(d, s-1, q-1)=\varphi(d-1, s-1, q-1)+\varphi(d-p_1-r_1^0, s-2, q-2),$$

где $p_1=[\alpha]$, $r_1=d-p_1(s-1)$. Отсюда получаем

$$(12)\quad \Delta(n, s, d, q)=\varphi(n, s, q)-\varphi(d-1, s-1, q)-(n-d+1)\varphi(d-1, s-1, q-1)$$
$$+\varphi(d-1, s-1, q-1)-\varphi(d-p_1-r_1^0, s-2, q-1)-(n-d)\varphi(d-p_1-r_1^0, s-2, q-2).$$

Из (10) следует, что либо $p_1>p$, либо $p_1=p$ и $r\geq 1$, т. е. что $p_1+r_1^0\geqq p+r^0$. Следовательно $d-1\geqq n-p-r^0\geqq n-p_1-r_1^0$. Отсюда вытекает

$$(13)\qquad \varphi(d-1, s-1, q-1)\geqq\varphi(n-p_1-r_1^0, s-1, q-1).$$

(Когда $n-p_1-r_1^0<s-1$, правая часть неравенства (13) теряет смысл, но тогда $d=n=s$ и лемма очевидно выполнена) В (13) равенство достигается только тогда, когда $d-1=n-p_1-r_1^0$, т. е. когда

$$(14)\qquad n-d\in\{[\alpha], \alpha-1\}.$$

Из (12) и (13) получается

$$\Delta(n, s, d, q)\geq\Delta(n, s, d-1, q)+\Delta(n-p_1-r_1^0, s-1, d-p_1-r_1^0, q-1).$$

Из этого неравенства и предположений (6) и (11) вытекает, что $\Delta(n, s, d, q)\geqq 0$. Из $\Delta(n, s, d, q)=0$ следует равенство в (13), а оттуда и выполнение (14). Этим лемма доказана. Легко сообразить, что лемма остается верной и без предположения $n\geq d$, но это дальше не используется.

Теорема 1. *Пусть G — граф с n вершинами. Если G не содержит $K_{s+1}(s\leqq n)$, то для любого натурального числа q, $1<q\leq s$, выполнено $|X_q(G)|\leq\varphi(n, s, q)$, причем равенство достигается только при $G=T(n, s)$.*

Доказательство. Применим индукцию по числу n. Очевидно, что утверждение справедливо при $n=2$. Мы предполагаем, что $n>2$ и что утверждение выполнено для каждого графа с числом вершин, меньшим чем n. Легко проверить, что утверждение выполняется для $s=n$; оно выполнено и при $s=2$, являясь частным случаем теоремы Турана [2, 4]. Поэтому дальше предполагаем $n>s>2$. С другой стороны, из леммы 2 следует, что $\varphi(n, s, q)$ строго возрастает вместе с s при $n>s\geqq q\geqq 2$. Используя это обстоятельство, можно легко убедиться, что доказательство теоремы при ограничении $s\leqq \Delta(G)+1$ обеспечивает ее верность и вне этого ограничения. Поэтому будем предполагать еще $s\leqq \Delta(G)+1$ (и $\Delta(G)\geqq 2$).

Пусть G_0 — подграф G, порожденный вершинами, смежными с некоторой вершиной M_0 максимальной степени. Тогда $|X_1(G_0)|=\Delta(G)=d$ и G_0 не содержит K_s. Пусть $V=X_1(G)\setminus X_1(G_0)$; для любого M из V обозначим через $x_p(M)$ число p-клик подграфа G_M графа G, который порожден смежными с M вершинами. Тогда

$$|X_q(G)|\leqq |X_q(G_0)|+\sum_{M\in V} x_{q-1}(M). \tag{15}$$

Согласно предположению выполнено и

$$|X_q(G_0)|\leqq \varphi(d,\ s-1,\ q),\qquad x_{q-1}(M)\leqq \varphi(d,\ s-1,\ q-1). \tag{16}$$

(конечно, используем, что при $q=s$ имеет место равенство $|X_q(G_0)|=0$). Используя неравенства (15) и (16) и применяя лемму 2, получаем

$$|X_q(G)|\leqq \varphi(d,\ s-1,\ q)+(n-d)\varphi(d,\ s-1,\ q-1)\leqq \varphi(n,\ s,\ q).$$

