Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ПО АППРОКСИМАЦИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

ПЕТЪР П. ШОПОВ

В работе рассматриваются классификации иррациональных чисел по восходящей степени аппроксимации. Полученные результаты применяются в метрической теории цепных дробей и, особенно, в основной теореме А. Хинчина о сходимости и расходимости.

1. Введение. Идея рассматривания иррациональных чисел по характеру аппроксимации, которую они допускают при помощи рациональных дробей, высказана още Хинчиным: „Действительные числа могут отличаться друг от друга по своим арифметическим свойствам. Кроме основной классификации действительных чисел — рациональные и иррациональные, алгебраические и трансцедентные, существуют и другие более тонкие способы классификации этих чисел по ряду признаков, характеризирующих их арифметическую природу и *прежде всего по характеру их аппроксимации с помощью рациональных дробей, которую они допускают.*" [1, с. 63].

Один вариант реализации этих идей можно найти у Ленга [2, с. 30—32] и [7]. Исходя из классического результата Дирихле о неравенстве $|q\alpha-p|<1/N$, где $0<q\leq N$, откуда следует $|q\alpha-p|<1/q$, можно искать одну *нижнюю* грань q. И тогда, если g — положительная возрастающая функция ≥ 1 и α — иррациональное число так, что для всех достаточно больших чисел B существует решение неравенств $|q\alpha-p|<1/q$ и $B/g(B)\leq q<B$, для взаимно простых чисел p и q будем говорить, что α — число типа $\leq g$.

Идея нашей трактовки изложена в работе [4] и состоит в следующем. Исходя из неравенства Лиувиля $|q\alpha-p|>C/q^{\nu}$ для алгебраических чисел, ищутся все иррациональные числа, для которых это неравенство выполнено (при тех же условиях), причем ν — *наименьшее* натуральное число с этим свойством. Полученные таким образом числа образуют класс ν. Эти идеи находят применение в метрической теории цепных дробей [5; 6].

В настоящей работе мы рассматривали более общие неравенства $|q\alpha-p|>C/f(q)g(q)^{\nu-1}$, которые не только обобщают полученные нами результаты, но дают и новую интерпретацию основной теоремы Хинчина [1, с. 82], выясняющую важный момент этой же теоремы.

2. Класс одного иррационального числа по отношению одной функции $g(x)$ при основе — другая функция $f(x)$. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — положительные и возрастающие функции (не обязательно строго) в интервале $a, +\infty)$, $a\geq 0$, причем они возрастают неограниченно вместе с x. Пусть $g(x)\geq 1$, а $f(x)\geq x$ или $f(x)\leq x$. Будем говорить, что иррациональное число α принадлежит классу ν, ν — натуральное число ≥ 1 по отношению функции $g(x)$ при основе $f(x)$, если существует хотя бы одна положительная постоянная $C=C(\alpha)$ такая, что для всех целых чисел p и q, $q>a$ выполнялось неравенство

$$(1) \qquad |q\alpha-p|>C/f(q)g(q)^{\nu-1},$$

причем ν — наименьшее натуральное число с этим свойством. Все остальные иррациональные числа отнесем к одному трансфинитному классу, который будем обозначать через $\Omega f\{g\}$. Итак, иррациональное число α будет принадлежить классу $\Omega f\{g\}$, какой бы ни была положительная постоянная C и каким бы ни было натуральное число ν, неравенство

$$(2) \qquad |q\alpha-p|\leq C/f(q)g(q)^{\nu-1}$$

имело хотя бы одно решение в целых числах p и q, $q>a$. Из последнего сразу следует, что неравенство (2) имеет бесконечно много решений при произвольных ν и C.

Если для иррационального числа $\bar{\alpha}$ выполняется неравенство (1) для всех целых чисел p и q, $q>a$, то неравенство

$$(3) \qquad |q\bar{\alpha}-p|\leqq\bar{C}(f(q)g(q)^{\nu}$$

не может иметь бесконечно много решений ($\bar{C}$ — произвольная положительная постоянная). Другими словами, иррациональное число класса ν не допускает аппроксимации с одной единицей выше его класса.

