Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПОВЕРХНОСТИ С $p_g=3$, $K^2=3$, ЧАСТЬ 1.

ВАЛЕНТИН В. ИЛИЕВ

В работе дается полное описание поверхностей с $p_g=3$, $K^2=3$ типа I и с обильным каноническим классом. Доказывается, что каждая поверхность такого вида изоморфно вложима как поверхность степени шесть во взвешенном трехмерном пространстве типа (1, 1, 1, 2). При помощи этого представления результаты Хорикавы (1976) выводятся более простым и более естественным образом. Кроме того, описаны полностью поверхности этого вида, которые являются трехлистными циклическими накрытиями Галуа плоскости $\mathbb{P}^2$ и доказано, что их пространство модулей неприводимое и имеет размерность 19.

Пусть S — минимальная поверхность с $p_g=3$, $K^2=3$. В своей работе [8] Хорикава доказал, что каноническая система $|K|$ или не имеет базисных точек, или имеет одну базисную точку. В соответствие с этим мы говорим о поверхностях типа I или о поверхностях типа II. В первой части настоящей работы мы будем занимател поверхностями типа I.

1. Пусть σ — автоморфизм пространства $\mathbb{P}^3$, заданный по формуле

$$\sigma(x_0:x_1:x_2:x_3)=(x_0:x_1:x_2:-x_3). \tag{1}$$

Рассмотрим класс поверхностей Y шестой степени в $\mathbb{P}^3$, которые удовлетворяют следующим условиям:

А) Y — неприводимая и неособая поверхность;

Б) Y — σ-инвариантная поверхность;

В) кривая $H_3=Y\cap v(x_3)$ — неприводимая и неособая.

Эти поверхности имеют вид $Y=v(F)$, где F — неприводимая и гладкая форма шестой степени

$$F=f_6(x_0:x_1:x_2)+f_4(x_0:x_1:x_2)x_3^2+f_2(x_0:x_1:x_2)x_3^4+cx_3^6,\ c\neq 0. \tag{2}$$

Кроме того, форма f_6 ввиду В) также неприводимая и гладкая. Стандартные рассуждения показывают, что многочлены F составляют непустое открытое множество в $\mathbb{P}^{49}$ (49 — число коэффициентов формы F с точностью до постоянного множителя $\neq 0$). Например, многочлен $F=x_0^6+x_1^6+x_2^6+x_3^6$ принадлежит этому множеству. Автоморфизмы σ и $\sigma^2=id$ образуют группу, очевидно изоморфную Z_2. При помощи этого изоморфизма и формулы (1) определено действие группы Z_2 на Y. Множество неподвижных точек совпадает с кривой H_3. Обозначим фактор Y/Z_2 через X.

Теорема 1.1. *Каждая поверхность X, полученная таким образом, минимальна, имеет геометрический род $p_g=3$, $K^2=3$ и относится к I типу. Кроме того, ее канонический класс K является обильным, одноканоническое отображение Φ_K превращает X в трехлистное накрытие плоскости $\mathbb{P}^2$, двуканоническое отображение Φ_{2K} — изоморфное вложение.*

Доказательство. Пусть $\Omega^2_{s,Y}=(\Omega^2_Y)^{\otimes s}$ — пучок 2-форм веса s, $s\geq 1$.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 6, 1980, с. 352—362.

Шаг 1. Определение базиса $\mathbb{C}$ — линейного пространства $H^0(Y, \Omega^2_{s,Y})$.

Это делается, следуя [5, гл. III, § 5, п. 4]. Обозначим $U=Y\cap\{x_0\neq 0\}$, $y_i=x_i/x_0$, $i=1, 2, 3$, $G(y_1, y_2, y_3)=F(x_0:x_1:x_2:x_3)/x_0^6=F(1:y_1:y_2:y_3)$, $U_i=$ множество точек из U, где $\partial G/\partial y_i\neq 0$. Очевидно, например, на U_1 локальными параметрами являются y_2 и y_3 так, что $\Omega^2_{s,Y}[U_1]=\mathbb{C}[U_1]\omega_1^{\otimes s}$, где $\omega_1=-(\partial G/\partial y_1)^{-1}dy_2\wedge dy_3$. Аналогично $\Omega^2_{s,Y}[U_2]=\mathbb{C}[U_2]\omega_2^{\otimes s}$, $\omega_2=(\partial G/\partial y_2)^{-1}dy_1\wedge dy_3$, $\Omega^2_{s,Y}[U_3]=\mathbb{C}[U_3]\omega_3^{\otimes s}$, $\omega_3=-(\partial G/\partial y_3)^{-1}dy_1\wedge dy_2$. Но соотношение $\Sigma(\partial G/\partial y_i)dy_i=0$ показывает, что $\omega_i=\omega_j$ на $U_i\cap U_j$ и, следовательно, все ω_i склеиваются в одну регулярную, нигде не равняющуюся нулю дифференциальную форму на U, причем ясно, что $\Omega^2_{s,Y}[U]=\mathbb{C}[U]\omega_3^{\otimes s}$. Теперь надо исследовать, какие 2-формы веса s из $\Omega^2_{s,Y}[U]$ остаются регулярными, например, при замене координат