Пусть $|X_q(G)|=\varphi(n,\ s,\ q)$. Тогда (15) и (16) будут выполняться с равенством. Из $|X_{q-1}(G_0)|=x_{q-1}(M_0)=\varphi(d,\ s-1,\ q-1)$ следует по предположению, что $G_0=T(d,\ s-1)$ (для $q=2$ это следует из равенства $|X_q(G_0)|=\varphi(d,\ s-1,\ q)$). Из $x_{q-1}(M)=\varphi(d,\ s-1,\ q-1)$ получается, что M — вершина максимальной степени d и $G_M=T(d,\ s-1)$ при $q>2$. Тогда равенство в (15) означает, что никакие две вершины из V не являются смежными. Согласно лемме 2 выполнено $|V|=n-d\in\{[d/(s-1)],\ [d/(s-1)]+1,\ [d/(s-1)]-1\}$. Это означает, что $G=T(d,\ s-1)+\bar{K}_{n-d}=T(n,\ s)$. Этим теорема доказана.

Лемма 3. *Если $n\geqq s\geqq 2$ и $m\leqq n-s$ — натуральные числа и введем обозначения* (1), *то* $\varphi(n,\ s,\ 2)-\varphi(n-m,\ s,\ 2)\geqq m(n-p)-\binom{m+1}{2}$.

Доказательство. Фиксируем графы $\Gamma=T(n,\ s)$ и $\Gamma_1=T(n-m,\ s)$. Очевидно мы можем предполагать, что Γ_1 — подграф Γ. Тогда, если $V=X_1(\Gamma)\setminus X_1(\Gamma_1)$, а Γ_2 — порожденный V подграф Γ, то имеет место

$$|X_2(\Gamma)\setminus X_2(\Gamma_1)|=\sum_{M\in V} x_2(M)-|X_2(\Gamma_2)|,$$

где $x_2(M)$ — число тех ребер Γ, которые инцидентны вершине M. Отсюда, принимая, что $x_2(M)\geqq n-p-1$ и $|X_2(\Gamma_2)|\leqq\binom{m}{2}$, получаем лемму.

Теорема 2. *Пусть G — граф с $n>2$ вершинами и у G есть порожденный подграф G_0 с $d=\Delta(G)$ вершинами, который не содержит K_s, где $3\leqq s\leqq n$. Тогда* $|X_3(G)|\leqq\varphi(n,\ s,\ 3)$.

Доказательство. Без ограничения, как при теореме 1, можем предполагать, что s не превосходит $d+1$ (и что $d\geq 2$). Сначала мы докажем

$$|X_3(G)|\leq|X_3(G_0)|+(n-d)\varphi(d,\ s-1,\ 2). \tag{17}$$

Пусть $V=X_1(G)\setminus X_1(G_0)$. При $M\in V$ обозначим через $\alpha_i(M)$ число тех 3-клик G, у которых есть по i вершин в V, причем одна из этих вершин — M. Тогда

$$|X_3(G)|=|X_3(G_0)|+\sum_{M\in V}\left(\alpha_1(M)+\frac{1}{2}\alpha_2(M)+\frac{1}{3}\alpha_3(M)\right).$$

Отсюда, принимая, что $|V|=n-d$, заключаем, что (17) будет выполняться, если для каждой вершины $M\in V$ выполнено

$$\alpha_1(M)+\frac{1}{2}\alpha_2(M)+\frac{1}{3}\alpha_3(M)\leq\varphi(d,\ s-1,\ 2). \tag{17'}$$

Пусть m — число ребер из $G-X_1(G_0)$, инцидентных вершине M. Пусть еще V_1 — множество вершин из $X_1(G_0)$, смежных вершине M, а G_1 — порожденный V_1 подграф G. Тогда $\alpha_1(M)=|X_2(G_1)|$, $|V_1|\leq d-m$ и если $d-m\geq 2$, то согласно теореме 1 получаем

$$\alpha_1(M)\leq\varphi(d-m,\ s_1,\ 2),\qquad s_1=\min(d-m,\ s-1) \tag{18}$$

(конечно, если $d-m<2$, то $\alpha_1(M)=0$). Очевидно в силе и

$$\alpha_2(M)\leq m(d-m),\qquad \alpha_3(M)\leq\binom{m}{2}. \tag{19}$$

Следовательно (17′) будет выполненным, при $d-m\geq 2$, если

$$\Delta=\varphi(d,\ s-1,\ 2)-\varphi(d-m,\ s_1,\ 2)-\frac{1}{2}m(d-m)-\frac{1}{3}\binom{m}{2}\geq 0. \tag{17''}$$

