

Provided for non-commercial research and educational use.  
Not for reproduction, distribution or commercial use.

# Serdica

## Bulgariacae mathematicae publicationes

---

# Сердика

## Българско математическо списание

---

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.  
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on  
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes  
and its new series Serdica Mathematical Journal  
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>  
or contact: Editorial Office  
Serdica Mathematical Journal  
Institute of Mathematics and Informatics  
Bulgarian Academy of Sciences  
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49  
e-mail: [serdica@math.bas.bg](mailto:serdica@math.bas.bg)

# INVARIANZ VON PUNKTPROZESSEN BEI ZUFÄLLIGEN BEWEGUNGEN I

KARL-HEINZ FICHTER, JOHANNES KERSTAN

Es seien  $P$  ein Punktprozeß und  $R$  ein substochastischer Kern auf einem vollständigen separablen metrischen Raum. Genügt  $P$  gewissen Endlichkeitsbedingungen, so kann man einen neuen Punktprozeß  $P_R$  ableiten, indem man alle Punkte unabhängig voneinander gemäß  $R$  verschiebt. In der vorliegenden Arbeit werden hinreichende und notwendige Bedingungen untersucht, daß für eine Folge substochastischer Kerne  $R_1, R_2, \dots$  und einen Punktprozeß  $P$  die Folge der verschobenen Punktprozesse  $P_{R_1}, P_{R_2}, \dots$  schwach gegen eine Mischung Poissonscher Punktprozesse konvergiert. In diesem Zusammenhang wird auch die Frage beantwortet, wann nur Mischungen Poissonscher Punktprozesse gegenüber einer Verschiebung durch einen substochastischen Kern oder einer Halbgruppe solcher Kerne invariant sind. Insbesondere wird eine Verallgemeinerung der Ergebnisse von Dobrushin (1956) und Stone (1968) erreicht.

**Einleitung.** Es seien  $P$  ein Punktprozeß und  $R$  ein substochastischer Kern auf einem vollständigen separablen metrischen Raum  $E$ . Genügt  $P$  gewissen Endlichkeitsbedingungen, so kann man einen neuen Punktprozeß  $P_R$  ableiten, indem man alle Punkte unabhängig voneinander gemäß  $R$  verschiebt. Es ergeben sich zwei Fragestellungen:

1. Welche Forderungen an  $P$  und an eine Folge substochastischer Kerne  $R_0, R_1, \dots$  müssen gestellt werden, so daß die Folge  $P_{R_0}, P_{R_1}, \dots$  in irgendeinem Sinne konvergiert?

2. Welche Punktprozesse  $P$  sind gegenüber bestimmten Klassen substochastischer Kerne  $R$  invariant ( $P_R = P$ )?

Dobrushin untersuchte in [3] diese Fragestellungen für den Fall  $E = R^1$  und homogener Verschiebungen, d. h., stochastischer Kerne der Gestalt  $R_\alpha(x, B) = \delta_x * \alpha(B)$ , wobei stets ein Verteilungsgesetz auf den reellen Zahlen  $R^1$  ist. Die von ihm erzielten Resultate lassen sich folgendermaßen formulieren.

**Konvergenzsatz.** Seien

a)  $P$  ein Punktprozeß, so daß für eine geeignete Funktion  $f \in L_1(P)$  die Konvergenz

$$\sup_{x \in R^1} \int \left| \frac{\phi([-n+x, n+x])}{2^n} - f(\phi) \right| P(d\phi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

statt hat und

b)  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  eine schwach asymptotisch gleichverteilte Folge von Verteilungsgesetzen auf  $R^1$ .

Dann konvergiert die Folge der Punktprozesse  $P_{R_0}, P_{R_1}, \dots$  schwach gegen eine Mischung stationärer Poissonscher Punktprozesse.

**Struktursatz.** Für einen Punktprozeß  $P$  endlicher Intensität ist genau dann  $P_{R_\alpha} = P$  für alle Verteilungsgesetze  $\alpha$  auf  $R^1$ , wenn  $P$  Mischung stationärer Poissonscher Punktprozesse ist.

Die Voraussetzung b) im Konvergenzsatz ist in gewisser Weise minimal. Stone gelang es nämlich in [9], den Konvergenzsatz von Dobrushin zu der

folgenden Charakterisierung der schwachen asymptotischen Gleichverteilung auszubauen.

**Theorem.** *Eine Folge  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  von Verteilungsgesetzen auf  $R^1$  ist genau dann schwach asymptotisch gleichverteilt, wenn für alle Punktprozesse  $P$  mit der Eigenschaft a) die Folge  $P_{R_{\alpha_0}}, P_{R_{\alpha_1}}, \dots$  schwach gegen eine Mischung stationärer Poissonscher Punktprozesse konvergiert.*

Um sich von der Betrachtung homogener Verschiebungen auf den reellen Zahlen lösen zu können und zu einer Verallgemeinerung der Resultate von Dobrushin zu gelangen, muß man den Begriff der schwach asymptotisch gleichverteilten Folge von Verteilungsgesetzen sachgemäß verallgemeinern. Einen ersten Schritt auf diesem Wege stellen die Untersuchungen in [2] beziehungsweise [5] dar. Der dort entwickelte Gleichverteilungsbegriff für Folgen substochastischer Kerne stellt zwar eine Verallgemeinerung des Begriffs der schwach asymptotischen Gleichverteilung dar, erwies sich jedoch als zu schwach, um eine volle Verallgemeinerung des Konvergenzsatzes zu erreichen. So mußte die Bedingung a) durch eine zusätzliche Beschränktheitsforderung an das Intensitätsmaß von  $P$  verschärft werden.

In [7] wird nun die Rolle sogenannter konvergenzerzeugender Folgen aus bestimmten Halbgruppen substochastischer Kerne untersucht. Wie aus der vorliegenden Arbeit ersichtlich wird, gestattet dieser Begriff eine volle Verallgemeinerung der Resultate von Dobrushin und Stone.

**1. Bezeichnungen.** Es seien  $E$  ein vollständiger separabler metrischer Raum,  $\mathfrak{A}$  die  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen in  $E$  und  $\mathfrak{B}$  das System aller beschränkten Mengen aus  $\mathfrak{A}$ . Mit  $\mathfrak{Q}^{00}$  bezeichnen wir die Menge aller stetigen beschränkten reellen Funktionen auf  $E$  mit beschränktem Träger. Für ein Maß  $\mu$  auf  $\mathfrak{A}$  und jede meßbare, nichtnegative, beziehungsweise  $\mu$ -integrierbare, Funktion  $f$  setzen wir  $\mu * f = \int f(x) \mu(dx)$ . Ist  $R$  ein substochastischer Kern auf  $E$  (siehe [6]), so bezeichnet  $\mu * R$  das durch  $\mu * R(A) = \int R(x, A) \mu(dx)$ ,  $\forall A \in \mathfrak{A}$ , definierte Maß auf  $\mathfrak{A}$ . Weiter setzen wir für jede meßbare, beschränkte Funktion  $f$  auf  $E$ :  $R * f(x) = \int f(y) R(x, dy)$ ,  $\forall x \in E$ . Für zwei substochastische Kerne  $R_1$  und  $R_2$  auf  $E$  bezeichnet  $R_1 * R_2$  den durch  $R_1 * R_2(x, A) = \int R_2(y, A) R_1(x, dy)$ ;  $\forall x \in E$ ,  $\forall A \in \mathfrak{A}$ , definierten substochastischen Kern auf  $E$ .

**2. Punktprozesse.** Bei den in diesem Abschnitt zusammengestellten Begriffen und elementaren Beziehungen verzichten wir auf nähere Erläuterungen und verweisen stattdessen auf die zusammenfassende Darstellung [8]. Wir bezeichnen mit  $N$  die Menge aller Maße auf  $\mathfrak{A}$ , die auf  $\mathfrak{B}$  endlich sind, und mit  $M$  die Menge aller Punktfolgen auf  $E$ , d. h., aller ganzzahligen Maße aus  $N$ .  $\mathfrak{N}$  sei die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $N$ , bezüglich der für jedes  $B \in \mathfrak{B}$  die Abbildung  $\xi_B(\mu) = \mu(B)$ ;  $\forall \mu \in N$  meßbar ist. Ein Verteilungsgesetz auf dem meßbaren Raum  $[N, \mathfrak{N}]$  nennen wir zufälliges Maß. Die Menge aller Punktfolgen  $M$  ist eine meßbare Teilmenge von  $N$  und wird durch die  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \cap M$  zu einem meßbaren Raum ergänzt. Ein Verteilungsgesetz  $P$  auf dem meßbaren Raum  $[M, \mathfrak{M}]$  nennen wir Punktprozeß. Das Intensitätsmaß  $A_P$  von  $P$  ist definiert durch  $A_P(A) = \int \Phi(A) P(d\Phi)$ ;  $\forall A \in \mathfrak{A}$ ,  $P$  ist von endlicher Intensität, wenn  $A_P \in N$  ist. Für jedes  $\mu \in N$  bezeichnen wir mit  $P_{(\mu)}$  den Poissonschen Prozeß mit dem Intensitätsmaß  $\mu$ . Zu jedem zufälligen Maß  $H$  erhalten wir in Gestalt der Mischung  $\int P_{(\mu)} H(d\mu)$  einen Punktprozeß.

Für jede Folge  $B_1, \dots, B_m$  bezeichnen wir mit  $P^{B_1, \dots, B_m}$  das Verteilungsgesetz des zufälligen Vektors  $(\xi_{B_1}, \dots, \xi_{B_m})$  über dem Wahrscheinlichkeitsraum

$[M, \mathfrak{M}, P]$ . Eine Folge  $P_0, P_1, \dots$  von Punktprozessen konvergiert schwach gegen einen Punktprozeß  $P$  endlicher Intensität, wenn für alle Folgen  $B_1, \dots, B_m \in \mathfrak{B}$  paarweise disjunkter  $\mathcal{A}_P$ -Stetigkeitsmengen die Konvergenz der Variationsabstände

$$\|P_n^{B_1, \dots, B_m} - P^{B_1, \dots, B_m}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

statt hat.