$$(3)\qquad z_1=1/y_1,\quad z_2=y_2/y_1,\quad z_3=y_3/y_1,$$

где z_1, z_2, z_3 — афинные координаты на $V=Y\cap\{x_1\neq 0\}$. 2-формы из $\Omega^2_{s,Y}[U]$ имеют вид $\omega=P(y_1, y_2, y_3)\omega_3^{\otimes s}$, где P — многочлен. Вычисления показывают, что ω регулярна на V тогда и только тогда, когда $\deg P\leqq 2s$. В частности, если $H(z_1, z_2, z_3)=G(1/z_1, z_2/z_1, z_3/z_1)$, то на V имеем $\omega_3^{\otimes s}=(-1)^s z_1^{2s}[(\partial H/\partial z_3)^{-1}\times dz_1\wedge dz_2]^{\otimes s}$. Ясно, что $sK_Y=(\omega_3^{\otimes s})=2sH_0$, полная линейная система $|sK_Y|$ состоит из дивизоров вида $(\Phi/x_0^{2s})+2sH_0$, где Φ — форма степени $2s$ и высекается полной линейной системой $|2sL_0|$, $L=\{x_0=0\}$. Канонический $\mathbb{C}$-линейный гомоморфизм $L(2sL_0)\to L(2sH_0)\to 0$ имеет ядро $J_s=M_Y\cap L(2sL_0)$, где $M_Y=(G)\subset\mathbb{C}[y_1, y_2, y_3]$ — идеал аффинной поверхности U. Легко увидеть, что каждый многочлен P, $P\in L(2sL_0)$ имеет вид $P=\Sigma a_{klt}y_1^k y_2^l y_3^t+QG$, где $0\leqq t\leqq 5$ и $a_{klt}\in\mathbb{C}$, $Q\in\mathbb{C}[y_1, y_2, y_3]$ определяются однозначно. Если обозначим через E_s подпространство в $L(2sL_0)$, которое порождается одночленами вида $y_1^k y_2^l y_3^t$, $0\leqq k+l+t\leqq 2s$, $0\leqq t\leqq 5$, то $L(2sL_0)=E_s\oplus J_s$ и $E_s\cong L(2sH_0)$. Теперь очевидно, что $H_0(Y, \Omega^2_{s,Y})=\oplus_{\substack{0\leqq k+l+t\leqq 2s\\ 0\leqq t\leqq 5}}\mathbb{C}y_1^k y_2^l y_3^t\,\omega_3^{\otimes s}$ для $s\geqq 1$.

Шаг. 1. Определение базиса $\mathbb{C}$-линейного пространства $H^0(X, \Omega^2_{s,X})$.

Лемма 1.1. $H^0(X, \Omega^2_{s,X})\cong\left\{\begin{array}{l}\sigma\text{-инвариантные формы } \omega\in H^0(Y, \Omega^2_{s,Y}),\\ \text{чей дивизор делится на } sH_3.\end{array}\right\}$

Доказательство. Пусть $\eta: Y\to X$ — естественная проекция. Отображение $\eta^*: H^0(X, \Omega^2_{s,X})\to H^0(Y, \Omega^2_{s,Y})$ — инъективный $\mathbb{C}$-линейный гомоморфизм, и равенство $(\eta^*\omega)=\eta^*(\omega)+sH_3$ показывает, что образ $\operatorname{Im}\eta^*$ содержится в подпространстве, определенном справа. Надо доказать обратное включение. Пусть $\omega\in H^0(Y, \Omega^2_{s,Y})$ — σ-инвариантная 2-форма веса s и sH_3 делит дивизор (ω). Тогда если $\omega=P\omega_3^{\otimes s}$, то $P(y_1, y_2, y_3)=y_3^s\widetilde{P}(y_1, y_2, y_3)$, где $\deg\widetilde{P}\leqq s$ (y_3 — локальное уравнение кривой H_3 в U). Так как ω — σ-инвариантная, то $P(y_1, y_2, y_3)=\widetilde{P}_1(y_1, y_2, y_3^2)$ и $\omega=\widetilde{P}_1(y_1, y_2, y_3^2)[(\partial G/\partial y_2)^{-1}dy_1\wedge dy_3^2]^{\otimes s}$, т. е. $\omega\in\operatorname{Im}\eta^*$. Доказательство леммы окончено.

Дальше из уравнения $G=0$ следует представление многочлена P: $P=y_3^s\Sigma a_{klt}\,y_1^k y_2^l y_3^{2}\epsilon$, $0\leq k+l+2t\leq s$, $0\leq t\leq 2$ и оно однозначно, потому что y_3 и G является взаимно простыми многочленами. Обозначим через E_s^* подпространство в E_s, порожденное одночленами вида $y_1^k y_2^l y_3^{2t+s}$, $0\leq k+l+2t\leq s$, $0\leq t\leq 2$. Для каждого $s\geq 1$ имеем $y_3^s\in E_s^*$ и если $\omega=y_3^s\omega_3^{\otimes s}$, то замена координат (3) показывает, что $\omega=z_1^s z_3^s[(\partial H/\partial z_3)^{-1}dz_1\wedge dz_2]^{\otimes s}$ на V, т. е. $(\omega)=sH_0+sH_3$. Вблизи точки $x\in H_3$ имеем запись $\omega=(-1)^s z_1^s z_3^s[(\partial H/\partial z_2)^{-1}dz_1\wedge dz_3]^{\otimes s}$ и так как z_1, z_3^2 являются локальными координатами в окрестности точки $y=\eta(x)$, представление $\omega=(-1/2)^s z_1^s[(\partial H/\partial z_2)^{-1}dz_1\wedge dz_3^2]^{\otimes s}$ дает, что $(\omega)|_X=sH_0^*$, где $H_0^*=\eta(H_0)$. В частности, можно положить $K_X=H_0^*$ и тогда $L(sK_X)=\oplus_{\substack{0\leq k+l+2t\leq s\\ 0\leq t\leq 2}}\mathbb{C}y_1^k y_2^l y_3^{2t}$, причем умножение на $1/y_3^s$ устанавливает изоморфизм $E_s^*\xrightarrow{\cong}L(sK_X)$. Кроме того, ясно, что

$$H^0(X,\Omega^2_{s,X})=\oplus_{\substack{0\leq k+l+2t\leq s\\ 0\leq t\leq 2}}\mathbb{C}y_1^k y_2^l y_3^{2t+s}\omega_3^{\otimes s}\quad \text{для}\ \ s\geq 1.$$

Шаг. 3. $p_g=3$, $K^2=3$.

Доказательство. Мы уже доказали в Шаге 2, что $p_g=\dim_{\mathbb{C}}H^0(X,\Omega^2_X)=3$. Предположение В) для поверхности Y показывает, что H_3-гладкая плоская кривая степени 6. Тогда $g=$ род $H_3=10$. С другой стороны, $K_Y\sim 2H_0\sim 2H_3$ и, следовательно, $g=(1/2)(H_3, H_3+K_Y)+1=(3/2)H_3^2+1$, т. е. $H_3^2=6=H_0^2$. Так как $K_X=H_0^{*2}=(1/2)H_0^2$, то $K_X^2=3$.

Шаг 4. X — минимальная поверхность.