3. Достаточные условия для определения класса одного иррационального числа. Пусть α — иррациональное число и $\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$ — его представление в виде цепной дроби. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две функции, удовлетворяющие требованиям пункта 2, причем $f(x)\geqq x$. Пусть, наконец, отношение $a_{k+1}/g(q_k)^{\nu-1}$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, ограничено сверху; здесь q_k — знаменатель k-той подходящей дроби числа α. Тогда существует положительная постоянная C такая, что для всех целых чисел p и q, $q>a$, выполнялось неравенство

$$|q\alpha-p|>C/f(q)g(q)^{\nu-1}, \qquad \nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Допустим противное. Тогда для любого $C_s>0$ найдется хотя бы одна пара чисел $(p_{k_s},\ q_{k_s})$, $q_{k_s}>a$ такая, что

$$|\alpha-p_{k_s}/q_{k_s}|\leq C_s/q_{k_s}f(q_{k_s})g(q_{k_s})^{\nu-1}\leq C_s/q_{k_s}^2.$$

Если устремим C_s к нулю, то с некоторого места ($C_s\leq 1/2$) p_{k_s}/q_{k_s} — подходящие дроби α и, исходя из левого неравенства, неравенства о подходящих дробях $|\alpha-p_k/q_k|>1/q_k^2(a_{k+1}+2)$ и условия $f(x)\geqq x$, получаем $g(q_{k_s})^{\nu-1}/(a_{k_s+1}+2)<C_s$.

Из последнего неравенства следует, что отношение $g(q_{k_s})^{\nu-1}/(a_{k_s+1}+2)$ будет стремиться к нулю, когда $C_s\to 0$, что невозможно, поскольку если положить согласно условию $a_{k+1}/g(q_k)^{\nu-1}<d$, то $g(q_{k_s})^{\nu-1}/(a_{k_s+1}+2)>1/(d+2)$.

4. Необходимые условия для определения класса одного иррационального числа. Пусть α — иррациональное число и $\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$ — его представление в виде цепной дроби. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две функции, удовлетворяющие требованиям пункта 2, причем $f(x)\leq x$. Пусть, наконец, существует положительная постоянная C такая, что для всех целых чисел p и q, $q>a$, имело место неравенство $|q\alpha-p|>C/f(q)g(q)^{\nu-1}$, $\nu=1, 2, 3, \ldots$. Утверждаем, что отношение $a_{k+1}/g(q_k)^{\nu-1}$, $k=0, 1, 2, \ldots$, ограничено сверху (q_k — знаменатель k-той подходящей дроби числа α).

Допустим противное. Тогда найдется подпоследовательность k_1, k_2, $k_3, \ldots, k_s, \ldots$, такая, что

$$a_{k_s+1}/g(q_{k_s})^{\nu-1} \to \infty, \qquad k_s \to \infty; \tag{4}$$

и, исходя из данного неравенства, неравенства о подходящих дробях $|\alpha-p_k/q_k|<1/a_{k+1}q_k^2$ и условия $f(x)\leqq x$, получаем $a_{k_s+1}/g(q_{k_s})^{\nu-1}<1/C$.

Последнее неравенство противоречит (4), чем наше утверждение доказано.

5. Необходимые и достаточные условия для определения класса одного иррационального числа. Рассмотрим специальный случай, когда основа $f(x)=x$. Тогда из доказанного в пунктах 3 и 4 получаем

Теорема 1. *Для того, чтобы иррациональное число α было из класса $\leqq\nu$ по отношению функции $g(x)$ при основе x, необходимо и достаточно, чтобы отношение $a_{k+1}/g(q_k)^{\nu-1}$ было ограничено сверху.*

Теорема 2. *Если для иррационального числа α отношение $a_{k+1}/g(q_k)^{\nu-1}$ ограничено сверху, но отношение $a_{k+1}/g(q_k)^{\nu-2}$ не ограничено сверху, то α — число из класса ν по отношению функции $g(x)$ при основе x.*