Sei nun  $R$  ein substochastischer Kern auf  $E$ . Mit  $M(R)$  bezeichnen wir die Menge aller  $\Phi \in M$  mit  $\Phi * R \in N$ . Gilt für einen Punktprozeß  $P$

$$(1) \quad P(M(R)) = 1,$$

so kann man den verschobenen Punktprozeß  $P_R$  konstruieren, indem man, anschaulich gesprochen, alle Punkte von  $P$  unabhängig voneinander gemäß  $R$  verschiebt (siehe auch [6]). Für die Forderung (1) ist hinreichend, daß  $\mathcal{A}_P * R \in N$  ist.

**3. Verschiebungshalbgruppen.** Unter einer Verschiebungshalbgruppe verstehen wir eine Familie substochastischer Kerne  $\mathfrak{R}$  auf  $E$  mit folgenden Eigenschaften:

(V1)  $\mathfrak{R}$  enthält den Kern  $I$ , definiert durch  $I(x, A) = \delta_x(A)$ ;  $\forall x \in E, \forall A \in \mathfrak{A}$ .

(V2) Für alle  $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}$  ist  $R_1 * R_2 \in \mathfrak{R}$ .

(V3) Für alle  $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}$  gilt:  $R_1 * R_2 = R_2 * R_1$ .

In [7] werden solche Verschiebungshalbgruppen untersucht. Wir wollen in diesem Abschnitt nur die für das Weitere wesentlichen Begriffe zusammenstellen. Ein Maß  $\mu \in N$  heißt  $\mathfrak{R}$ -invariant, wenn gilt:  $\mu * R = \mu$ ;  $\forall R \in \mathfrak{R}$ . Um eine Abschwächung dieses Invarianzbegriffes einführen zu können, benötigen wir einen Beschränktheitsbegriff für Maße. Wir sagen, daß ein Maß  $\mu$  auf  $\mathfrak{A}$   $\mathfrak{R}$ -beschränkt ist, wenn gilt:  $\sup_{R \in \mathfrak{R}} \mu * R(B) < \infty$ ;  $\forall B \in \mathfrak{B}$  weil stets  $\mu * I = \mu$  ist, muß jedes  $\mathfrak{R}$ -beschränkte Maß in  $N$  liegen.

Ein  $\mathfrak{R}$ -beschränktes Maß  $\mu$  ist  $\mathfrak{R}$ -praeinvariant, wenn ein  $\mathfrak{R}$ -invariantes Maß  $[\mu]$  existiert mit

$$\inf_{R' \in \mathfrak{R}} \sup_{R \in \mathfrak{R}} |\mu * R' * R * f - [\mu] * f| = 0; \quad \forall f \in \mathcal{Q}^{00}$$

Offensichtlich ist jedes  $\mathfrak{R}$ -invariante Maß auch  $\mathfrak{R}$ -praeinvariant. Unter einer konvergenzerzeugenden Folge aus  $\mathfrak{R}$  (kurz: K-Folge) verstehen wir eine Folge  $R_0, R_1, \dots \in \mathfrak{R}$  dergestalt, daß für jedes  $\mathfrak{R}$ -praeinvariante Maß  $\mu$  und alle  $f \in \mathcal{Q}^{00}$  die Konvergenz

$$|\mu * R_n * f - [\mu] * f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

statt hat.

Für unsere Untersuchungen sind einige Spezialisierungen für die Verschiebungshalbgruppe  $\mathfrak{R}$  notwendig, die teils inhaltlich und teils beweistechnisch begründet sind. Wir führen dazu die folgenden Begriffe ein:

$\mathfrak{R}$  heißt flüchtig, wenn es keine  $\mathfrak{R}$ -invarianten Verteilungsgesetze gibt.

$\mathfrak{R}$  heißt mischend, wenn für jedes  $\mathfrak{R}$ -invariante Maß  $\mu$ , alle  $R_0 \in \mathfrak{R}$  und alle  $B \in \mathfrak{B}$  gilt:

$$\inf_{R \in \mathfrak{R}} \int |R(x, B) - R * R_0(x, B)| \mu(dx) = 0.$$

$\mathfrak{R}$  heißt stetig, wenn für alle  $R \in \mathfrak{R}$  und alle stetigen und beschränkten Funktionen  $f$  auf  $E$  auch  $R * f$  eine stetige und beschränkte Funktion ist.

$\mathfrak{B}$  heißt separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge  $\mathfrak{Q}$  von  $\mathfrak{B}$  gibt, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(S1) Für jedes  $\mathfrak{B}$ -praeinvariante Maß  $\mu$  und alle  $f \in \mathcal{Q}^{00}$  gilt:

$$\inf_{Q \in \mathfrak{Q}} \sup_{R \in \mathfrak{B}} |\mu * Q * R * f - [\mu] * f| = 0.$$

(S2) Jedes  $\mu \in \mathcal{N}$  mit  $\mu * Q = \mu$ ;  $\forall Q \in \mathfrak{Q}$ , ist  $\mathfrak{B}$ -invariant.

**4. Praeinvariante Punktprozesse.** In diesem Abschnitt sei stets  $\mathfrak{B}$  eine stetige, separable, flüchtige und mischende Verschiebungshalbgruppe. Ein Punktprozeß  $P$  heißt  $\mathfrak{B}$ -invariant, wenn  $P(M(R))=1$ ;  $\forall R \in \mathfrak{B}$  und  $P_R = P$  für alle  $R \in \mathfrak{B}$  ist. Weil stets  $A_{P_R} = A_P * R$  ist, erkennt man leicht die Gültigkeit der folgenden Beziehung.

4.1. Jeder  $\mathfrak{B}$ -invariante Punktprozeß endlicher Intensität besitzt ein  $\mathfrak{B}$ -invariantes Intensitätsmaß.

Es sei nun  $P$  ein Punktprozeß mit einem  $\mathfrak{B}$ -beschränkten Intensitätsmaß.  $P$  heißt  $\mathfrak{B}$ -praeinvariant, wenn eine auf  $M \times \mathfrak{A}$  definierte reelle Funktion  $\kappa(\Phi, B)$  existiert, die für alle  $B \in \mathfrak{B}$  eine meßbare  $P$ -integrierbare Funktion auf  $M$  und für alle  $\Phi \in M$  ein  $\mathfrak{B}$ -invariantes Maß auf  $\mathfrak{A}$  darstellt, so daß gilt:

(2) 
$$\inf_{R' \in \mathfrak{B}} \sup_{R \in \mathfrak{B}} \int \Phi * R' * R * f - \kappa(\Phi, \cdot) * f \ P(d\Phi) = 0; \quad \forall f \in \mathcal{Q}^{00}.$$

Schränkt man sich auf die Betrachtung von Punktprozessen endlicher Intensität ein, so ist der Begriff der Praeinvarianz eine Abschwächung des Invarianzbegriffes, d. h., es gilt die folgende Beziehung:

4.2. Jeder  $\mathfrak{B}$ -invariante Punktprozeß endlicher Intensität ist  $\mathfrak{B}$ -praeinvariant.

Den Beweis von 4.2. werden wir im 8. Abschnitt der Arbeit führen. Dort beweisen wir auch die folgende Beziehung, aus der eine Charakterisierung der praeinvarianten Punktprozesse ersichtlich wird.

4.3. Es seien  $P$  ein Punktprozeß mit  $\mathfrak{B}$ -beschränktem Intensitätsmaß und  $\kappa(\Phi, B)$  eine auf  $M \times \mathfrak{A}$  definierte Funktion, die für alle  $B \in \mathfrak{B}$  eine meßbare,  $P$ -integrierbare Funktion auf  $M$  und für alle  $\Phi \in M$  ein  $\mathfrak{B}$ -invariantes Maß auf  $\mathfrak{A}$  darstellt. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

(p1) für alle  $f \in \mathcal{Q}^{00}$  ist

$$\inf_{R' \in \mathfrak{B}} \sup_{R \in \mathfrak{B}} \int |\Phi * R' * R * f - \kappa(\Phi, \cdot) * f| \ P(d\Phi) = 0$$

(p2) Für jede  $K$ -Folge  $R_0, R_1, \dots$  und alle  $A \in \mathfrak{B}$  mit  $\int \kappa(\Phi, \partial B) \ P(d\Phi) = 0$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\Phi * R_n(B) - \kappa(\Phi, B)| \ P(d\Phi) = 0.$$

Ist  $P$  ein  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianter Punktprozeß mit (2), dann haben wir in  $\mu_{P, \kappa}$ , definiert durch  $\mu_{P, \kappa}(A) = \int \kappa(\Phi, A) \ P(d\Phi)$ ;  $\forall A \in \mathfrak{A}$  ein  $\mathfrak{B}$ -invariantes Maß mit

$$\inf_{R' \in \mathfrak{B}} \sup_{R \in \mathfrak{B}} |A_{P * R' * R * f} - \mu_{P, \kappa} * f| = 0; \quad \forall f \in \mathcal{Q}^{00}.$$

Es gilt deshalb folgende Beziehung.

4.4. Jeder  $\mathfrak{B}$ -praeinvariante Punktprozeß besitzt ein  $\mathfrak{B}$ -praeinvariantes Intensitätsmaß.

Schränkt man sich auf die Betrachtung Poissonscher Punktprozesse ein, so ist 4.4. umkehrbar, d. h., wir erhalten zusammenfassend:

4.5. Sei  $P$  ein Poissonscher Punktprozeß.  $P$  ist genau dann  $\mathfrak{B}$ -praeinvariant, wenn  $A_P$  ein  $\mathfrak{B}$ -praeinvariantes Maß ist.