Доказательство. Допустим, что X не минимальная. Тогда критерий Кастельнуово [4, гл. II, § 2] дает нам, что существует гладкая неприводимая рациональная кривая Λ с $\Lambda^2=-1$. Формула $g(\Lambda)=(1/2)(\Lambda, \Lambda+K_X)+1$ ввиду $g(\Lambda)=0$ дает $(\Lambda, H_0^*)=-1$. Следовательно $(\eta^*\Lambda, H_0)=-2$ и так как $\eta^*\Lambda$ является эффективным дивизором, мы получили противоречие (всегда можно выбрать неприводимое гиперплоское сечение поверхности Y, которое не является компонентой дивизора $\eta^*\Lambda$).

Рассмотрения в Шаге 2 показывают, что $L(K_X)=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}y_1\oplus\mathbb{C}y_2$, $L(2K_X)=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}y_1\oplus\mathbb{C}y_2\oplus\mathbb{C}y_1^2\oplus\mathbb{C}y_1y_2\oplus\mathbb{C}y_2^2\oplus\mathbb{C}y_3^2$, и этот выбор базисов определяет канонические отображения Φ_{K_X} и Φ_{2K_X}.

Шаг 5. Φ_{K_X} — трехлистное накрытие и диаграмма

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "j"'] \arrow[d, "\eta"'] & \mathbb{P}^3 \arrow[d, "\mathrm{pr}"] \\ X \arrow[r, "\Phi_{K_X}"] & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

коммутативна (здесь $j: Y\to\mathbb{P}^3$ — естественное вложение).

Доказательство. Это очевидно.

Этим доказывается и

Шаг. 6. X — поверхность I типа.

Шаг. 7. $\Phi_{2K_X}: X\to\mathbb{P}^6$ является изоморфным вложением.

Доказательство. Φ_{2K_X} задается формулой

$$\Phi_{2K_X}(y)=\begin{cases}(1:y_1(y):y_2(y):y_1^2(y):y_1(y)\,y_2(y):y_2^2(y):y_3^2(y)); & y\in U^*\\ (z_1^2(y):z_1(y):z_1(y)z_2(y):1:z_2(y):z_2^2(y):z_3^2(y)); & y\in V^*\end{cases}$$

и, следовательно, является регулярным отображением. Ясно, что на Y оно $2-1$ в теоретико-множественном смысле и, кроме того, $\mathbb{Z}_2$ — инвариантное, т. е. на X Φ_{2K_X} — инъективное отображение. Вычисление якобиана показывает, что Φ_{2K_X} — замкнутая иммерсия; доказательство окончено.

Шаг 7 показывает, что дивизор $2K_X$ очень обилен, т. е. мы доказали и

Шаг. 8. K_X — обильный дивизор.

Доказательство Теоремы 1.1. окончено.

2. Обращение Теоремы 1.1. Пусть $b_0, \ldots, b_n$ — натуральные числа, G — подгруппа группы $PGL(n, \mathbb{C})$, составленная из матриц вида

$$\begin{pmatrix}\exp(2\pi i\beta_0/b_0) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(2\pi i\beta_n/b_n)\end{pmatrix},$$

где $0\leq\beta_i<b_i$, $\beta_i\in\mathbb{Z}$ для $i=0, 1, \ldots, n$.

Определение 2.1. (см. [11]). *Фактор $\mathbb{P}^n/G$ называется n-мерным взвешенным проективным пространством типа $(b_0, \ldots, b_n)$ и обозначается $\mathbb{P}^n(b_0, \ldots, b_n)$.*

Определение 2.2. *$f(w_0, \ldots, w_n)$ называется квазиоднородным многочленом типа $(b_0, \ldots, b_n)$ и степени d, если он $\mathbb{C}$-линейная комбинация одночленов вида $w_0^{s_0}\ldots w_n^{s_n}$ с $s_0b_0+\cdots+s_nb_n=d$.*

Если $b_0=1$, $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3=2$, то $G\cong\mathbb{Z}_2$ и состоит из автоморфизмов σ, $\sigma^2=\mathrm{id}$ пространства $\mathbb{P}^3$ (см. п. 1.). Теперь ясно, что фактор $Y/\mathbb{Z}_2=X$ изоморфно вложен в $\mathbb{P}^3(1, 1, 1, 2)$ так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow[j]{} & \mathbb{P}^3\\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}\\ X & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^3(1,1,1,2)\end{array}$$

коммутативна. Кроме того, если положить $w_0=x_0$, $w_1=x_1$, $w_2=x_2$, $w_3=x_3^2$ и заметить, что $F(x_0:x_1:x_2:x_3)=F^*(x_0, x_1, x_2, x_3^2)$, то $j^\sigma(X)=v(F^*)$ в $\mathbb{P}^3(1, 1, 1, 2)$, где $F^*=F^*(w_0, w_1, w_2, w_3)$ — квазиоднородный многочлен типа $(1, 1, 1, 2)$ и степени 6. Следовательно можно сказать, что каждая поверхность в $\mathbb{P}^3(1, 1, 1, 2)$, определенная как множество нулей неприводимого гладкого квазиоднородного многочлена типа $(1, 1, 1, 2)$ и степени 6, имеет инварианты $p_g=3$, $K^2=3$, относится к I типу и имеет свойства, указанные в Теореме 1.1. Основная теорема настоящей работы является обратной к Теореме 1.1.

Теорема 2.1. *Пусть S — минимальная поверхность с $p_g=3$, $K^2=3$, типа I и обильным каноническим дивизором K. Тогда S изоморфно влагается в $\mathbb{P}^3(1, 1, 1, 2)$ как множество X, состоящее из всех нулей неприводимого гладкого квазиоднородного многочлена типа $(1, 1, 1, 2)$ и степени 6.*

Доказательство.

Лемма 2.1. (Хорикава) *Φ_K — трехлистное накрытие плоскости $\mathbb{P}^2$.*

Доказательство [8, § 2].

Лемма 2.2. (Хорикава) *Φ_{2K} — регулярный бирациональный изоморфизм.*

Доказательство [8, § 2].