6. Существование иррациональных чисел произвольного класса ν и класса $\Omega f\{g\}$ при основе $f(x)=x$. Покажем, что существуют иррациональные числа произвольного класса $\nu\geqq 2$ (при $\nu=1$ существование очевидно). Положим $a_{n+1}=[g(q_n)^{\nu-1}]$ при $n\geqq N$. Тогда отношение $a_{n+1}/g(q_n)^{\nu-1}$ с некоторого места становится $\leqq 1$ и, следовательно, ограничено. С другой стороны, отношение $a_{n+1}/g(q_n)^{\nu-2}$ с некоторого места равняется

$$\frac{[g(q_n)^{\nu-1}]}{g(q_n)^{\nu-2}}=\frac{g(q_n)^{\nu-1}-\varepsilon}{g(q_n)^{\nu-2}}=g(q_n)-\frac{\varepsilon}{g(q_n)^{\nu-}}, \qquad 0\leqq\varepsilon<1,$$

и стремится к бесконечности при $q_n\to\infty$ (существенно используется условие, что $g(x)\to\infty$ при $x\to\infty$). Так, конструированное число как раз из класса ν по отношению функции $g(x)$ при основе x.

Приведем пример существования иррациональных чисел из класса $\Omega f\{g\}$. Для этого положим $a_{n+1}=[g(q_n)^n]$ при $n\geqq N$. Тогда отношение $a_{n+1}/g(q_n)^{\nu-1}$ с некоторого места становится равным

$$\frac{[g(q_n)^n]}{g(q_n)^{\nu-1}}=\frac{g(q_n)^n-\varepsilon}{g(q_n)^{\nu-1}}=g(q_n)^{n-\nu+1}-\frac{\varepsilon}{g(q_n)^{\nu-1}}, \qquad 0\leqq\varepsilon<1,$$

и стремится к бесконечности ($n>\nu+1$) при $n\to\infty$.

7. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы иррациональное число было из класса $\Omega f\{g\}$. Пусть α — иррациональное число, $\alpha=[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ — его представление в виде цепной дроби и q_k, $k=0, 1, 2, \ldots$, — знаменатель k-той подходящей дроби. Из доказанного в пункте 3 следует при $f(x)\geqq x$, что если α из класса $\Omega f\{g\}$, то отношение $a_{k+1}/g(q_k)^{\nu-1}$ неограничено (при произвольном ν), т. е. является как необходимое условие. Из доказанного в пункте 4 следует при $f(x)\leqq x$, что если отношение $a_{k+1}/g(q_k)^{\nu-1}$ неограничено (при произвольном ν), то α — из класса $\Omega f\{g\}$, т. е. является как достаточное условие. При $f(x)=x$ необходимое условие становится и достаточным.

8. Классификация по отношению одной последовательности функций. С учетом дальнейших целей, сделаем еще одно обобщение, изложенное в пункте 2. Прежде всего, неравенство (1) характеризует число α *по степени неаппроксимации*, т. е. если оно выполняется для всех целых чисел p и q, $q>a$, то неравенство (3) не может иметь бесконечно много решений для этого же числа. Каждая классификация $Kf\{g\}$ является упорядочением иррациональных чисел по *восходящей степени неаппроксимации относительно одной и той же функции.* Здесь включается, конечно, и трансфинитный класс $\Omega f\{g\}$. Но мы можем достичь упорядочение иррациональных чисел по восходящей степени неаппроксимации, не обязываясь с одной и той же функцией.

Пусть $\{g_n(x)\}$ — последовательность функций, обладающих всеми свойствами функции $g(x)$, перечисленных в пункте 2, и пусть

$$g_1(x)^{1-1}\leq g_2(x)^{2-1}\leq g_3(x)^{3-1}\leq\ldots\leq g_n(x)^{n-1}\leq\ldots. \tag{5}$$

Будем говорить, что иррациональное число α принадлежит классу ν, ν — натуральное число ≥ 1 по отношению последовательности $\{g_n(x)\}$ при основе $f(x)$, если существует хотя бы одна положительная постоянная $C=C(\alpha)$ такая, что для всех целых чисел p и q, $q>a$, выполнялось неравенство

$$|q\alpha-p|>C/f(q)g_\nu(q)^{\nu-1},$$

причем ν — наименьшее натуральное число с этим свойством. Все остальные иррациональные числа отнесем к одному трансфинитному классу $\Omega f\{g_n\}$. Итак, иррациональное число α будет из класса $\Omega f\{g_n\}$, какой бы ни была положительная постоянная C и каким бы ни было натуральное число ν, неравенство

$$|q\alpha-p|\leq C/f(q)g_\nu(q)^{\nu-1}$$

имело хотя бы одно решение в целых числах p и q, $q>a$. Из этого сразу вытекает, что последнее неравенство будет иметь бесконечно много решений при произвольных ν и C (существенно используется то, что последовательность $\{g_n(x)\}$ удовлетворяет (5). Классификацию иррациональных чисел по отношению последовательности функций $\{g_n(x)\}$ будем обозначать через $Kf\{g_n\}$.