Beweis. Wegen 4.3. und 4.4. genügt es zum Beweis von 4.5. zu zeigen, daß ein  $\mathfrak{B}$ -invariantes Maß  $\mu$  existiert mit

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int |\Phi * R_n(B) - \mu(B)| P(d\Phi) = 0$$

für alle  $K$ -Folgen  $R_0, R_1, \dots$  und alle  $\mu$ -Stetigkeitsmengen  $B \in \mathfrak{B}$ , wenn  $A_P$  ein  $\mathfrak{B}$ -praeinvariantes Maß ist. Sei dazu  $R_0, R_1, \dots$  eine  $K$ -Folge und  $A_P$  ein  $\mathfrak{B}$ -praeinvariantes Maß. Wegen Theorem 1 in [7] erhalten wir dann für alle  $[A_P]$ -Stetigkeitsmengen  $B \in \mathfrak{B}[A_P](B) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_P * R_n(B)$ . Weiter gilt nach Theorem 2 aus [7]  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int (R_n(x, B))^2 A_P(dx) = 0; \quad \forall B \in \mathfrak{B}$ .

Da schließlich die  $[A_P]$ -Stetigkeitsmengen aus  $\mathfrak{B}$  einen Halbring bilden, können wir unter Verwendung von unter Theorem 4 aus [6] auf die Gültigkeit von (3) für  $\mu = [A_P]$  und alle  $[A_P]$ -Stetigkeitsmengen  $B \in \mathfrak{B}$  schließen. Damit ist 4.4. bewiesen.

**5. Konvergenzsätze.** In diesem Abschnitt seien wieder  $\mathfrak{B}$  eine separable, stetige, flüchtige und mischende Verschiebungshalbgruppe. Unter einer  $\mathfrak{B}$ -Mischung verstehen wir eine Mischung Poissonscher Prozesse  $\int P_{(\mu)} H(d\mu)$ , wobei die Menge der  $\mathfrak{B}$ -invarianten Maße bezüglich  $H$  das Maß Eins hat. Bei dieser Begriffsbildung muß man wissen, daß die Menge der  $\mathfrak{B}$ -invarianten Maße eine meßbare Teilmenge von  $N$  ist. Das erkennt man jedoch leicht, wenn man berücksichtigt, das  $\mathfrak{A}$  abzählbar erzeugt und damit für jedes  $R \in \mathfrak{B}$  die Menge aller  $\mu \in N$  mit  $\mu * R = \mu$  meßbar ist, und sich andererseits die Menge aller  $\mathfrak{B}$ -invarianten Maße wegen der Separabilität von  $\mathfrak{B}$  als Durchschnitt von abzählbar vielen solcher Mengen darstellen läßt.

Wie wir später sehen werden, fallen die  $\mathfrak{B}$ -invarianten Punktprozesse endlicher Intensität mit den  $\mathfrak{B}$ -Mischungen endlicher Intensität zusammen. Der Beweis der Beziehung stützt sich wesentlich auf den folgenden Konvergenzsatz.

**Theorem 1.** Ist  $P$  ein  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianter Punktprozeß und  $R_0, R_1, \dots$  eine  $K$ -Folge, dann konvergiert die Folge der Punktprozesse  $P_{R_0}, P_{R_1}, \dots$  schwach gegen eine  $\mathfrak{B}$ -Mischung.

Beweis. Sei  $P$  ein  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianter Punktprozeß mit (2) und  $R_0, R_1, \dots$  eine  $K$ -Folge. In  $\bar{P} = \int P_{(\mu(\Phi, \cdot))} P(d\Phi)$  haben wir dann eine  $\mathfrak{B}$ -Mischung endlicher Intensität und wegen 4.3. gilt für alle  $[A_P]$ -Stetigkeitsmengen  $B \in \mathfrak{B}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\Phi * R_n(B) - \mu(\Phi, B)| P(d\Phi) = 0.$$

Weiter erhalten wir unter Verwendung von Theorem 2 in [7]  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int R_n(x, B)^2 A_P(dx) = 0; \quad \forall B \in \mathfrak{B}$ . Schließlich ist noch  $A_P * R_n \in N$  für alle  $n = 0, 1, \dots$  und die Menge der  $A_P$ -Stetigkeitsmengen aus  $\mathfrak{B}$  bilden einen Halbring. Nach Theorem 2 in [6] muß deshalb die Konvergenz der Variationsabstände

$$\|P_{R_n}^{B_1, \dots, B_m} - P^{B_1, \dots, B_m}\|_{\text{var}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für alle Folgen  $B_1, \dots, B_m$  von  $A_P$ -Stetigkeitsmengen aus  $\mathfrak{B}$  statthaben, d. h., die Folge der Punktprozesse  $P_{R_n}$  konvergiert schwach gegen  $\bar{P}$ . Theorem 1 ist damit bewiesen.

Theorem 1 läßt sich zu einer Charakterisierung der K-Folgen ausbauen. Wie das zu verstehen ist, macht das folgende Theorem deutlich.

**Theorem 2.** *Eine Folge  $R_0, R_1, \dots$  aus  $\mathfrak{P}$  ist genau dann eine K-Folge, wenn für jeden  $\mathfrak{P}$ -praeinvarianten Punktprozeß  $P$  die Folge der Punktprozesse  $P_{R_0}, P_{R_1}, \dots$  schwach gegen einen  $\mathfrak{P}$ -invarianten Punktprozeß konvergiert.*

Beim Beweis von Theorem 2 stützen wir uns auf die folgenden bekannten Beziehungen (siehe etwa 5.4.4. bzw. 5.6.11. in [8]):

5.1. *Ist  $\mu$  ein Maß aus  $N$  und  $R$  ein substochastischer Kern auf  $E$  mit  $\mu * R \in N$ , dann gilt:  $(P_{(\mu)})_R = P_{(\mu * R)}$ .*

5.2. *Eine Folge  $P_{(\mu_n)}, P_{(\mu_{n+1})}, \dots$  Poissonscher Prozesse konvergiert genau dann schwach gegen einen Punktprozeß  $\bar{P}$ , wenn ein Maß  $\mu \in N$  existiert, so daß für alle  $f \in \mathcal{Q}^{00}$  gilt:  $\mu * f = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n * f$ . Dabei ist  $\bar{P} = P_{(\mu)}$ .*

Weiter benötigen wir noch den folgenden Satz, dessen Beweis wir im 8. Abschnitt führen werden.

5.3. *Eine Folge  $R_0, R_1, \dots$  aus  $\mathfrak{P}$  ist genau dann eine K-Folge, wenn zu jedem  $\mathfrak{P}$ -praeinvarianten Maß  $\mu$  ein  $\mathfrak{P}$ -invariantes Maß  $]\mu[$  existiert mit:  $]\mu[ * f = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu * R_n * f; \quad \forall f \in \mathcal{Q}^{00}$ .*

Wegen 5.1. ist ein Poissonscher Punktprozeß  $\mathfrak{P}$ -invariant, wenn er ein  $\mathfrak{P}$ -invariantes Intensitätsmaß besitzt. Damit ist klar, daß jede  $\mathfrak{P}$ -Mischung auch  $\mathfrak{P}$ -invariant ist. Wegen Theorem 1 genügt es deshalb, zum Beweis von Theorem 2 die Gültigkeit der folgenden Beziehung nachzuweisen:

5.4. *Es sei  $R_0, R_1, \dots$  eine Folge aus  $\mathfrak{P}$ , so daß für jeden  $\mathfrak{P}$ -praeinvarianten Poissonschen Punktprozeß  $P$  die Folge  $P_{R_0}, P_{R_1}, \dots$  schwach gegen einen  $\mathfrak{P}$ -invarianten Punktprozeß konvergiert. Dann ist  $R_0, R_1, \dots$  eine K-Folge.*

**Beweis.** Es sei  $\mu$  ein  $\mathfrak{P}$ -praeinvariantes Maß. Nach 4.5. muß dann der Poissonsche Punktprozeß  $P_{(\mu)}$   $\mathfrak{P}$ -praeinvariant sein. Auf Grund unserer Voraussetzung muß deshalb die Folge  $(P_{(\mu)})_{R_0}, (P_{(\mu)})_{R_1}, \dots$  schwach gegen einen  $\mathfrak{P}$ -invarianten Punktprozeß  $\bar{P}$  konvergieren. Wegen 5.1. und 5.2. erhalten wir nun, daß ein Maß  $]\mu[$  existiert, so das gilt:

$$(4) \quad ]\mu[ * f = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu * R_n * f; \quad \forall f \in \mathcal{Q}^{00},$$

$$P_{(]\mu[)} = \bar{P}.$$

Der  $\mathfrak{P}$ -invariante Punktprozeß  $\bar{P}$  muß also endlicher Intensität sein und, nach 4.1., deshalb ein  $\mathfrak{P}$ -invariantes Intensitätsmaß besitzen, d. h.,  $]\mu[$  ist  $\mathfrak{P}$ -invariant.

Damit haben wir gezeigt, daß zu jedem  $\mathfrak{P}$ -praeinvarianten Maß  $\mu$  ein  $\mathfrak{P}$ -invariantes Maß  $]\mu[$  existiert mit (4). Nach 5.3. ist Letzteres jedoch gleichbedeutend damit, daß  $R_0, R_1, \dots$  eine K-Folge ist.

**Theorem 3.** *Es sei  $P$  ein Poissonscher Punktprozeß mit  $\mathfrak{P}$ -beschränktem Intensitätsmaß.  $P$  ist genau dann  $\mathfrak{P}$ -praeinvariant, wenn für jede K-Folge  $R_0, R_1, \dots$  die Folge der Punktprozesse  $P_{R_0}, P_{R_1}, \dots$  schwach gegen einen  $\mathfrak{P}$ -invarianten Punktprozeß konvergiert.*

Wir hatten bereits festgestellt, daß jede  $\mathfrak{P}$ -Mischung auch  $\mathfrak{P}$ -invariant ist. Wegen Theorem 1 genügt es deshalb, zum Beweis von Theorem 3 die Gültigkeit der folgenden Beziehung nachzuweisen:

5.5. Es sei  $P$  ein Poissonscher Punktprozeß mit  $\mathfrak{B}$ -beschränktem Intensitätsmaß, so daß für alle  $K$ -Folgen  $R_0, R_1, \dots$  die Folge der Punktprozesse  $P_{R_0}, P_{R_1}, \dots$  schwach gegen einen  $\mathfrak{B}$ -invarianten Punktprozeß konvergiert. Dann ist  $P$   $\mathfrak{B}$ -praeinvariant.