Пусть $H^0(S, O(K)) = \mathbb{C}\lambda_0 \oplus \mathbb{C}\lambda_1 \oplus \mathbb{C}\lambda_2$. Формула Кодаиры для полирода [6, § V] имеет в этом случае вид $P_m = (3/2)m(m-1)+4$, $m \geq 2$, и, следовательно, $P_2 = 7$. Сечения $\lambda_i\lambda_j$, $0 \leq i \leq j \leq 2$, являются линейно независимыми элементами пространства $H^0(S, O(2K))$ размерности 7, и можно дополнить эту систему до базиса:

$$H^0(S, O(2K)) = \mathbb{C}\lambda_0^2 \oplus \mathbb{C}\lambda_1^2 \oplus \mathbb{C}\lambda_2^2 \oplus \mathbb{C}\lambda_0\lambda_1 \oplus \mathbb{C}\lambda_0\lambda_2 \oplus \mathbb{C}\lambda_1\lambda_2 \oplus \mathbb{C}\mu.$$

Для наших целей надо выбрать глобальное сечение μ пучка $O(2K)$ таким образом, что его дивизор $C = (\mu)$ — гладкая неприводимая кривая. Но из Леммы 2.2. следует, в частности, что образ $\Phi_{2K}(S)$ — поверхность так, что первая теорема Бертини [4, гл. I, § 3] обеспечивает существование сечения μ. Пусть $\{U_i\}$ — открытое (в комплексно-аналитической топологии) покрытие поверхности S такое, что каноническое расслоение $\pi: K \to S$ тривиализируется на каждом U_i и имеет функции перехода $J_{ij} \in O^*(U_i \cap U_j)$. Допустим, что глобальное сечение μ пучка $O(2K)$ задается системой функций $\mu_i \in O(U_i)$, $\mu_i = J_{ij}^2 \mu_j$ в $U_i \cap U_j$, μ_i — локальное уравнение кривой C на U_i. Кроме того, можно предположить (после эвентуального измельчения покрытия $\{U_i\}$), что μ_i — одна из локальных координат u_i, v_i, например, $\mu_i = u_i$ в такие U_i, для которых $U_i \cap C \neq \varnothing$ (C — гладкая кривая). Обозначим через T компактную поверхность, которую на тривиализации $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}$ имеет уравнение $\xi_i^2 = \mu_i$, ξ_i — слойная координата для окрестности U_i. Очевидно $\pi: T \to S$ — двулистное циклическое накрытие с кривой ветвления Γ, $\Gamma|_{\pi^{-1}(U_i)} = \{\xi_i = 0\}$ $\Gamma \cong C$ и одна теорема Грауерта обеспечивает, что T является алгебраической поверхностью [12, § 1]. В $\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j)$ имеем $\xi_i = J_{ij}\xi_j$ так, что система функций $\xi_i \in O(\pi^{-1}(U_i))$ определяет глобальное сечение ξ индуцированного расслоения π^*K на T и $(\xi) = \Gamma$, т. е. $\Gamma \in |\pi^*K|$. Кроме того, по построению $\xi^2 = \mu$.

Лемма 2.3. $H^0(T, O(m\pi^*K)) \simeq H^0(S, O((m-1)K)) \oplus H^0(S, O(mK))$, $m \geq 1$.

Доказательство. Пусть σ — инволюция расслоения K, определенная формулой $\xi_i \to -\xi_i$. Очевидно σ совместима с канонической проекцией $\pi: K \to S$ и поверхность T σ-инвариантна, т. е. σ является инволюцией поверхности T. Имеем $\mathrm{Gal}(T/S) \cong (\sigma) \cong Z_2$, группа Z_2 действует на $\mathbb{C}$-линейное пространство $H^0(T, O(m\pi^*K))$ и разлагает его на инвариантное и антиинвариантное подпространства: $H^0(T, O(m\pi^*K)) = H^0(T, O(m\pi^*K))^+ \oplus H^0(T, O(m\pi^*K))^-$. Очевидно $H^0(T, O(m\pi^*K))^+ \cong \pi^*H^0(S, O(mK))$. Каждому сечению α' из $H^0(T, O((m-1)\pi^*K))$ сопоставим сечение $\alpha' \otimes \xi$ из $H^0(T, O(m\pi^*K))$. Так как ξ является глобальным сечением в π^*K, не равным тождественно нулю ни на каком открытом подмножестве из T, то мы получаем инъективный $\mathbb{C}$-линейный гомоморфизм $H^0(T, O((m-1)\pi^*K) \to H^0(T, O(m\pi^*K))$. Очевидно образ подпространства $H^0(T, O((m-1)\pi^*K))^+$ содержится в $H^0(T, O(m\pi^*K))^-$. Пусть теперь $\alpha \in H^0(T, O(m\pi^*K))^-$, т. е. $\alpha^\sigma = -\alpha$ и пусть $x \in \Gamma$. Тогда $x \in \pi^{-1}(U_i)$ с $U_i \cap C \neq \varnothing$ и в $\pi^{-1}(U_i)$ поверхность T имеет уравнение $\xi_i^2 = u_i$, где u_i, v_i — выбранная в начале доказательства система локальных координат. Допустим, что система u_i, v_i центрирована в точке $y = \pi(x)$, т. е. $v_i(y) = 0$. Ясно, что ξ_i, v_i — система локальных координат в точке x и если $\alpha = \alpha_i(\xi_i, v_i)$, то $\alpha^\sigma = \alpha_i(-\xi_i, v_i)$

вблизи x. Рассмотрим ряд Тейлора для функции a_i относительно $\xi_i, v_i : a_i(\xi_i, v_i) = \Sigma a_{kl}\, \xi_i^k v_i^l$. Тогда $a_i^\sigma = a_i(-\xi_i, v_i) = \Sigma(-1)^k a_{kl}\, \xi_i^k v_i^l$ и равенство $a_i^\sigma = -a_i$ дает, что $a_{kl} = 0$ для $k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$, т. е. в окрестности точки x имеем $a_i = \xi_i a'_i$, где $a'_i \in O_x$. Около точки $x \notin \Gamma$ определяем a'_i при посредстве этого равенства (ξ_i — обратимый элемент кольца O_x). Так как локальные кольца O_x — факториальные, то из равенства $a'_i \xi_i = J^m_{i,j}\, a'_j \xi_j = J^{m-1}_{ij}\, a'_j J_{ij} \xi_j = J^{m-1}_{ij}\, a'_j \xi_i$ в $\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j)$ получаем $a'_i = J^{m-1}_{ij} a'_j$, т. е. система функции $a'_i \in O(\pi^{-1}(U_i))$ определяет глобальное сечение a' из $H^0(T, O((m-1)\pi^*K))^+$ и очевидно $a = a' \otimes \xi$. Окончательно получаем изоморфизмы $H^0(T, O(m\pi^*K))^- \cong H^0(T, O((m-1)\pi^*K))^+ \cong H_0(S, O((m-1)K))$, откуда следует заключение леммы.