В случаях $m=0$, $m=d$ и $m=d-1$, используя то обстоятельство, что при обозначениях (1) имеет место формула

$$\varphi(n,\ s,\ 2)=\frac{(n^2-r^2)(s-1)}{2s}+\binom{r}{2}, \tag{20}$$

непосредственным вычислением проверяем (17′). Точнее, если $m=0$, то согласно (19) $\alpha_2(M)=\alpha_3(M)=0$ и из (18) получается (17′). Если $m=d$ или $m=d-1$, то $\alpha_1(M)=0$, и согласно (20) получаем соответственно

$$\varphi(d,\ s-1,\ 2)=\varphi(m,\ s-1,\ 2)\geq\varphi(m,\ 2,\ 2)\geq\frac{m^2-1}{4}>\frac{m(m-1)}{6}$$
$$\geq\frac{1}{3}\alpha_3(M)=\frac{1}{2}\alpha_2(M)+\frac{1}{3}\alpha_3(M),$$

или

$$\varphi(d,\ s-1,\ 2)=\varphi(m+1,\ s-1,\ 2)\geq\varphi(m+1,\ 2,\ 2)\geq\frac{(m+1)^2-1}{4}$$
$$\geq\frac{m^2+2m}{6}\geq\frac{1}{2}\alpha_2(M)+\frac{1}{3}\alpha_3(M).$$

Следовательно во всех трех рассмотренных случаях выполнено (17′). Поэтому дальше предполагаем $d-m\geqq 2$, $m\geqq 1$.

Рассмотрим в отдельности случаи $s=3$ и $s>3$.

1. Пусть $s=3$. Тогда $s_1=2$ и из (20) получаем $\varphi(d, s-1, 2)\geqq(d^2-1)/4$, $\varphi(d-m, s_1, 2)\leqq(d-m)^2/4$. Отсюда, заменяя в (17″), находим $\Delta\geqq(m^2+2m-3)/12\geqq 0$.

2. Пусть $s>3$. Вводим следующие обозначения: $p'=[d/(s-1)]$, $r'=d-p'(s-1)$.

2.1. Пусть $d-m<s$. Тогда $s_1=d-m$ и согласно (20) после соответствующих преобразований получаем

$$\Delta=\frac{1}{6(s-1)}(3r'^2-3d^2+(3d+2md-2m)(s-1)+m(d-m)(s-1)-3r'(s-1)).$$

Но $(3d+2md-2m)(s-1)-3d^2\geqq md$. Следовательно

$$\Delta\geqq(md+m(s-1)(d-m)-3r'(s-1))/6(s-1).$$

Из $d-m\leqq s-1$ и $d-p'(s-1)=r'$ $(p'\geqq 1)$ следует, что $m\geqq r'$. Отсюда получаем $dm\geqq r'(s-1)$ и $m(d-m)\geqq 2r'$. Следовательно, $\Delta\geqq 0$.

2.2. Пусть $d-m\geqq s$. В этом случае $s_1=s-1$. Применяя лемму 3, получаем

$$\varphi(d, s-1, 2)-\varphi(d-m, s-1, 2)\geqq m(d-p')-\binom{m+1}{2}.$$

Отсюда находим

$$\Delta\geqq m(d-p')-\binom{m+1}{2}-\frac{1}{2}m(d-m)-\frac{1}{3}\binom{m}{2}=\frac{m}{6}(3d-6p'-m-2).$$

Используя, что $d\geqq 3p'$ и $d>m+2$, получаем $\Delta>0$. Этим неравенство (17) доказано.

Теперь, применяя теорему 1 для графа G_0, получаем $|X_3(G_0)|\leqq\varphi(d, s-1, 3)$. Отсюда и из (17), согласно лемме 2, получаем

$$|X_3(G)|\leqq\varphi(d, s-1, 3)+(n-d)\varphi(d, s-1, 2)\leqq\varphi(n, s, 3).$$

Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Харари. Теория графов. Москва, 1973.
2. P. Turan. Egy grafelmeleti szelsöertek feladatrol. *Mat. Fiz. Lapok*, **48**, 1941, 436-452.
3. S. Roman. The maximum number of q-cliques in a graph with p-cliques. *Discr. Math.*, **14**, 1976, 365-371.
4. Н. Мартинов. Ново доказателство и обобщение на теоремата на Туран за броя на ръбовете на един граф. *Годишник Соф. унив.*, *Мат. фак.* (под печат).
5. N. Martinov. On maximum number of triangles in a graph. *C. R. Acad. bulg. S ci.* **30**, 1977, 1255-1257.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 15. 9. 1977; в окончательно переработанном виде 7. 3. 1980