Beweis. Wegen 5.2. und 5.3. folgt aus der Voraussetzung von 5.5., daß für jede  $K$ -Folge  $R_0, R_1, \dots$  ein  $\mathfrak{B}$ -invariantes Maß  $\mu$  existiert mit  $\mu * f = \lim_{n \rightarrow \infty} A_P$

$* R_n * f; \quad \forall f \in \mathcal{Q}^{00}$ .

Da andererseits  $A_P$  nach Voraussetzung ein  $\mathfrak{B}$ -beschränktes Maß ist, erhalten wir unter Verwendung von Theorem 1 in [7], daß  $A_P$  ein  $\mathfrak{B}$ -praeinvariantes Maß ist. Letzteres ist jedoch nach 4.5. gleichbedeutend damit, daß  $P$  ein  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianter Punktprozeß ist. Die Theoreme 1, 2 und 3 machen deutlich, daß zwischen den Begriffen  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianter Punktprozeß,  $K$ -Folge aus  $\mathfrak{B}$  und der Konvergenzaussage unter Theorem 1 ein natürlicher Zusammenhang besteht. So besagt Theorem 1, daß die Konvergenzaussage richtig ist, wenn eine  $K$ -Folge und ein  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianter Punktprozeß vorliegen. Aus Theorem 2 und Theorem 1 folgt, daß sich eine  $K$ -Folge dadurch charakterisieren läßt, daß die Konvergenzaussage für alle  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianten oder sogar nur für alle  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianten Poissonschen Punktprozesse richtig ist (man beachte die Beziehung 5.4.). Schließlich folgt aus Theorem 1 und Theorem 3, daß sich wenigstens für Poissonsche Punktprozesse die  $\mathfrak{B}$ -Praeinvarianz durch die Gültigkeit der Konvergenzaussage für alle  $K$ -Folgen charakterisieren läßt.

**6. Die Struktur der  $\mathfrak{B}$ -invarianten Punktprozesse.** Es sei wieder  $\mathfrak{B}$  eine separable, stetige, flüchtige und mischende Verschiebungshalbgruppe. Wir hatten bereits im 5. Abschnitt festgestellt, daß jede  $\mathfrak{B}$ -Mischung auch  $\mathfrak{B}$ -invariant ist. Schränkt man sich auf die Betrachtung von Punktprozessen endlicher Intensität ein, so läßt sich diese Aussage auch umkehren, d. h., wir haben:

**Theorem 4.** Es sei  $P$  ein Punktprozeß endlicher Intensität.  $P$  ist genau dann  $\mathfrak{B}$ -invariant, wenn  $P$  sich als  $\mathfrak{B}$ -Mischung darstellen läßt.

Beweis. Wir müssen nur noch zeigen, daß  $P$  eine  $\mathfrak{B}$ -Mischung ist, wenn  $P$   $\mathfrak{B}$ -invariant ist.

In [7] Abschnitt 3. wird gezeigt, daß für separable Verschiebungshalbgruppen wenigstens eine  $K$ -Folge  $R_0, R_1, \dots$  existiert. Ist  $P$   $\mathfrak{B}$ -invariant, dann muß gelten

$$P_{R_n} = P; \quad \forall n = 0, 1, \dots$$

Weiter muß nach 4.2  $P$  auch  $\mathfrak{B}$ -praeinvariant sein. Unter Verwendung von Theorem 1 erhalten wir deshalb, daß die Folge  $P_{R_0}, P_{R_1}, \dots$  schwach gegen eine  $\mathfrak{B}$ -Mischung konvergiert. Wegen  $P_{R_n} = P; \quad \forall n = 0, 1, \dots$ , folgt daraus jedoch, daß  $P$  selbst eine  $\mathfrak{B}$ -Mischung ist. Damit ist Theorem 4 bewiesen.

Für jedes  $A \in \mathfrak{A}$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{M}_A$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra über  $M$ , bezüglich der alle Abbildungen  $\xi_B$  mit  $B \in \mathfrak{B}$  und  $B \subseteq A$  meßbar sind und setzen  $\mathfrak{M}_\infty = \bigcap_{B \in \mathfrak{B}} \mathfrak{M}_B$ . Ein Punktprozeß  $P$  heißt räumlich ergodisch, wenn  $P$  auf

$\mathfrak{M}_\infty$  nur die Werte 0 oder 1 hat. Für jedes  $A \in \mathfrak{A}$  und jeden Punktprozeß  $P$  bezeichne nun  ${}_A P$  das durch die Abbildung  $\Phi \rightarrow \Phi(\cdot \cap A) = {}_A \Phi$  induzierte Verteilungsgesetz auf  $[M, \mathfrak{M}]$ . Weiter setzen wir für jedes  $Y \in \mathfrak{M}$  mit  $P(Y) > 0$

$$P(X/Y) = P(X \cap Y) / P(Y); \quad \forall X \in \mathfrak{M}$$



d. h., wir haben in  $P(\cdot/Y)$  das bedingte Verteilungsgesetz zu  $P$  unter der Bedingung  $Y$ . Wir sagen, daß der Punktprozeß  $P$  von schwacher Fernwirkung ist, wenn für jedes  $B' \in \mathfrak{B}$  und alle  $Y \in \mathfrak{M}_{B'}$  mit  $P(Y) > 0$  gilt:

$$\inf_{B \supset B', B \in \mathfrak{B}} \left\| \overline{P} - \overline{P} (P(\cdot/Y)) \right\|_{\text{var}} = 0.$$

Schließlich nennen wir einen  $\mathfrak{P}$ -invarianten Punktprozeß  $P$   $\mathfrak{P}$ -extremal, wenn aus der Darstellung  $P = \alpha P^1 + (1 - \alpha) P^2$ , wobei  $\alpha > 0$  und  $P^1$  ebenfalls  $\mathfrak{P}$ -invariant ist, folgt, daß  $P = P^1$  ist.

Theorem 5. *Es sei  $P$  ein  $\mathfrak{P}$ -invarianter Punktprozeß endlicher Intensität. Folgende Aussagen sind gleichwertig:*

- a)  $P$  ist Poissonscher.
- b)  $P$  ist  $\mathfrak{P}$ -extremal.
- c)  $P$  ist von schwacher Fernwirkung.
- d)  $P$  ist räumlich ergodisch.

Den Beweis von Theorem 5 führen wir im Abschnitt 9 der Arbeit.

**7. Homogene Verschiebungen.** Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, besteht ein Anliegen dieser Arbeit darin, die angeführten Resultate von Dobrushin und Stone zu verallgemeinern. Inwieweit das gelungen ist, d. h., welche Gestalt die erzielten Resultate im Fall homogener Verschiebungen annehmen, soll in diesem Abschnitt demonstriert werden. Dazu spezialisieren wir uns zunächst auf den Fall  $E = R^s$ . Alle früher eingeführten Begriffe bezeichnungen beziehen sich deshalb im folgenden immer auf den  $s$ -dimensionalen euklidischen Raum  $E = R^s$ . Wir führen zunächst noch einige Bezeichnungen ein. Es sei  $\mathfrak{B}$  die Menge aller Verteilungsgesetze auf  $[E, \mathfrak{U}]$ . Mit  $\mu * \lambda$  bezeichnen wir die Faltung von zwei Maßen  $\mu, \lambda \in \mathfrak{N}$ . Für jedes  $\alpha \in \mathfrak{B}$  haben wir in  $R_\alpha$ , definiert durch  $R_\alpha(x, A) = \delta_x * \alpha(A)$ ;  $\forall x \in E, \forall A \in \mathfrak{U}$  einen stochastischen Kern auf  $E$ . Wir setzen  $\mathfrak{R} = \{R_\alpha : \alpha \in \mathfrak{B}\}$ .

In [7] wird gezeigt, daß  $\mathfrak{R}$  ein separable, stetige, flüchtige und mischende Verschiebungshalbgruppe ist, und die Menge der  $\mathfrak{P}$ -invarianten Maße mit allen Vielfachen des Lebesgueschen Maßes zusammenfällt. Aus Theorem 4 folgt deshalb:

7.1. *Ein Punktprozeß  $P$  auf  $R^s$  mit endlicher Intensität ist genau dann  $\mathfrak{P}$ -invariant, wenn  $P$  eine Mischung stationärer Poissonscher Punktprozesse ist.*

Spezialisieren wir uns auf  $s=1$ , so haben wir in 7.1 den in der Einleitung angeführten Struktursatz von Dobrushin. Wir zeigen nun:

7.2. *Ein Punktprozeß  $P$  auf  $R^s$  ist genau dann  $\mathfrak{P}$ -praeinvariant, wenn die folgende Forderung erfüllt ist:*

- a) *Es existiert eine Funktion  $f \in L_1(P)$  mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in R^s} \int | \Phi * \delta_x([-n, n]^s) (2n)^{-s} - f(\Phi) | P(d\Phi) = 0.$$

Beweis. Wir wissen bereits, daß die  $\mathfrak{P}$ -invarianten Maße mit allen Vielfachen des Lebesgueschen Maßes  $L$  zusammenfallen. Weiter wird in [7] gezeigt, daß ein Maß  $\mu$  genau dann  $\mathfrak{P}$ -beschränkt ist, wenn  $\sup \mu * \delta_x(B) < \infty$  für alle  $B \in \mathfrak{B}$  ist. Ebenfalls in [7] wird gezeigt, daß eine Folge  $R_{\alpha_0}, R_{\alpha_1}, \dots$  aus  $\mathfrak{R}$  genau dann eine  $K$ -Folge ist, wenn die Folge  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  schwach asymptotisch gleichverteilt ist (d. h., für alle  $x \in R^s$  und alle bezüglich  $L$  absolut stetigen  $\alpha \in \mathfrak{B}$  hat die Konvergenz der Variationsabstände

$$|\alpha * \alpha_n - \delta_x * \alpha * \alpha_n|_{\text{var}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

statt). Wie erhalten deshalb unter Verwendung von 4.3, daß  $P$  genau dann  $\mathfrak{B}$ -praeinvariant ist, wenn ein  $f \in L_1(P)$  existiert, so daß für alle  $L$ -Stetigkeitsmengen  $B \in \mathfrak{B}$  und alle schwach asymptotisch gleichverteilten Folgen  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\Phi * \alpha_n(B) - f(\Phi)L(B)| P(d\Phi) = 0.$$

Letzteres ist jedoch identisch damit, daß die Forderung a) erfüllt ist (siehe [1]). Damit ist 7.2 bewiesen.