Следствие 1. $\dim_{\mathbb{C}} H^0(T, O(m\pi^*K)) = P_{m-1}(S) + P_m(S)\ (P_0 = 1)$.

Следствие 2. $H^0(T, O(\pi^*K)) = \mathbb{C}\lambda_0 \oplus \mathbb{C}\lambda_1 \oplus \mathbb{C}\lambda_2 \oplus \mathbb{C}\xi$.

Значит диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\Phi_{\pi^*K}} & \mathbb{P}^3 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr} \\ S & \xrightarrow{\Phi_K} & \mathbb{P}^2 \end{array} \tag{4}$$

коммутативна. Тогда очевидна

Лемма 2.4. *Φ_{π^*K} — регулярное отображение и образ $Y = \Phi_{\pi^*K}(T)$ — неприводимая замкнутая σ-инвариантная поверхность в $\mathbb{P}^3$.*

Лемма 2.5. *Поверхность T минимальна и имеет инварианты $p_g = 10$, $K_T^2 = 24$.*

Доказательство. Пусть Λ — исключительная кривая первого рода на T, т. е. $g(\Lambda) = 0$, $\Lambda^2 = -1$. Формула для рода гладкой кривой на поверхности дает $(\Lambda, K_T) = -1$. С другой стороны, $K_T \sim 2\pi^*K$ и, следовательно, $2(\Lambda, \pi^*K) = -1$ — возникает противоречие. При помощи Леммы 2.3. получаем $p_g = \dim_{\mathbb{C}} H^0(T, O(2\pi^*K)) = 10$ и $K_T^2 = 4(\pi^*K)^2 = 8K^2 = 24$.

Лемма 2.6. *Если дивизор K — обильный, то дивизор K_T — тоже обильный.*

Доказательство. Простое применение критерия Накая—Мойшезона [7, гл. V]. Легко можно установить, что верны

Лемма 2.7. *Φ_{2K} — инъективное в открытом множестве $U \subset S$ тогда и только тогда, когда Φ_{π^*K} — инъективное в $\pi^{-1}(U) \subset T$.*

Лемма 2.8. *Если $\pi(x) = y$, то Φ_{2K} — иммерсия в точке y тогда и толко тогда, когда Φ_{π^*K} — иммерсия в точке x.*

Доказательство последней леммы осуществляется сравнением рангов матриц кокасательных отображений, соответствующих отображениям Φ_{2K} и $\Phi_{\pi+K}$.

Лемма 2.2. дает, что существуют открытые множества $U \subset S$ и $V \subset S'$, где $S' = \Phi_{2K}(S) \subset \mathbb{P}^6$, такие, что $\Phi_{2K} : U \to V$ — изоморфизм. Пусть $H_i(z_0 : \ldots : z_6) = 0$, $i = 1, \ldots s$, являются уравнениями множества $S' - V$ в $\mathbb{P}^6$. Тогда $H_i(\lambda_0^2 : \ldots : \xi^2) = 0$, $i = 1, \ldots, s$, — уравнения множества $S - U$ и $T - \pi^{-1}(U)$. Обозначим через W дополнение подмножества, определенное в Y с этими уравнениями. Тогда при помощи Леммы 2.7. получаем, что $\Phi_{\pi^*K} : \pi^{-1}(U) \to W$ — регулярная биекция. С другой стороны, диаграмма (4) определяет двойственную диаграмму полей, и Лемма 2.4 дает $[\mathbb{C}(Y) : \mathbb{C}(\mathbb{P}^2)] = 2$ или 6. Допустим, что $[\mathbb{C}(Y):\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)]=2$. Пусть $z\notin \mathrm{pr}\,(Y-W)\cup\Phi_K(C)\cup$ {гнезда ветвления Φ_K}. Тогда $\#\pi^{-1}(\Phi_K^{-1}(z))=6$, $\#\Phi_{\pi^*K}^{-1}(\mathrm{pr}^{-1}(z))\leq 2$ — противоречие. Следовательно $[\mathbb{C}(Y):\mathbb{C}(\pi^2)]=6$, $[\mathbb{C}(T):\mathbb{C}(Y)]=1$, и мы получили

Лемма 2.9. *Φ_{π^*K} — регулярный бирациональный изоморфизм и его образ Y — поверхность шестой степени в $\mathbb{P}^3$.*

Пусть $Y=V(F)$, $F=F(x_0:x_1:x_2:x_3)$ — форма степени 6, которая имеет вид (2). Тогда имеем изоморфизм $Y\cong \mathrm{Proj}\,(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]/(F))$. Обозначим $H^0(T, O(m\pi^*K))$ через R_m и пусть $R=\oplus_{m\geq 0}R_m$ — соответственное градуированное кольцо. Заметим, что $R_0=\mathbb{C}$, $R_1=\mathbb{C}\lambda_0\oplus\mathbb{C}\lambda_1\oplus\mathbb{C}\lambda_2\oplus\mathbb{C}\xi$.

Лемма 2.10. *$\mathbb{C}$-алгебра R порождается однородными элементами первой степени: $R=\mathbb{C}[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \xi]$.*

Доказательство. Очевидно $F(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \xi)=0$ — единственное алгебраическое соотношение, которое связывает $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \xi$, откуда следует $\dim_{\mathbb{C}} R_1^m=\binom{m+3}{3}-\binom{m-3}{3}$ (здесь подразумевается, что $\binom{m-3}{3}=0$ для $m<6$). Но Лемма 2.3., Следствие 1 дает $\dim_{\mathbb{C}} R_m=P_m+P_{m-1}=(3/2)\,m\,(m-1)+4+(3/2)\,(m-1)\,(m-2)+4=3(m-1)^2+8$ для $m\geq 3$, $\dim_{\mathbb{C}} R_2=10$ так, что $\dim_{\mathbb{C}} R_1^m=\dim_{\mathbb{C}} R_m$ для $m\geq 1$. Лемма доказана.

Теперь ясно, что $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]/(F)\cong R$ и $\mathrm{Proj}\,(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]/(F))\cong \mathrm{Proj}\,R$. Дальше имеем $\mathrm{Proj}\,R=\mathrm{Proj}\,(\oplus_{m\geq 0}R_m)\cong \mathrm{Proj}\,(\oplus_{m\geq 0}R_{2m})\cong Z=\mathrm{Proj}\,(\oplus_{m\geq 0}H^0(T, O(mK_T)))$. Последняя схема — это абстрактная каноническая модель поверхности T (см. [6, § I]), и мы получили, что образ Y изоморфен схеме Z. Обозначим через $E_1, \ldots, E_t$ все кривые с $K_TE_i=0$. Множество $\{E_i\}$ характеризуется двумя условиями (там же, § II):

а) E_i — рациональная кривая;

б) $E_i^2=-2$.