Все полученные результаты в пунктах 3, 4 и 5 остаются справедливыми при классификации вида $Kf\{g_n\}$. Например, результаты, аналогичные результатам из пункта 5, выразятся так:

1°. Для того, чтобы иррациональное число α было из класса $\leq\nu$ по отношению последователности $\{g_n(x)\}$ при основе x, необходимо и достаточно, чтобы отношение $a_{k+1}/g_\nu(q_k)^{\nu-1}$ было ограничено сверху.

2°. Если для иррационального числа α отношение $a_{k+1}/g_\nu(q_k)^{\nu-1}$ ограничено сверху, но отношение $a_{k+1}/g_{\nu-1}(q_k)^{\nu-2}$ неограничено сверху, то α — число из класса ν по отношению последовательности $\{g_n(x)\}$ при основе x.

При существовании классов при основе x условие (5) для последовательности $\{g_n(x)\}$ следует быть заменено более сильным, а именно — чтобы отношение $g_\nu(x)^{\nu-1}/g_{\nu-1}(x)^{\nu-2}$, $\nu=2, 3, \ldots$, было ≥ 1 и стремилось к бесконечности, когда $x \to \infty$. Такие последовательности, конечно, существуют — например, последовательность $\{x^n\}$ или последовательность $\{x^{1/n}\}$. Тогда получатся результаты, аналогичные результатам из пункта 6.

9. Приведение классификации типа $Kf\{g\}$ при основе $f(x)>x$ или $f(x)<x$ к классификации типа $Kx\{g_n\}$. Пусть $Kf\{g\}$ — классификация и $f(x)>x$. Тогда она всегда может быть приведена к классификации типа $Kx\{g_n\}$. Действительно,

$$f(x)g(x)^{\nu-1}=x\frac{f(x)}{x}\,g(x)^{\nu-1}=x\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{1/(\nu-1)}g(x)\right]^{\nu-1}.$$

Полагая $g_\nu(x)=(f(x)/x)^{1/(\nu-1)}g(x)$, $\nu=2, 3, \ldots$, легко проверить, что последовательность $\{g_n(x)\}$ удовлетворяет всем требованиям:

1^0. $g_\nu(x)>1$ и $g_\nu(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, $\nu=2, 3, \ldots$.

2^0. $g_\nu(x)^{\nu-1}\leqq g_{\nu+1}(x)^\nu$, $\nu=2, 3, \ldots$, поскольку это равносильно $g(x)\geqq 1$.

3^0. Отношение $g_{\nu+1}(x)^\nu/g_\nu(x)^{\nu-1}$, $\nu=2, 3, \ldots$, равняется $g(x)$. Следовательно, оно $\geqq 1$ и стремится к бесконечности при $x\to\infty$.

Не ограничивая общности, мы можем принять, что $g_1(x)=1$, и тогда 2^0 и 3^0 остаются справедливыми и при $\nu=1$. Отметим, что выполнение условий 2^0 и 3^0 не требует выполнения неравенства $f(x)>x$.

Пусть теперь $f(x)<x$. Рассмотрим в этом случае только условие 1^0, причем (как нетрудно сообразить) при $\nu=2$. Рассмотрим функцию $g_2(x)=(f(x)g(x))/x$. Так как мы потребуем выполнения неравенства $g_2(x)\geqq 1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ должны удовлетворять условиям $f(x)g(x)\geqq x$. Далее, должно быть $g_2(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, что равносильно $(f(x)g(x))x\to\infty$. Здесь, однако, можно дать одно достаточное условие, а именно $f(x)g(x)\geqq x^\alpha$, $\alpha>1$.

Пример. Пусть $f(x)=x^{1/2}$. Тогда достаточно, чтобы $x^{1/2}g(x)\geqq x^\alpha$, т. е. $g(x)\geqq x^{\alpha-1/2}$.