Wir hatten bereits festgestellt, daß, auf Grund der Ergebnisse in [7], jeder Punktprozeß auf  $R^s$  genau dann eine Mischung stationärer Poissonscher Punktprozesse ist, wenn er eine  $\mathfrak{B}$ -Mischung ist, weiter, jede Folge  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  genau dann schwach asymptotisch gleichverteilt ist, wenn  $R_{\alpha_0}, R_{\alpha_1}, \dots$  eine K-Folge in  $\mathfrak{B}$  ist. Wegen 7.2 erhalten wir deshalb als Folgerung aus den Theoremen 1 und 2:

7.3. Eine Folge  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  ist genau dann schwach asymptotisch gleichverteilt, wenn für alle Punktprozesse  $P$  auf  $R^s$ , die der Forderung a) unter 7.2 genügen, die Folge der Punktprozesse  $P_{R_{\alpha_0}}, P_{R_{\alpha_1}}, \dots$  schwach gegen eine Mischung stationärer Poissonscher Punktprozesse konvergiert.

Spezialisieren wir uns wieder auf  $s=1$ , so haben wir in 7.3 das in der Einleitung angeführte Theorem von Stone.

8. Die Beweise von 4.2, 4.3 und 5.3. In diesem Abschnitt sei stets  $\mathfrak{B}$  eine separable, stetige, flüchtige und mischende Verschiebungshalbgruppe auf dem vollständigen separablen metrischen Raum  $E$ .

Wir führen zunächst den Beweis der Beziehung 4.3:

Auf dem üblichen Wege zeigt man, daß die Aussage (p2) äquivalent ist mit

(p3) Für jede K-Folge  $R_0, R_1, \dots$  und alle  $f \in \mathcal{Q}^{00}$  ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\Phi * R_n * f - \kappa(\Phi, *) * f| P(d\Phi) = 0.$$

Wir müssen deshalb zum Beweis von 4.3 nur die Äquivalenz von (p1) und (p3) nachweisen.

Es sei zunächst (p3) erfüllt. Nach [7] Abschnitt 3 existiert eine Folge  $R_0, R_1, \dots$  aus  $\mathfrak{B}$  dergestalt, daß für jede Folge  $Q_0, Q_1, \dots$  aus  $\mathfrak{B}$  in  $R_0 * Q_0, R_1 * Q_1, \dots$  eine K-Folge gegeben ist. Wegen (p3) muß deshalb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{Q \in \mathfrak{B}} \int |\Phi * R_n * Q * f - \kappa(\Phi, *) * f| P(d\Phi) = 0$$

für alle  $f \in \mathcal{Q}^{00}$  sein. Das zieht die Gültigkeit von (p1) nach sich. Es sei nun  $R_0, R_1, \dots$  eine K-Folge aus  $\mathfrak{B}$  und  $f \in \mathcal{Q}^{00}$ . Für alle  $Q \in \mathfrak{B}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int |\Phi * R_n * f - \kappa(\Phi, *) * f| P(d\Phi) \\ (5) \quad & \leq \int |\Phi * R_n * f - \Phi * Q * R_n * f| P(d\Phi) + \int |\Phi * Q * R_n * f - \kappa(\Phi, *) * f| P(d\Phi) \\ & \leq A_P * |R_n * f - Q * R_n * f| + \sup_{R \in \mathfrak{B}} \int |\Phi * Q * R * f - \kappa(\Phi, *) * f| P(d\Phi) \end{aligned}$$

Setzen wir voraus, daß (p1) erfüllt,  $P$  also  $\mathfrak{B}$ -praeinvariant ist, dann muß nach 4.4  $A_P$  ein  $\mathfrak{B}$ -praeinvariantes Maß sein. Wegen 5.7 in [7] ist deshalb stets

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |A_P^* | R_n^* f - Q^* R_n^* f | = 0.$$

Weiter folgt aus (p1)

$$(7) \quad \inf_{Q \in \mathfrak{B}} \sup_{R \in \mathfrak{B}} \int | \Phi^* Q^* R^* f - \kappa(\Phi, )^* f | P(d\Phi) = 0.$$

(5), (6) und (7) ziehen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int | \bar{\Phi}^* R_n^* f - \kappa(\bar{\Phi}, )^* f | P(d\bar{\Phi}) = 0$$

nach sich. Damit ist gezeigt, daß (p3) aus (p1) folgt und 4.3 ist bewiesen.

Wir führen nun den Beweis der Beziehung 4.2.:

Da  $\mathfrak{B}$  separabel war, existiert eine abzählbare Teilmenge  $\mathfrak{Q}$  mit den Eigenschaften (S1) und (S2). Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $\mathfrak{Q}$  eine Verschiebungshalbgruppe ist.

Es sei nun  $P$  ein  $\mathfrak{B}$ -invarianter Punktprozeß endlicher Intensität.  $P$  ist dann auch  $\mathfrak{Q}$ -invariant. Aus den Überlegungen in [2] Abschnitt 4, speziell Satz 1, folgt dann, daß eine auf  $M \times \mathfrak{A}$  definierte reelle Funktion  $\kappa(\Phi, B)$  existiert mit:

1. Für jedes  $B \in \mathfrak{B}$  ist  $\kappa(, B)$  eine meßbare,  $P$ -integrierbare Funktion auf  $M$ .

2. Für jedes  $\Phi \in M$  ist  $\kappa(\Phi, )$  ein  $\mathfrak{Q}$ -invariantes Maß auf  $\mathfrak{A}$ .

3. Bezeichne  $Q_0, Q_1, \dots$  eine Numerierung der Elemente von  $\mathfrak{Q}$  und  $a_0, a_1, \dots$  eine Folge positiver reeller Zahlen mit  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$ . Für den substochastischen Kern  $\bar{Q} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Q_k$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int | \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \Phi^* \bar{Q}^{m*}(B) - \kappa(\Phi, B) | P(d\Phi) = 0: \quad \forall B \in \mathfrak{B}.$$

Aus (S2) und 2 folgt sofort:

2'. Für jedes  $\Phi \in M$  ist  $\kappa(\Phi, )$  ein  $\mathfrak{B}$ -invariantes Maß.

Es sei nun  $R_0, R_1, \dots$  eine  $K$ -Folge aus  $\mathfrak{B}$  und  $\bar{Q}$  entsprechend 3 konstruiert. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  erhalten wir unter Verwendung von 2':

$$\begin{aligned} & \int | \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \Phi^* (\bar{Q}^{m*})^* R_n(B) - \kappa(\Phi, B) | P(d\Phi) \\ & \leq \int | \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \Phi^* \bar{Q}^{m*}(B) - \kappa(\Phi, B) | P(d\Phi); \quad \forall B \in \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Wir können deshalb folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} & \int | \Phi^* R_s(B) - \kappa(\Phi, B) | P(d\Phi) \\ & \leq \int | \Phi^* R_s(B) - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \Phi^* (\bar{Q}^{m*})^* R_s(B) | P(d\Phi) + \int | \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \Phi^* (\bar{Q}^{m*})^* R_s(B) \\ & \quad - \kappa(\Phi, B) | P(d\Phi) \leq \sup_{m \leq n} \int | R_s(x, B) - (\bar{Q}^{m*})^* R_s(x, B) | A_P(dx) \\ & \quad + \int | \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \Phi^* \bar{Q}^{m*}(B) - \kappa(\Phi, B) | P(d\Phi); \quad \forall B \in \mathfrak{B}, \forall s, n \geq 0. \end{aligned}$$

$\lambda_P$  ist ein  $\mathfrak{B}$ -invariantes Maß. Wegen Theorem 2 in [7] gilt deshalb für alle  $\lambda_P$ -Stetigkeitsmengen  $B \in \mathfrak{B}$  und alle  $n=0, 1, \dots$

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \int R_s(x, B) - (\bar{Q}^{m*})^* R_s(x, B) \lambda_P(dx) = 0.$$

Wir haben deshalb für alle  $\lambda_P$ -Stetigkeitsmengen  $B \in \mathfrak{B}$  und alle  $n=0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \int \Phi^* R_s(B) - \kappa(\Phi, B) P(d\Phi) \\ & \leq \int \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \Phi^*(\bar{Q}^{m*})(B) - \kappa(\Phi, B) P(d\Phi). \end{aligned}$$

Wegen 3 ist  $\lambda_P(B) = \int \kappa(\Phi, B) P(d\Phi)$ ;  $\forall B \in \mathfrak{B}$ , und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \Phi^*(\bar{Q}^{m*})(B) - \kappa(\Phi, B) P(d\Phi) = 0; \quad \forall B \in \mathfrak{B}.$$

Damit haben wir gezeigt, daß  $P$  der Aussage (p2) unter 4.3 genügt und deshalb  $\mathfrak{B}$ -praeinvariant sein muß. Der Beweis von 4.2 ist damit abgeschlossen.