М. Артин доказал (там же, § II), что существует регулярное отображение $\delta: T\to Z$ со следующими свойствами:

в) ограничение $\delta: T-\cup_{i=1}^t E_i\to Z-\mathrm{Sing}\,(Z)$ является изоморфизмом;

г) если $z\in \mathrm{Sing}\,(Z)$, то ее прообраз $\delta^{-1}(z)$ равняется $\cup E_i$, где $\cup E_i$ — какая-то связная компонента объединения $\cup_{i=1}^t E_i$. Кроме того, множество $\mathrm{Sing}\,(Z)$ особых точек состоит из двойных рациональных особенностей. Так как поверхность T минимальная, то $\delta: T\to Z$ — это минимальное разрешение особенностей поверхности Z. Коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\Phi_{\pi^*K}"] \arrow[d, "\delta"'] & Y \\ Z \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

показывает, что верна

Лемма 2.11. *Y — поверхность шестой степени в $\mathbb{P}^3$ с двойными рациональными особыми точками и отображение $\Phi_{\pi^*K}: T\to Y$ является минимальным разрешением этих особенностей.*

В нашем случае дивизор K_T — обильный, т. е. множество $\{E_i\}$ — пустое, и тогда, очевидно, отображение $\Phi_{\pi^*K}: T\to Y$ является изоморфизмом. В частности, Y — гладкая поверхность. Так как $\Phi_{\pi^*K}\circ\sigma=\sigma\circ\Phi_{\pi^*K}$, то Y — σ-инвариантная поверхность и, следовательно, фактор-отображение $\Phi^{\sigma}_{\pi^*K}: S\to X$ является изоморфизмом (здесь $X=Y/Z_2$). Теорема 2.1. полностью доказана. Из Теорема 2.1. и 1.1. сразу получается

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы* 2.1., *то* Φ_{2K} *является изоморфным вложением.*

Это уточнение результата Хорикавы из Леммы 2.2.

3. Описание поверхностей с $p_g=3$, $K^2=3$, для которых одноканоническое отображение Φ_K является трехлистным циклическим накрытием Галуа плоскости $\mathbb{P}^2$ (коротко: CGC-поверхности). Пусть S — CGC-поверхность. Тогда по определению в S существует гладкая кривая B такая, что рестрикция отображения $\pi=\Phi_K$ на $S-B$ — неразветвленное трехлистное накрытие на $\mathbb{P}^2-\Lambda$, $\Lambda=\pi(B)$, а $\pi|_B: B\to\Lambda$ является изоморфизмом. B — это кривая ветвления для π, Λ — гнездо ветвления.

Лемма 3.1. *Λ — кривая шестой степени в плоскости* $\mathbb{P}^2$.

Доказательство. Пусть прямая l в $\mathbb{P}^2$ пересекает трансверсально Λ и, кроме того, $\pi^*l=K$ — неприводимая и неособая кривая из канонической системы $|K|$ (первая теорема Бертини обеспечивает существование прямой l). Тогда $\pi|_K: K\to l$ — трехлистное накрытие Галуа, разветвленное в точках множества $K\cap B$, которые имеют кратность ветвления 2. Очевидно $\# K\cap B=\# l\cap\Lambda$. Формула Гурвица (см. [7, гл. IV, § 2]) дает $2g(K)-2=3[2g(l)-2]+\Sigma_{x\in l\cap\Lambda}2$. С другой стороны, имеем $g(l)=0$, $g(K)=(1/2)(K, K+K)+1=K^2+1=4$, т. е. $\# l\cap\Lambda=6$ и, следовательно, $\deg\Lambda=6$.

Из работы Саврика [12, Теорема 1.2] следует, что существует линейное расслоение N на $\mathbb{P}^2$ и открытое (в комплексно-аналитической топологии плоскости $\mathbb{P}^2$) покрытие $\{V_j\}$ такое, что N тривиализируется на каждом V_j, и поверхность S можно идентифицировать с подмногообразием расслоения N, заданным уравнениями $\eta_j^3=\Phi_j$, где η_j — слойная координата и Φ_j — локальное уравнение кривой Λ в V_j.

Так как группа $H^1(\mathbb{P}^2, O^*_{\mathbb{P}^2})$ классов изоморфных линейных расслоений изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел, то ввиду $N^3=O_{\mathbb{P}^2}(6)$ можно предположить, что $N=O_{\mathbb{P}^2}(2)$. Линейное расслоение $\pi: O_{\mathbb{P}^2}(2)\to\mathbb{P}^2$ тривиализируется на стандартном покрытии $\mathbb{P}^2=U_0\cup U_1\cup U_2$, где $U_i=\{x_i\neq 0\}$ и имеет в $U_i\cap U_k$ функции перехода $s_{ik}=(x_k/x_i)^2$. Из доказательства цитированной теоремы Саврика следует возможность предположить, что покрытие $\{V_j\}$ вписано в покрытии $\{U_i\}$. Так как $H^1(\mathbb{P}^2, O^*_{\mathbb{P}^2})=H^1(\{U_i\}, O^*_{\mathbb{P}^2})$, то легко увидеть, что верно

Предложение 3.1. *Если S—CGC-поверхность, то она изоморфно отображается на поверхность в $O_{\mathbb{P}^2}(2)$, заданной в стандартной тривиализации $\pi^{-1}(U_i)\cong U_i\times\mathbb{C}$, $U_i=\{x_i\neq 0\}$, $i=0, 1, 2$, уравнением $\mu_i^3=G_i$, где μ_i — слойная координата, $G_i=G/x_i^6$, G — гладкая форма шестой степени.*

Теперь будем доказывать обратное предложение.

Предложение 3.2. *Пусть S — поверхность в $O_{\mathbb{P}^2}(2)$, заданная на стандартной тривиализации уравнением $\mu_i^3=G_i$, $G_i=G/x_i^6$, G — гладкая форма шестой степени. Тогда S — минимальная поверхность, имеет инварианты $p_g=3$, $K^2=3$* и является CGC-поверхностью.