Теорема 3. *Если α — число из класса ν по отношению $Kf\{g\}$, то α принадлежит классу ν по отношению $Kx\{g_n\}$, где $g_n(x)=(f(x)/x^{1/(n-1)}g(x)$, $n=2, 3, \ldots$. Справедливо и обратное. Это вытекает из тождества $f(x)g(x)^{\nu-1}=xg_\nu(x)^{\nu-1}$ и из определения понятия класса.*

10. Основная теорема Хинчина. Пусть α — иррациональное число в интервале $(0, 1)$ и $f(x)$ — непрерывная функция, определенная для положительных значений x, принимающая положительные значения, и при этом $xf(x)$ — монотонно убывающая. Тогда, если для некоторого $c>0$ интеграл

$$\int_c^\infty f(x)\,dx \tag{6}$$

расходится, то почти для всех значений α неравенство

$$|q\alpha-p|<f(q) \tag{7}$$

имеет бесконечно много целочисленных решений p и $q>0$; напротив, если интеграл (6) сходится, то неравенство (7) почти для всех α имеет не больше конечного числа целочисленных решений p и $q>0$ [1, с. 82].

Первая часть теоремы часто называется теоремой Хинчина о расходимости, а вторая — теорема Хинчина о сходимости [2, с. 32—33].

11. Класс $1+\varepsilon$. Имея в виду метрические цели, при определении понятия класса одного иррационального числа из пункта 2 дальше мы освободимся требованием, чтобы число ν было обязательно натуральным, предполагая, что оно только положительно. Это, конечно (в общем аспекте), исключит требование о „наименьшем натуральном числе" и оттуда и возможность говорить о классе ν (а только классе $\leq\nu$). Но метрическая проблема, к которой мы подходим, такого рода, что позволяет найти эквивалент этого „наименьшего натурального числа".

Пусть α — иррациональное число интервала (0, 1). По теореме Хинчина о сходимости неравенство

$$(8) \qquad |q\alpha-p|>C/q^{1+\varepsilon}$$

будет выполняться для всех целых p и q, $q>0$ за исключением эвентуально конечного числа пар (p_k, q_k) почти для всех α, каким бы ни была положительная постоянная C (число пар зависит от α). Отсюда сразу получается, что неравенство

$$(9) \qquad |q\alpha-p|>C(\alpha)/q^{1+\varepsilon}=C(\alpha)/qq^{1+\varepsilon-1}$$

выполнено для всех целых p и q, $q>0$, почти для всех α($C(\alpha)$ выбирается так, что для каждого иррационального числа α, для которого выполняется (8) при перечисленных условиях, выполнялось (9) при соответствующих условиях). Это числа из класса $\leq 1+\varepsilon$. Тогда для тех же чисел отношение $a_{k+1}/q_k^{\varepsilon}$ будет ограниченным, а для чисел класса $>1+\varepsilon$ это же отношение будет неограниченным.

Но доказательство неравенства (9) при перечисленных условиях можно получить, *исходя из понятия класса одного иррационального числа*, а именно: числа интервала (0, 1), для которых отношение $a_{k+1}/q_k^{\varepsilon}$ ограничено сверху, имеют меру 1; или (поскольку метод требует этого) эквивалентное утверждение — числа интервала (0, 1), для которых это же отношение неограничено, имеют меру 0 (так как ограниченность верхнего отношения необходимо и достаточно для того, чтобы одно иррациональное число было из класса $\leq 1+\varepsilon$). Это сделано в работе [5] при $\varepsilon=1$, но доказательство переносится без всяких изменений для произвольного ε. Так что иррациональные числа, которые из класса $>1+\varepsilon$, имеют меру 0. Конечно, интерес представляет случай, когда $\varepsilon<1$, и в дальнейшем будем предполагать, что это выполняется. Получаем, что иррациональные числа, которые из класса $\leq 1+\varepsilon$, имеют меру 1. Но, с другой стороны, иррациональные числа, которые из класса 1, имеют меру 0 [1, с. 72]. Следовательно, иррациональные числа, которые из класса $1+\varepsilon$, имеют меру 1. Они входят, очевидно, в состав иррациональных чисел из класса 2.

Примененный нами метод будем называть прямым рассмотрением проблемы (см. еще заключительное замечание — пункт 14).