Auf Grund der Definition der  $K$ -Folgen genügt es, zum Beweis von 5.3 zu zeigen:

8.1. *Es sei  $R_0, R_1, \dots$  eine Folge aus  $\mathfrak{B}$ , so daß zu jedem  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianten Maß  $\mu$  ein  $\mathfrak{B}$ -invariantes Maß  $]\mu[$  existiert mit  $]\mu[*f = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^* R_n^* f$ ;  $\forall f \in \mathcal{Q}^{00}$ .*

*Dann ist  $R_0, R_1, \dots$  eine  $K$ -Folge.*

**Beweis.** Unter den Voraussetzungen von 8.1 zeigen wir zunächst

8.1.1. *Für alle  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianten Maße  $\mu$  und alle nichtnegativen  $f \in \mathcal{Q}^{00}$  gilt:  $]\mu[*f \leq [\mu]*f$ .*

Sei dazu  $\mu$  ein  $\mathfrak{B}$ -praeinvariantes Maß und  $R \in \mathfrak{B}$ . Offensichtlich ist auch  $\mu^* R$  ein  $\mathfrak{B}$ -praeinvariantes Maß. Für alle nichtnegativen  $f, g \in \mathcal{Q}^{00}$  mit  $g(x) \leq 1$ ;  $\forall x \in E$ , ist nun  $g \cdot (R^* f) \in \mathcal{Q}^{00}$  und wir erhalten

$$]\mu^* R[*f \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^* R_n^*(g \cdot (R^* f)) = ]\mu[* (g \cdot (R^* f)).$$

Daraus folgt  $]\mu^* R[*f \geq ]\mu[*f$  für alle nichtnegativen  $f \in \mathcal{Q}^{00}$ . Damit haben wir  $]\mu[*f = \inf_{R \in \mathfrak{B}} ]\mu^* R[*f$  für alle nichtnegativen  $f \in \mathcal{Q}^{00}$ . Weil stets  $\mu^* R^* R_n^* f$

$= \sup_{R' \in \mathfrak{B}} \mu^* R^* R'^* f$  ist, muß andererseits für alle nichtnegativen  $f \in \mathcal{Q}^{00}$  gelten

$$\inf_{R \in \mathfrak{B}} ]\mu^* R[*f \leq \inf_{R \in \mathfrak{B}} \sup_{R' \in \mathfrak{B}} \mu^* R^* R'^* f.$$

Da schließlich  $\inf_{R \in \mathfrak{B}} \sup_{R' \in \mathfrak{B}} \mu^* R^* R'^* f = [\mu[*f$ ;  $\forall f \in \mathcal{Q}^{00}$  ist (siehe [7]), können wir

auf die Gültigkeit von 8.1.1 schließen.

Aus 5.5 in [7] folgt nun, daß für jedes  $\mathfrak{B}$ -praeinvariante Maß und jedes  $B \in \mathfrak{B}$  das Maß  $\mu \in \mathfrak{k}_B$ , definiert durch  $(\mu \mathfrak{k}_B)(A) = \mu(A \cap B)$ ;  $\forall A \in \mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ -praeinvariant ist, und es gilt:  $[\mu \mathfrak{k}_B]*f = 0$ ;  $\forall f \in \mathcal{Q}^{00}$ .

Wegen 8.1.1 muß deshalb für alle  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianten Maße  $\mu$ , alle  $B \in \mathfrak{B}$  und alle  $f \in \mathcal{Q}^{00}$  gelten:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu \mathfrak{k}_B)^* R_n^* f = 0$ .

Da mit  $R_0, R_1, \dots$  auch die Folge  $R^*R_0, R^*R_1, \dots$  für jedes  $R \in \mathfrak{B}$  die Voraussetzung von 8.1 erfüllt, erhalten wir für jedes  $\mathfrak{B}$ -praeinvariante Maß  $\mu$ , alle  $B \in \mathfrak{B}$  und  $f \in \mathcal{Q}^{00}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu k_B)^* R^* R_n^* f = 0.$$

Damit haben wir

8.1.2. Für alle  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianten Maße gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu k_B)^* |R^* R_n^* f - R_n^* f| = 0; \quad \forall f \in \mathcal{Q}^{00}, \forall R \in \mathfrak{B}.$$

Nach Theorem 3 in [7] ist für jedes  $R \in \mathfrak{B}$ , alle  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianten Maße  $\mu$  und alle  $A \in \mathfrak{A}$  auch  $\mu k_A + (\mu k_A)^* R$  ein  $\mathfrak{B}$ -praeinvariantes Maß. Auf Grund der Voraussetzung von 8.1 erhalten wir deshalb

8.1.3. Für alle  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianten Maße  $\mu$ , alle  $R \in \mathfrak{B}$ , alle  $A \in \mathfrak{A}$  und alle  $f \in \mathcal{Q}^{00}$  konvergiert die Folge  $(\mu k_A)^*(R^* R_0^* f - R_0^* f), (\mu k_A)^*(R^* R_1^* f - R_1^* f), \dots$

Unter Verwendung des Lemma aus Abschnitt 2 in [4] erhalten wir aus 8.1.2 und 8.1.3.

8.1.4. Für alle  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianten Maße  $\mu$ , alle  $R \in \mathfrak{B}$  und alle  $f \in \mathcal{Q}^{00}$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^* |R^* R_n^* f - R_n^* f| = 0.$$

Für alle  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianten Maße  $\mu$ , alle  $R \in \mathfrak{B}$ ,  $f \in \mathcal{Q}^{00}$  und  $n = 0, 1, \dots$  haben wir nun folgende Abschätzung:

$$[\mu]^* f - \mu^* R_n^* f \leq \sup_{R' \in \mathfrak{B}} |[\mu]^* f - \mu^* R^* R'^* f| + \mu^* |R^* R_n^* f - R_n^* f|.$$

Auf Grund von 8.1.4 und der Definition der  $\mathfrak{B}$ -Praeinvarianz für Maße folgt daraus, daß für alle  $\mathfrak{B}$ -praeinvarianten Maße  $\mu$  und alle  $f \in \mathcal{Q}^{00}$  die Konvergenz  $\mu^* R_n^* f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [\mu]^* f$  statt hat. Das besagt, daß  $R_0, R_1, \dots$  eine K-Folge ist. Damit ist 8.1 bewiesen.

**9. Beweis von Theorem 5.** Für jedes  $A \in \mathfrak{A}$  bezeichne  $\mathfrak{F}_A$  die Menge aller  $\mathfrak{M}_A$ -meßbaren reellen Funktionen  $f$  auf  $M$  mit  $0 \leq f(\Phi) \leq 1; \forall \Phi \in M$ . Weiter sei  $\mathfrak{F}_\infty$  die Menge aller  $\mathfrak{M}_\infty$ -meßbaren beschränkten reellen Funktionen. Wir zeigen zunächst:

9.1. Es sei  $P$  ein Punktprozeß mit schwacher Fernwirkung. Für jede  $P$ -integrierbare Funktion  $g$  und alle  $f \in \mathfrak{F}_\infty$  gilt:

$$(8) \quad \int g(\Phi) f(\Phi) P(d\Phi) = (\int g(\Phi) P(d\Phi)) (\int f(\Phi) P(d\Phi)).$$

**Beweis.** Es sei  $B_0 \in \mathfrak{B}$ . Für alle  $Y \in \mathfrak{M}_{B_0}$  mit  $P(Y) > 0$ , alle  $B \in \mathfrak{B}$  mit  $B_0 \subseteq B$  und alle  $f \in \mathfrak{F}_B$  gilt:

$$\left| \int_Y f(\Phi) P(d\Phi) - P(Y) \int f(\Phi) P(d\Phi) \right| \leq P(Y) \left\| \int_B P - \int_{B_0} P \right\|_{\text{var}}.$$

Da  $P$  von schwacher Fernwirkung ist, haben wir damit

$$\inf_{B \in \mathfrak{B}} \sup_{f \in \mathfrak{F}_B} \left| \int_Y f(\Phi) P(d\Phi) - P(Y) \int f(\Phi) P(d\Phi) \right| = 0; \quad \forall Y \in \mathfrak{M}_{B_0}.$$

Daraus folgt, daß für alle endlichen Linearkombinationen  $h$  von Indikatorfunktionen von Mengen aus  $\mathfrak{M}_{B_0}$  gilt:

$$(9) \quad \inf_{B \in \mathfrak{B}} \sup_{f \in \mathfrak{F}_{\bar{B}}} | \int h(\Phi) f(\Phi) P(d\Phi) - (\int h(\Phi) P(d\Phi)) (\int f(\Phi) P(d\Phi)) | = 0.$$

Nun läßt sich aber zu jeder  $P$ -integrierbaren  $\mathfrak{M}_{B_0}$ -meßbaren Funktion  $g$  und jedem  $\varepsilon > 0$  eine solche Funktion  $h$  finden mit  $\int |g(\Phi) - h(\Phi)| P(d\Phi) < \varepsilon$ . Andererseits erhalten wir für alle Funktionen  $h$  mit (9)

$$\begin{aligned} \inf_{B \in \mathfrak{B}} \sup_{f \in \mathfrak{F}_{\bar{B}}} | \int g(\Phi) f(\Phi) P(d\Phi) - (\int g(\Phi) P(d\Phi)) (\int f(\Phi) P(d\Phi)) | \\ \leq 2 \int |g(\Phi) - h(\Phi)| P(d\Phi). \end{aligned}$$

Wir haben damit für alle  $P$ -integrierbaren  $\mathfrak{M}_{B_0}$ -meßbaren Funktionen  $g$

$$(10) \quad \inf_{B \in \mathfrak{B}} \sup_{f \in \mathfrak{F}_{\bar{B}}} | \int f(\Phi) g(\Phi) P(d\Phi) - (\int g(\Phi) P(d\Phi)) (\int f(\Phi) P(d\Phi)) | = 0.$$

Da  $B_0$  beliebig gewählt war, erhält man an Hand gleicher Überlegungen, daß (10) für alle  $P$ -integrierbaren Funktionen  $g$  richtig ist. Weil nun jedes  $f \in \mathfrak{F}_\infty$  mit

$$(11) \quad 0 \leq f(\Phi) \leq 1; \quad \forall \Phi \in M,$$

in der Menge  $\bigcap_{B \in \mathfrak{B}} \mathfrak{F}_{\bar{B}}$  liegt, können wir auf die Gültigkeit von (8) für alle  $P$ -

integrierbaren Funktionen  $g$  und alle  $f \in \mathfrak{F}_\infty$  mit (11) schließen. Daraus kann man jedoch leicht die Behauptung von 9.1 ableiten.