Доказательство. Обозначим через σ автоморфизм расслоения $O_{\mathbb{P}^2}(2)$, заданный по формуле $\mu_i \to \varepsilon\mu_i$, где ε — примитивный корень 3-ей степени из единицы. Ясно, что поверхность S является σ-инвариантной, и тогда σ индуцирует автоморфизм этой поверхности (который обозначим снова через σ). Циклическая группа третьего порядка (σ) изоморфна группе Z_3 и, очевидно, является группой Галуа CGC-накрытия $S \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^2$. Кривая ветвления $B = S \cap \{\mu_i = 0\}$ этого накрытия изоморфна кривой $\Lambda = \{G = 0\} \subset \mathbb{P}^2$. Дальше имеем $K_S \sim \pi^*(K_{\mathbb{P}^2}) + 2B \sim \pi^*(-3l_0) + 2B = -3\pi^* l_0 + 2B$, где $l_0 = \{x_0 = 0\} \subset \mathbb{P}^2$. Функция μ_0 рациональна на S (регулярна на $\pi^{-1}(U_0)$) и равенства $\mu_0 = s_{0k}\mu_k$, $k = 1, 2$, показывают, что дивизор (μ_0) равен $B - 2\pi^* l_0$. Тогда, очевидно, $K_S \sim -3\pi^* l_0 + 2B = \pi^* l_0 + (\mu_0^2) \sim \pi^* l_0$ и $K_S^2 = 3l_0^2 = 3$. Так как $\pi^* l \in |K_S|$ для каждой прямой $l \subset \mathbb{P}^2$, очевидно $\dim_{\mathbb{C}} |K_S| \geqq 2$, т. е. $p_g \geqq 3$. Если S является минимальной поверхностью, то одна теорема М. Нетера (см. [6, § X]) обеспечивает неравенство $3 \geqq 2p_g - 3$, т. е. $p_g \leqq 3$ и, следовательно, $p_g = 3$. Итак, допустим, что S не минимальна. Тогда на S существует неприводимая рациональная кривая E с $-1 = (E, K_S) = (E, \pi^* l_0)$. Но общий член $\pi^* l$ линейной системы, которой задает отображение π, является неприводимым по первой теореме Бертини, и его всегда можно выбрать неравным кривой E — противоречие.

Следующая теорема устанавливает связь между теоремами 1.1 и 2.1., с одной стороны, и предложениями 3.1. и 3.2. — с другой.

Теорема 3.1. *Поверхность S с инвариантами $p_g = 3$, $K^2 = 3$ типа* I *с обильным каноническим классом тогда и только тогда является* CGC-*поверхностью, когда в представлении из теоремы* 2.1. *имеем* $f_2 = f_4 = 0$ (см. (2)).

Доказательство. Часть „тогда" тривиальная. Пусть теперь S является CGC-поверхностью. Тогда можно предположить, что $S \subset O_{\mathbb{P}^2}(2)$, как это показано в предложении 3.1. Набор $\{\mu_i\}$ слойных координат (см. доказательство предложения 3.2) определяет глобальное сечение μ пучка $O(2K_S)$ и $(\mu) = B$. Кроме того, в $H^0(S, O)6K_S))$ имеем очевидно $\mu^3 = G(x_0 : x_1 : x_2)$. Теперь ясно, что если в доказательстве теоремы 2.1. положим $C = B$, то на T получим $\xi^2 = \mu$, $\xi^6 = G(x_0 : x_1 : x_2)$, т. е. уравнение поверхности $X(X \cong S)$ имеет вид $f_6(x_0 : x_1 : x_2) - x_3^6 = 0$, где f_6 — неприводимая и гладкая форма шестой степени.

Предложение 3.3. *Две* CGC-*поверхности S' и S'' изоморфны тогда и только тогда, когда гнезда ветвления Λ' и Λ'' — проективно еквивалентны в $\mathbb{P}^2$.*

Доказательство. Часть „тогда" тривиальная ввиду теоремы 3.1. Пусть теперь S' и S'' являются изоморфными CGC-поверхностями и пусть $\varphi : S' \to S''$ — один из изоморфизмов. φ индуцирует изоморфизм $\mathbb{C}$-линейных пространств $\varphi^* : H^0(S'', O(K_{S''})) \to H^0(S', O(K_{S'}))$. Канонические отображения $\pi' : S' \to \mathbb{P}^2$, $\pi'' : S'' \to \mathbb{P}^2$ задаются выбором базиса: $H^0(S', O(K_{S'})) = \mathbb{C}\sigma_0' \oplus \mathbb{C}\sigma_1' \oplus \mathbb{C}\sigma_2'$, $H(S'', O(K_{S''})) = \mathbb{C}\sigma_0'' \oplus \mathbb{C}\sigma_1'' \oplus \mathbb{C}\sigma_2''$ и сечения $\varphi^*(\sigma_i')$ образуют так же базис пространства $H^0(S', O(K_{S'}))$. Тогда существует неособое линейное преобразование α такое, что $\varphi^*(\sigma_i'') = \alpha(\sigma_i')$, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi'"'] & S'' \arrow[d, "\pi''"] \\ \mathbb{P}^2 \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

коммутативна. Так как гнездо ветвления Λ' накрытия π' характеризуется теоретико-множественным образом: $y\in\Lambda' \Longleftrightarrow \#\,\pi'^{-1}(y)=1$, то очевидно $\alpha\Lambda'=\Lambda''$.

4. Модули. Следующая теорема доказана впервые Хорикавой в [8, § 5]. Доказательство, данное здесь, изпользует представление поверхности S из Теоремы 2.1. и, как нам кажется, более простое и более естественное.

Теорема 4.1. *Пусть S — минимальная поверхность с $p_g=3$, $K^2=3$ типа I и ее канонический класс K является обильным. Тогда число модулей $m(S)$ существует и равно 34. Пространство модулей — неособое в точке S.*

Доказательство.