12. Классификации, при которых класс $\leq 1+\varepsilon$ (или $\leq 2+\varepsilon$) имеет меру единицу. Предполагаем, что α — иррациональное число в интервале (0, 1). Рассмотрим классификацию $Kx\{g\}$, где $g(x)=\ln x$. Согласно теореме Хинчина о сходимости, почти для всех чисел выполняется неравенство

$$(10) \qquad |q\alpha-p|>\frac{C(\alpha)}{q(\ln q)^{1+\varepsilon}}=\frac{C(\alpha)}{q(\ln q)^{2+\varepsilon-1}}=\frac{C(\alpha)}{q(\ln q)(\ln q)^{1+\varepsilon-1}},$$

где p и q — произвольные целые числа, $q\geq e$. **Это числа из класса $\leq 2+\varepsilon$ по отношению $g(x)=\ln x$ при основе $f(x)=x$. Тогда для этих же чисел отношение $a_{k+1}/(\ln q_k)^{1+\varepsilon}$ будет ограничено, а для чисел из класса $>2+\varepsilon$ это** же отношение будет неограничено. Это дает нам возможность третировать проблемы прямо (не пользуясь теоремой Хинчина о сходимости). Вообще, методы, которыми мы пользовались при метрических проблемах о иррациональных числах второго класса, при классификации $Kx\{x\}$ вполне приложимы и при классификации $Kx\{\ln x\}$. Все могло быть рассмотрено и в классификации $Kf\{g\}$, где $f(x)=x\ln x$ и $g(x)=\ln x$. Тогда те же числа — из класса $\leqq 1+\varepsilon$. Но в этом случае, поскольку основа $f(x)=x\ln x$ больше x, то если хотели бы третировать проблемы прямо, нужно было бы применить классификацию по отношению последовательности функций $\{g_n(x)\}$ при основе $f(x)=x$.

Классификация $Kx\{g\}$ $(g(x)=\ln x)$ дает лучшую оценку чисел, имеющих меру 1, но все-таки она не самая лучшая. Действительно, рассмотрим классификацию $Kf\{g\}$, где $f(x)=x\ln x$ и $g(x)=\ln(\ln x)$. Согласно теореме Хинчина о сходимости, почти для всех α выполняется неравенство

$$(11)\quad |q\alpha-p|>\frac{C(\alpha)}{q\ln q[\ln(\ln q)]^{1+\varepsilon}}=\frac{C(\alpha)}{q\ln q[\ln(\ln q)]^{2+\varepsilon-1}}=\frac{C(\alpha)}{q\ln q\ln(\ln q)\,[\ln(\ln q)]^{1+\varepsilon-1}},$$

где p и q — произвольные целые числа, $q>e^e$. Это числа из класса $\leqq 2+\varepsilon$ по отношению функции $g(x)=\ln(\ln x)$ при основе $f(x)=x\ln x$ и одновременно из класса $\leqq 1+\varepsilon$ по отношению функции $g(x)=\ln(\ln x)$ при основе $f(x)=x\ln x\ln(\ln x)$. Продолжая таким образом, мы получаем одну бесконечную последовательность классификаций, при которых класс $1+\varepsilon$ (при подходящей основе) имеет меру 1. Каждая из этих классификаций дает лучшую оценку, чем предыдущая для этого класса. Но, начиная с третьей классификации (включительно), мы должны прибегнуть к классификации по отношению последовательности функций $\{g_n(x)\}$ при основе $f(x)=x$, если хотим третировать проблемы прямо (как при иррациональных числах второго класса).

Таким образом, теорема Хинчина о сходимости, по существу, сводится к рассматриваемой бесконечной последовательности классификаций, причем класс $1+\varepsilon$ имеет меру 1. При этой постановке вещи выглядят по-другому и естественным образом налагаются соответствующие этой постановке проблемы, часть которых мы уже рассмотрели.

13. Второе условие понятие класса для классов $1+\varepsilon$. Понятие класса одного иррационального числа α определяется двумя условиями:

1°. Неравенство $|q\alpha-p|>C(\alpha)/f(q)g(q)^{\nu-1}$ должно быть выполнено для всех целых чисел p и q, $q>a\geqq 0$.

2°. ν — наименьшее натуральное число с этим свойством.