Offensichtlich liegt jede Indikatorfunktion einer Menge  $Y \in \mathfrak{M}_\infty$  in  $\mathfrak{F}_\infty$ . Aus 9.1 folgt deshalb, daß  $P(Y) = (P(Y))^2$ ;  $Y \in \mathfrak{M}_\infty$  ist, wenn  $P$  von schwacher Fernwirkung ist. Wir haben damit die folgende Beziehung:

9.2. Jeder Punktprozeß mit schwacher Fernwirkung ist räumlich ergodisch.

Ist  $P$  ein Poissonscher Punktprozeß, dann ist bekanntlich für alle  $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$  mit  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  und alle  $Y_1 \in \mathfrak{M}_{A_1}, Y_2 \in \mathfrak{M}_{A_2}$

$$P(Y_1 \cap Y_2) = P(Y_1) P(Y_2).$$

Wir erhalten deshalb:

9.3. Jeder Poissonsche Punktprozeß ist von schwacher Fernwirkung.

Wir betrachten jetzt eine abzählbare Verschiebungshalbgruppe  $\mathfrak{Q}$ , die stetig und flüchtig ist. Mit  $M(\mathfrak{Q})$  bezeichnen wir die Menge aller  $\Phi \in M$ , so daß  $\Phi * R \in N$  für alle  $R \in \mathfrak{Q}$  ist.  $M(\mathfrak{Q})$  wird durch die  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{M}(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{Q}) \cap M(\mathfrak{Q})$  zu einem meßbaren Raum ergänzt. Für jeden Punktprozeß  $P$  mit

$$(12) \quad P(M(\mathfrak{Q})) = 1$$

bezeichnet  $\hat{P}$  die Einschränkung von  $P$  auf  $\mathfrak{M}(\mathfrak{Q})$ .

Für jedes  $R \in \mathfrak{Q}$  charakterisieren wir nun einen stochastischen Kern  $\bar{V}_R$  von  $[M(\mathfrak{Q}), \mathfrak{M}(\mathfrak{Q})] / \text{in} [M, \mathfrak{M}]$  auf die folgende Weise:

$$\bar{V}_R(\delta_x, \{\Phi; \Phi(B) = 1\}) = R(x, B); \quad \forall x \in E, \quad \forall B \in \mathfrak{B},$$

$$\bar{V}_R(\delta_x, \{\Phi; \Phi(E) = 1\}) = 1; \quad \forall x \in E,$$

$$\bar{V}_R(\Phi, ) = \sum_{\substack{x \in E \\ \Phi(\{x\}) > 0}} (V_R(\delta_x))^{\Phi(\{x\})}; \quad \forall \Phi \in M(\mathfrak{Q}).$$

Für jeden Punktprozeß  $P$  mit (12) ist dann (siehe etwa [6])  $P_R = \widehat{P} * \bar{V}_R$ . Berücksichtigt man noch, daß  $\Omega$  eine Verschiebungshalbgruppe ist, so kann man zeigen:  $\bar{V}_R(\Phi, M(\Omega)) = 1; \forall \Phi \in M(\Omega)$ . Durch die Einschränkung  $V_R(\Phi, \cdot)$  von  $\mathfrak{M}$  auf  $\mathfrak{M}(\Omega)$  gelangen wir deshalb zu einem stochastischen Kern  $V_R$  auf  $[M(\Omega), \mathfrak{M}(\Omega)]$ . Ein Punktprozeß  $P$  ist genau dann  $\Omega$ -invariant, wenn gilt  $\widehat{P} * V_R = \widehat{P}; \forall R \in \Omega$ . Wir wählen nun ein Verteilungsgesetz  $\gamma$  auf  $\Omega$  mit der Eigenschaft  $\gamma(\{R\}) > 0; \forall R \in \Omega$ . Durch

$$T(\Phi, Y) = \sum_{R \in \Omega} \gamma(\{R\}) V_R(\Phi, Y); \quad \forall \Phi \in M(\Omega), \forall Y \in \mathfrak{M}(\Omega),$$

haben wir dann wieder einen stochastischen Kern  $T$  auf  $[M(\Omega), \mathfrak{M}(\Omega)]$  mit  $\widehat{P} * T = \widehat{P}$  für jeden  $\Omega$ -invarianten Punktprozeß  $P$ . Wir setzen weiter

$$Q = \sum_{R \in \Omega} \gamma(\{R\}) R, \quad T^{[n]} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{k*}, \quad Q^{[n]} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q^{k*}.$$

Unter Verwendung von Lemma 1 aus [6] zeigt man leicht:

$$\int_B (V_R(\Phi, \cdot) - V_{R(B_0)}(\Phi, \cdot)) |_{\text{var}} \leq \int_{B_0} R(x, B) \Phi(dx); \quad \forall R \in \Omega, \forall \Phi \in M(\Omega), \forall B, B_0 \in \mathfrak{B}$$

Weil für alle  $n=1, 2, \dots$  ein Verteilungsgesetz  $\gamma_n$  auf  $\Omega$  existiert, so daß

$$T^n = \sum_{R \in \Omega} \gamma_n(\{R\}) V_R, \quad Q^n = \sum_{R \in \Omega} \gamma_n(\{R\}) R$$

ist, können wir auf die Gültigkeit folgender Beziehung schließen:

9.4. *Es seien  $B, B_0 \in \mathfrak{B}, Y \in \mathfrak{M}_B \cap M(\Omega)$  und  $\Phi \in M(\Omega)$ . Für alle  $n=1, 2, \dots$  gilt:*

$$\int |T^{[n]}(\Phi, Y) - T^{[n]}(\Phi, Y)| \leq \int_{B_0} Q^{[n]}(x, B) \Phi(dx).$$

Wir zeigen nun:

9.5. *Es seien  $P$  ein  $\Omega$ -invarianter Punktprozeß endlicher Intensität,  $B \in \mathfrak{B}$  und  $Y \in \mathfrak{M}_B \cap M(\Omega)$ .*

*Dann existiert eine  $\mathfrak{M}_\infty$ -meßbare Funktion  $f$  auf  $M(\Omega)$  mit  $0 \leq f \leq 1$  und*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |T^{[n]}(\Phi, Y) - f(\Phi)| P(d\Phi) = 0.$$

*Beweis.* Wir haben  $\widehat{P} * T = \widehat{P}$ . Nach einem bekannten Ergodensatz konvergiert deshalb die Funktionenfolge  $T^{[n]}(\cdot, Y)$  in der  $L_1(P)$ -Norm und  $P$ -fastsicher gegen eine Funktion  $\tilde{f}$  auf  $M(\Omega)$  mit  $0 \leq \tilde{f}(\Phi) \leq 1; \forall \Phi \in M(\Omega)$ . Für jedes  $B_0 \in \mathfrak{B}$  erhalten wir wegen 9.4

$$\int |T^{[n]}(\Phi, Y) - T^{[n]}(\Phi, Y)| \widehat{P}(d\Phi) \leq \int \int_{B_0} Q^{[n]}(x, B) \Phi(dx) P(d\Phi) = \int_{B_0} Q^{[n]}(x, B) \Delta_P(dx).$$

Weil  $\Omega$  flüchtig,  $\Delta_P \in N$  und  $\Delta_P * Q = \Delta_P$  ist, erhält man weiter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_0} Q^{[n]}(x, B) \Delta_P(dx) = 0; \quad \forall B_0 \in \mathfrak{B}.$$

Wir haben deshalb

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int |T^{[n]}(\Phi, Y) - \tilde{f}(\Phi)| P(d\Phi) = 0; \quad \forall B_0 \in \mathfrak{B}.$$

Wir betrachten jetzt eine Folge  $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$  von Mengen aus  $\mathfrak{B}$ , so daß zu jedem  $B_0 \in \mathfrak{B}$  ein  $k$  existiert mit  $B_0 \subseteq B_k$ . Aus Grund von (13) können wir eine Folge  $n_1 < n_2 < \dots$  natürlicher Zahlen finden, so daß für die Menge

$$L = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{ \Phi \in M(\mathfrak{Q}); \tilde{f}(\Phi) = \lim_{e \rightarrow \infty} T^{[n_e]}(\overline{B_k} \Phi, Y) \}$$

gilt:  $\widehat{P}(L) = 1$ .

Für jedes  $k = 1, 2, \dots$  bezeichne nun  $M_k$  die Menge aller  $\Phi \in M(\mathfrak{Q})$  mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Für jedes  $i \geq k$  konvergiert die Folge  $(T^{n_e}(\overline{B_i} \Phi, Y))_{e=1}^{\infty}$
- (b) Für alle  $i \geq k$  gilt:

$$\lim_{e \rightarrow \infty} T^{[n_e]}(\overline{B_i} \Phi, Y) = \lim_{e \rightarrow \infty} T^{[n_e]}(\overline{B_k} \Phi, Y).$$

Offensichtlich ist stets  $L \subseteq M_k$  und  $M_k \in \mathfrak{M}_{\overline{B_k}}$ .

Wir setzen  $f_k(\Phi) = \lim_{e \rightarrow \infty} T^{[n_e]}(\overline{B_k} \Phi, Y)$ ;  $\forall \Phi \in M_k$ . Es ist dann für alle  $r \leq s$   $f_r(\Phi) = f_s(\Phi)$ ;  $\forall \Phi \in M_r$  und  $M_r \subseteq M_s$ . Weiter ist offensichtlich  $f_k$  eine  $\mathfrak{M}_{\overline{B_k}}$ -meßbare Funktion mit  $0 \leq f_k(\Phi) \leq 1$ ;  $\forall \Phi \in M(\mathfrak{Q})$ .