Лемма 4.1. *Если выполнены условия теоремы 4.1, то $H^0(S,\Theta)=0$ и $H^2(S,\Theta)=0$, где Θ — локально свободный пучок, связанный с касательным расслоением.*

Доказательство. По двойственности Серра имеем $\dim_{\mathbb{C}} H^0(S,\Theta) = \dim_{\mathbb{C}} H^2(S,\Omega_S^1(K)) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S,\Omega_S^1(-K))$. Пусть K — неприводимая неособая кривая из канонической системы $|K|$. Короткая точная последовательность

$$0\to\Omega_S^1(-K)\to\Omega_S^1\to\Omega_{S\,|\,K}^1\to 0$$

индуцирует когомологическую последовательность

$$0\to H^0(S,\Omega_S^1(-K))\to H^0(S,\Omega_S^1)\to\cdots$$

Но $\dim_{\mathbb{C}} H^0(S,\Omega_S^1)=q=$ иррегулярность поверхности $S=0$ (см. [6, § X, Th. 13]). Следовательно $H^0(S,\Omega_S^1(-K))=0$. Вычислим $\dim_{\mathbb{C}} H^2(S,\Theta)$. Опять по двойственности Серра имеем $\dim_{\mathbb{C}} H^2(S,\Theta)=\dim_{\mathbb{C}} H^0(S,\Omega_S^1(K))$. Теперь воспользуемся теоремой 1.1. и представлением поверхности S из теоремы 2.1. В обозначениях п. 1 получаем $H^0(X,\Omega_X^1(K))=H^0(X,\Omega_X^1([H_0^*]))\cong\eta^*H^0(X,\Omega_X^1([H_0^*]))\subset H^0(Y,\Omega_Y^1([H_0]))$ (здесь $X\cong S$). Докажем, что $H^0(Y,\Omega_Y^1([H_0]))=0$. Имеем точную последовательность Севери (см. [3, § 15]):

$$0\to\Omega'^1_{\mathbb{P}^3}([H_0])\to\Omega^1_{\mathbb{P}^3}([H_0])\to\Omega_Y^1([H_0])\to 0$$

и соответствующую когомологическую последовательность

$$\begin{aligned}(5)\qquad &0\to H^0(\mathbb{P}^3,\Omega'^1_{\mathbb{P}^3}([H_0]))\to H^0(\mathbb{P}^3,\Omega^1_{\mathbb{P}^3}([H_0]))\\ &\to H^0(Y,\Omega_Y^1([H_0]))\to H^1(\mathbb{P}^3,\Omega'^1_{\mathbb{P}^3}([H_0]))\to\cdots\end{aligned}$$

Кроме того, точная последовательность Пуанкаре (там же, § 15)

$$0\to\Omega^1_{\mathbb{P}^3}(-5[H_0])\to\Omega'^1_{\mathbb{P}^3}([H_0])\to O_Y(-5[H_0])\to 0$$

дает, что последовательность

$$(6)\quad 0\to H^1(\mathbb{P}^3,\Omega^1_{\mathbb{P}^3}(-5[H_0]))\to H^1(\mathbb{P}^3,\Omega'^1_{\mathbb{P}^3}([H_0]))\to H^1(Y,O_Y(-5[H_0]))\to\cdots$$

точна. Одна теорема Рамануджама (см. [6, § III, Теорема А, Следствие]) обеспечивает, что $H^1(Y,O_Y(-5[H_0]))=0$. С другой стороны, по результатам Ботта (см. [12, § 5]) группы $H^0(\mathbb{P}^3,\Omega^1_{\mathbb{P}^3}([H_0]))$ и $H^1(\mathbb{P}^3,\Omega^1_{\mathbb{P}^3}(-5[H_0]))$ нулевые; тогда из (5) и (6) получаем, что $H^0(Y,\Omega_Y^1([H^0]))=0$. Лемма 4.1. доказана.

Из леммы 4.1. и из теоремы Кодаира—Спенсера—Ниренберга (см. [9, § 1]) следует, что число модулей $m(S)$ существует и равно $\dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \Theta)$. При помощи теоремы Римана—Роха—Хирцебруха получаем (см. [10, § 11]) $\dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \Theta) = 10(p_g - q + 1) - 2K^2 + \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \Theta) + \dim_{\mathbb{C}} H^2(S, \Theta) = 34$. Кроме того, пространство модулей является неособым в точке S. Теорема 4.1. доказана.

Результаты п.3 показывают, что пространство модулей $M_{3,3}^{\mathrm{CGC}}$ всех CGC-поверхностей — это фактор $U/PGL(2)$, где U — множество гладких плоских кривых шестой степени (U — открытое множество в $\mathbb{P}^{27}$). Мамфорд в [1, гл. 4, § 2] доказал, что элементы множества U являются стабильными точками относительно действия группы $PGL(2)$ и, следовательно, фактор наделен алгебраической структурой.

А. Тодоров в [2, гл. II] доказал, что этот фактор имеет однородное представление $U/PGL(2) \cong \Gamma \diagdown SO(2, 19)/SO(2) \times SO(19)$, где $\Gamma = SO(2, 19; \mathbb{Z})$. Теперь ясно, что пространство модулей $M_{3,3}^{\mathrm{CGC}}$ является неприводимым алгебраическим многообразием размерности 19.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Дьедонне, Дж. Керрол, Д. Мамфорд. Геометрическая теория инвариантов. Москва, 1974.
2. А. Н. Тодоров. Жордановые клетки монодромий и применение к модулям K-3 поверхностей. Диссертация, МГУ, Москва, 1975.
3. Чжень Шэн-Шэнь. Комплексные многообразия. Москва, 1961.
4. И. Р. Шафаревич. Алгебраические поверхности. *Труды Мат. инст. В. А. Стеклова*, **LXXV**. Москва, 1965.
5. И. Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии. Москва, 1972.
6. E. Bombieri. Canonical models of surfaces of general type. *Publ. Math. IHES*, **42**, 1973, 171—219.
7. R. Hartshorne. Algebraic Geometry. New-York, Heidelberg, Berlin, 1977.
8. E. Horikawa. Algebraic Surfaces of general type with small c_1^2. ii, *Invent. math.*, **37**, 1976, 112-155.
9. K. Kodaira, L. Nirenberg, D. C. Spencer. On the existence of deformation of complex analytic structures, *Ann. Math.*, **68**, 1958, 450—459.
10. K. Kodaira, D. Spencer. On the deformations of complex structures I. *Ann. Math.*, **67**, 1958, 328-401.
11. J. H. M. Steenbrink. Intersection form for quasi-homogeneous singularities. *Compos math.*, **34**, 1977, 211-223.
12. J. Wawrik. Deformation of Banach coverings of complex manifolds. *Amer. J. Math.*, **90**, 1968, 926—960.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 2. 4. 1979