Без второго условия число α будет из класса $\leqq\nu$. При определении классов $1+\varepsilon$ второе условие оказывается неприложимым. Не надо забывать, однако, что это классы с метрической точки зрения. Все-таки, мы успели определить их точно (в смысле, что это классы $1+\varepsilon$, а не классы $\leqq 1+\varepsilon$) благодаря обстоятельству, что иррациональные числа из классов 1, определяемые неравенствами (9), (10) и (11), при $\varepsilon=0$ имеют меру ноль.

И все-таки, существует один эквивалент второго условия для метрических классов. Этот эквивалент, по существу, теорема Хинчина о расходимости, и он получается в виде следствия того, что классы $1+\varepsilon$ точно определены. Чтобы показать это, мы дадим еще одну форму второго условия понятия класса одного иррационального числа. Итак, поскольку ν — наименьшее натуральное число с этим свойством, то какой ни была положительная постоянная C, неравенство $|q\alpha-p|>C/f(q)g(q)^{\nu-2}$ не может выполняться для всех целых чисел p и q, $q>a$. Или, что то же самое, неравенство

$$|q\alpha-p|\leqq C/f(q)g(q)^{\nu-2}, \quad \nu>1, \tag{12}$$

будет иметь хотя бы одно решение, какой бы ни была положительная постоянная C. Отсюда следует, что это неравенство будет иметь бесконечно много решений (при произвольной фиксированной C). Действительно, в противном случае (при некоторой фиксированной $\bar{C}$) неравенство

$$|q\alpha-p|f(q)g(q)^{\nu-2}\leqq\bar{C} \tag{13}$$

будет иметь конечное число решений (p_k, q_k), $q_k>a$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Далее, рассмотрим неравенство $|q\alpha-p|f(q)g(q)^{\nu-2}\leqq\min|q_k\alpha-p_k|f(q_k)g(q_k)^{\nu-2}-\delta$, где $\delta>0$ выбрано так, чтобы правая часть неравенства была положительной. Но согласно условию последнее неравенство будет иметь хотя бы одно решение (p_0, q_0), $q_0>a$, для которого

$$|q_0\alpha-p_0|f(q_0)g(q_0)^{\nu-2}<\min|q_k\alpha-p_k|f(q_k)g(q_k)^{\nu-2}\leqq\bar{C},$$

что противоречит допущению о том, что неравенство (13) имеет конечное число решений.

Вернемся теперь к классам $1+\varepsilon$. Начнем с самого простого случая класса $1+\varepsilon$, а именно с того, который определяется с помощью неравенства (9), которое выполняется для всех целых p и q, $q>0$ почти всюду. Как уже видели, не существует наименьшего положительного числа ε с свойством, что неравенство (9) выполняется почти всюду. Используя, однако, новую форму второго условия, мы можем применить ее в данном случае.

Рассмотрим неравенство

$$|q\alpha-p|\leqq C/qq^{1+\varepsilon-2}=C/q^{\varepsilon}, \tag{14}$$

где C — произвольная положительная постоянная. По теореме Хинчина о расходимости неравенство

$$|q\alpha-p|<C/q, \quad C>0, \tag{15}$$

будет иметь бесконечно много решений почти всюду, откуда при $\varepsilon<1$ следует, что неравенство (14) также имеет бесконечно много решений почти всюду, что вполне нас удовлетворяет (т. к. представляет интерес случай, когда $\varepsilon<1$). В этом случае мы в согласии с вторым условием понятия класса.

Аналогичным образом, исходя из классов $1+\varepsilon$, определенных неравенствами (10) и (11) и применяя теорему Хинчина о расходимости для неравенств

$$|q\alpha-p|<C/q\ln q, \quad |q\alpha-p|<C/q\ln q[\ln(\ln q)], \tag{16}$$

получаем при $\varepsilon<1$, что неравенства

$$|q\alpha-p|\leqq C/q(\ln q)^{\varepsilon}, \quad |q\alpha-p|\leqq C/q\ln q[\ln(\ln q)]^{\varepsilon}$$

имеют бесконечно много решений почти всюду. Итак, для классов $1+\varepsilon$ второе условие понятия класса выполняется ($\varepsilon<1$).