Wir setzen nun  $M_{\infty} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ . Offensichtlich ist  $M_{\infty} \in \mathfrak{M}_{\infty} \cap M(\mathfrak{Q})$  und es gibt genau eine Funktion  $f_{\infty}$  auf  $M_{\infty}$ , die  $\mathfrak{M}_{\infty}$ -meßbar ist und für die gilt:  $f_{\infty}(\Phi) = f_k(\Phi)$ ;  $\forall \Phi \in M_k$ . Die Funktion

$$f(\Phi) =_{\text{Def}} \begin{cases} f_{\infty}(\Phi); & \forall \Phi \in M_{\infty}, \\ 0 & ; \quad \forall \Phi \in M(\mathfrak{Q}) \setminus M_{\infty}, \end{cases}$$

ist dann  $\mathfrak{M}_{\infty}$ -meßbar, besitzt die Eigenschaft  $0 \leq f(\Phi) \leq 1$ ;  $\forall \Phi \in M(\mathfrak{Q})$ , und es gilt:  $f(\Phi) = \tilde{f}(\Phi)$ ;  $\forall \Phi \in L$ . Weil  $\widehat{P}(L) = 1$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |T^{[n]}(\Phi, Y) - f(\Phi)| P(d\Phi) = 0$$

war, haben wir damit die Behauptung von 9.5 bewiesen.

9.6. *Es seien  $P$  und  $D$   $\mathfrak{Q}$ -invariante Punktprozesse, so daß  $D$  absolut stetig bezüglich  $P$  ist. Wenn  $P$  räumlich ergodisch und von endlicher Intensität ist, dann muß  $P = D$  sein.*

**Beweis.** Weil  $D$  absolut stetig bezüglich  $P$  ist, muß auch  $\widehat{D}$  absolut stetig bezüglich  $\widehat{P}$  sein.  $\widehat{D}$  läßt sich deshalb in der Form  $\widehat{D}(Y) = \int g(\Phi) P(d\Phi)$ ;  $\forall Y \in \mathfrak{M}(\mathfrak{Q})$  darstellen. Weiter haben wir für alle  $n = 1, 2, \dots$

$$\widehat{P}(Y) = \int T^{[n]}(\Phi, Y) \widehat{P}(d\Phi) \widehat{D}(Y) = \int T^{[n]}(\Phi, Y) g(\Phi) \widehat{P}(d\Phi); \quad \forall Y \in \mathfrak{M}(\mathfrak{Q}).$$

Es sei nun  $B \in \mathfrak{B}$  und  $Y \in \mathfrak{M}_{\infty} \cap M(\mathfrak{Q})$ . Mit den Bezeichnungen von 9.5 muß dann gelten

$$(14) \quad \widehat{P}(Y) = \int f(\Phi) \widehat{P}(d\Phi).$$

Weiter haben wir für alle  $m > 0$



$$\begin{aligned} |\widehat{D}(Y) - \int g(\Phi) f(\Phi) P(d\Phi)| &\leq \int g(\Phi) |T^{[n]}(\Phi, Y) - f(\Phi)| \widehat{P}(d\Phi) \\ &\leq \int_{g(\Phi) > m} g(\Phi) \widehat{P}(d\Phi) + m \int |T^{[n]}(\Phi, Y) - f(\Phi)| \widehat{P}(d\Phi). \end{aligned}$$

Nach 9.5 muß gelten  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |T^{[n]}(\Phi, Y) - f(\Phi)| \widehat{P}(d\Phi) = 0$ . Mithin ist für alle  $m > 0$

$$|\widehat{D}(Y) - \int g(\Phi) f(\Phi) \widehat{P}(d\Phi)| < \int_{g(\Phi) > m} g(\Phi) \widehat{P}(d\Phi)$$

und damit

$$(15) \quad \widehat{D}(Y) = \int g(\Phi) f(\Phi) \widehat{P}(d\Phi).$$

Da  $P$  räumlich ergodisch sein soll und  $f$  nach Aussage von 9.5  $\mathfrak{M}_\infty$ -meßbar ist, erhält man

$$(16) \quad \int g(\Phi) f(\Phi) \widehat{P}(d\Phi) = \int g(\Phi) \widehat{P}(d\Phi) \int f(\Phi) \widehat{P}(d\Phi).$$

Wegen  $1 = \int g(\Phi) P(d\Phi)$  folgt aus (14), (15) und (16)

$$(17) \quad \widehat{D}(Y) = \widehat{P}(Y).$$

Wir haben damit gezeigt, daß (17) für alle  $B \in \mathfrak{B}$  und alle  $Y \in \mathfrak{M}_B \cap M(\mathfrak{Q})$  richtig ist. Damit muß auch  $D(Y) = P(Y)$  für alle  $B \in \mathfrak{B}$  und  $Y \in \mathfrak{M}_B$  sein. Letzteres ist jedoch gleichbedeutend damit, daß  $D = P$  ist.

Unter Verwendung von 9.6 zeigen wir nun:

9.7. *Es seien  $\mathfrak{B}$  eine separable, stetige, flüchtige Verschiebungshalbgruppe und  $P$  ein  $\mathfrak{B}$ -invarianter Punktprozeß endlicher Intensität. Ist  $P$  räumlich ergodisch, so ist  $P$  auch  $\mathfrak{B}$ -extremal.*

**Beweis.** Wegen der Separabilität von  $\mathfrak{B}$  existiert eine abzählbare, stetige, flüchtige Verschiebungshalbgruppe  $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{B}$ . Nach 9.6 ist für jeden  $\mathfrak{Q}$ -invarianten, räumlich ergodischen Punktprozeß  $P^1$  und jeden bezüglich  $P^1$  absolut stetigen  $\mathfrak{B}$ -invarianten Punktprozeß  $P^2$  stets  $P^1 = P^2$ . Weil nun jeder  $\mathfrak{B}$ -invariante Punktprozeß auch  $\mathfrak{Q}$ -invariant ist, muß für jeden bezüglich  $P$  absolut stetigen  $\mathfrak{B}$ -invarianten Punktprozeß  $P'$  stets  $P = P'$  sein. Eine Darstellung der Form  $P = \alpha P' + (1 - \alpha) P''$  mit  $\alpha > 0$ , zieht aber stets nach sich, daß  $P'$  bezüglich  $P$  absolut stetig ist. Wir können deshalb schließen, daß  $P$   $\mathfrak{B}$ -extremal ist. Zum Beweis von Theorem 5 benötigen wir noch die folgende Beziehung:

9.8. *Es seien  $\mathfrak{B}$  eine separable, stetige, flüchtige und mischende Verschiebungshalbgruppe und  $P$  ein  $\mathfrak{B}$ -invarianter Punktprozeß endlicher Intensität. Ist  $P$   $\mathfrak{B}$ -extremal, so muß  $P$  Poissonsches sein.*

**Beweis.** Nach Theorem 4 läßt sich  $P$  in der Form

$$(18) \quad P = \int P_{(\mu)} H(d\mu)$$

darstellen, wobei  $H$  auf der Menge der  $\mathfrak{B}$ -invarianten Maße konzentriert ist. Ist  $P$  nicht Poissonsches, dann existiert eine meßbare Teilmenge  $Y$  von  $N$  mit

$$(19) \quad 0 < H(Y) < 1.$$

Wir setzen  $\alpha = H(Y)$ ,  $H_1 = H(\cdot | Y)$ ,  $H_2 = H(\cdot | Y)$  und haben dann

$$(20) \quad P = \alpha \int P_{(\mu)} H_1(d\mu) + (1 - \alpha) \int P_{(\mu)} H_2(d\mu)$$

Wegen (19) ist  $H \neq H_1$ . Auf Grund von (18) muß deshalb

$$(21) \quad P \neq \int P_{(\mu)} H_1(d\mu).$$

sein (siehe etwa [8] Abschnitt 5.6). Da  $H$  auf der Menge der  $\mathfrak{P}$ -invarianten Maße konzentriert war, muß auch  $H_1$  diese Eigenschaft besitzen.  $\int P_{(\mu)} H_1(d\mu)$  ist also eine  $\mathfrak{P}$ -Mischung und damit  $\mathfrak{P}$ -invariant. Weil (20) und (21) gelten, kann  $P$  deshalb nicht  $\mathfrak{P}$ -extremal sein. Wir haben damit gezeigt, daß  $P$  nicht  $\mathfrak{P}$ -extremal ist, wenn  $P$  nicht Poissonsches ist. Das ist jedoch gleichbedeutend mit der Behauptung von 9.8.

Die Identität der Aussagen a), b), c) und d) unter Theorem 5 folgt nun unmittelbar aus 9.2, 9.3, 9.7 und 9.8.

## LITERATUR

1. H. Debes, A. Liemant, J. Kerstan, K. Matthes. Verallgemeinerungen eines Satzes von Dobrushin I. *Math. Nachr.*, **47**, 1970, 183—244.
2. H. Debes, A. Liemant, J. Kerstan, K. Matthes. Verallgemeinerungen eines Satzes von Dobrushin III. *Math. Nachr.*, **50**, 1971, 99—139.
3. Р. Л. Добрушин. О законе Пуассона для распределения частиц в пространстве. *Украинский мат. ж.*, **8**, 1956, 127—134.
4. K.-H. Fichtner. Gleichverteilungseigenschaften substochastischer Kerne und zufällige Punkfolgen. *Math. Nachr.*, **62**, 1974, 251—266.
5. J. Kerstan, H. Debes. Zufällige Punkfolgen und Markoffsche Übergangsmatrizen ohne stationäre Verteilungsgesetze. *Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena, Math.-Nat. Reihe*, **18**, 1966, H. 2, 343—359.
6. J. Kerstan, K.-H. Fichtner. Approximation von Mischungen Poissonscher Punktprozesse durch verschobene Punktprozesse. *Serdica*, **4**, 1978, 367—376.
7. J. Kerstan, K.-H. Fichtner. Asymptotische Invarianz bei Halbgruppen stochastischer Kerne I. *Serdica*, **5**, 1979, 228—251.
8. J. Kerstan, K. Matthes, J. Mecke. Unbegrenzt teilbare Punktprozesse. Berlin, 1974
9. C. Stone. On a theorem by Dobrushin. *Ann. Math. Stat.*, **39**, 1968, 1391—1401.

Friedrich-Schiller-Universität  
Sektion Mathematik  
UHH, 17.0 G 69 Jena

Eingegangen am 30.3. 1978.