Далее, прямо видно, что неравенства (15) и (16) представляют собой некое эквивалентное неравенство (12) и что эти же неравенства (при перечисленных условиях) могут быть получены не прибегая к теореме Хинчина о расходимости.

Вернемся снова к самому простому случаю класса $1+\varepsilon$. Если в неравенстве (9) положим $\varepsilon=0$, то класс $1+\varepsilon$ превращается в класс 1, который, однако, имеет меру ноль. Итак, при $\varepsilon=0$ класс $1+\varepsilon$ *теряет свое метрическое свойство* (иметь меры 1), чего не было, сколь бы ни было мало $\varepsilon>0$. Следовательно (поскольку класс $1+\varepsilon$ имеет меру 1, а класс 1 имеет меру ноль), неравенство $|q\alpha-p|\leqq C/q$, которое не отличается существенно от (15), должно иметь бесконечно много решений почти всюду, какой бы ни была положительная постоянная C. Действительно, в противном случае найдется хотя бы одно значение $C=\overline{C}$ такое, что неравенство $|q\alpha-p|\leqq\overline{C}/q$ будет иметь не больше чем конечное число целочисленных решений p и q, $q>0$, почти всюду. Следовательно, обратное неравенство $|q\alpha-p|>\overline{C}/q$ будет выполняться почти всюду для всех целых чисел p и q, $q>0$, за исключением, быть может, конечного числа пар (p_k, q_k) (их число зависит от α). Отсюда будет следовать, что *почти всюду* мы будем иметь

$$|q\alpha-p|>C(\alpha)/q \tag{17}$$

для всех целых чисел p и q, $q>0$, без исключения — что является противоречием, поскольку неравенство (17) при перечисленных условиях определяет класс 1, который имеет меру 0.

Аналогично получается, что неравенства

$$|q\alpha-p|\leqq C/q\ln q, \qquad |q\alpha-p|\leqq C/q\ln q[\ln(\ln q)],$$

которые не отличаются существенно от неравенства (16), имеют бесконечное число решений почти всюду, какой бы ни была положительная постоянная C.

14. Заключительное замечание. Интерпретация теоремы Хинчина показывает, что она базируется на основе идеи предложенных нами классификаций (но на метрической основе). Неравенства (9), (10) и (11) могут быть уже рассмотренны с новой точки зрения, что мы называем *прямым рассматриванием* (без теоремы Хинчина о сходимости). Конкретно эта постановка рассмотрена в работе [5] и там, между впрочем, видно, как можно дойти до теоремы (на стр. 242 из [5] сходимость ряда $\Sigma 1/2^{(n-1)/2}$ по существу — сходимость интеграла (6) из теоремы Хинчина в этом частном случае).

Примером прямого рассматривания проблем (без теоремы Хинчина о расходимости) может послужить неравенство (15). Для неравенства (16) это не сделано, а только упомянуто, что можно сделать. Вообще в пунктах 11, 12 и 13 настоящего параграфа мы не формулируем или доказываем теоремы, а только стремимся показать суть дела.

Наконец, отметим, что при интерпретации, которая дается на основе теоремы Хинчина, становится уже ясно: почему если в неравенствах (9), (10) и (11) положить $\varepsilon=0$, они перестают быть удовлетворенными при перечисленных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Хинчин. Верижни дроби. София, 1965.
2. С. Ленг. Введение в теорию диофантовых приближений. Москва, 1970.
3. А. Гельфонд. Трансцедентные и алгебраические числа. Москва, 1952.
4. П. Шопов. Върху апроксимацията на ирационалните числа. *Научни трудове на Пловд. унив., мат.*, 11, 1973, № 2, 19—28.
5. П. Шопов. Върху мярката на едно множество от реални числа, които не допускат известна степен на апроксимация. *Научни трудове на Пловд. унив., мат.*, 11, 1973, № 4, 239—245.
6. П. Шопов. Върху оценката на знаменателите на приближените дроби и мярката в метричната теория на верижните дроби. *Научни трудове на Пловд. унив., мат.*, 15, 1977, № 1 (под печат).
7. S. Lang. Asymptotic diophantine approximations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 55, 1966 31—33.

Пловдивский университет, 4000 Пловдив

Поступила 14. 5. 1979;
в переработанном виде 5. 5. 1980.