Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

НОВАЯ ОЦЕНКА СНИЗУ ДЛЯ ЧИСЛА ГРАХАМА — СПЕНСЕРА $N(3, 5)$

НЕДЯЛКО Д. НЕНОВ

В работе доказывается, что число Грахама — Спенсера $N(3, 5) \geq 11$.

1. Введение и формулировка результатов. Рассматриваются только конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Определение 1. *Будем говорить, что задана 2-раскраска ребер графа, если любое из них покрашено в красный или зеленый цвет.*

Определение 2. *Если в любой 2-раскраске ребер графа все ребра некоторого треугольника имеют одинаковый цвет, будем говорить, что этот треугольник монохроматический в данной 2-раскраске.*

Хорошо известно [1], что в любой 2-раскраске ребер полного графа с 6 вершинами существует монохроматический треугольник.

Определение 3. *Граф G будем называть t-графом, если в любой 2-раскраске его ребер есть монохроматический треугольник.*

Определение 4. *2-раскраску ребер графа будем называть правильной, если в ней нет монохроматических треугольников.*

Ясно, что граф обладает правильной 2-раскраской тогда и только тогда, когда он не является t-графом.

Определение 5. *Будем говорить, что вершины $v_1, \ldots, v_p$ графа G составляют p-клику, если любые две из них смежны.*

Определение 6. *Если граф G содержит s-клику, но не содержит $(s+1)$-клику, будем говорить, что граф G имеет кликовое число s, и писать* $\mathrm{cl}(G)=s$.

Следуя Грахаму и Спенсеру через $N(3, q)$, обозначим наименьшее натуральное число с следующим свойством: существует t-граф с $N(3, q)$ вершинами, который не содержит q-клику.

Как уже отметили, полный граф с 6 вершинами является t-графом. Из этого факта нетрудно получить, что $N(3, q)=6$, если $q \geqq 7$. В [2] доказано, что $N(3, 6) \leq 8$. Лин [4] доказал, что $N(3, 6) \geq 8$. Следовательно $N(3, 6)=8$. Равенство $N(3, 6)=8$ следует тоже из результатов в [6]. Шойбле [5] доказал, что $N(3, 5) \leqq 42$. Позже Грахам и Спенсер [3] показали, что $N(3, 5) \leqq 23$. Они же высказали предположение, что $N(3, 5)=23$. Однако это предположение оказалось неверным. В [7] доказано, что $N(3, 5) \leq 16$. Лин [4] доказал, что $N(3, 5) \geq 10$. В настоящей работе мы докажем, что $N(3, 5) \geqq 11$. Отметим, что хороших оценок для числа $N(3, 4)$ пока не существует. Ясно, что $N(3, q)$, $q \leq 3$, не имеет смысла.

Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим соответственно множество вершин и множество ребер графа G. Если $\{v_1, \ldots, v_k\}$ — множество вершин графа G, то через $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ обозначим подграф графа G, порожденный множеством вершин $v_1, \ldots, v_k$, т. е. $V(\langle v_1, \ldots, v_k\rangle)=\{v_1, \ldots, v_k\}$ и $E(\langle v_1, \ldots, v_k\rangle)$ состоит из всех ребер графа G, оба конца которых принадлежат множеству $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Определение 7. *Будем говорить, что множество вершин $v_1, \ldots, v_k$ графа G независимо, если подграф $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ не содержит ребер.*

Определение 8. *Будем говорить, что граф G является r-хроматическим графом, если множество его вершин можно разбить на r независимых, непересекающихся подмножеств. Эти независимые подмножества будем называть хроматическими классами.*

Определение 9. *Наименьшее натуральное число r такое, что граф G является r-хроматическим графом, называется хроматическим числом графа G и обозначается $\chi(G)$.*

Очевидно, если некоторый граф содержит t-подграф, он тоже является t-графом. Поэтому целесообразно ввести следующее

Определение 10. *t-граф G будем называть минимальным t-графом, если у него нет собственных t-подграфов.*

Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема. *Не существует t-граф с десятью вершинами и кликовым числом 4.*

Неравенство $N(3, 5)\geqq 11$ следует непосредственно из теоремы.

В доказательстве теоремы используется следующая

Теорема Кенига [9]. *Пусть G — граф, для которого $\chi(G)>2$. Тогда граф G содержит простой цикл нечетной длины.*

Для доказательства теоремы нам будут нужны еще следующие леммы:

Лемма 1. [4] *Пусть G — 5-хроматический граф. Тогда G не является t-графом.*

Лемма 2. *Пусть некоторое $\chi(G)$-хроматическое разложение графа G имеет одноэлементные хроматические классы $\{v_1\}, \ldots \{v_k\}$. Тогда в любом хроматическом классе этого разложения, отличном от $\{v_1\}, \ldots, \{v_k\}$, есть вершина, которая смежна всем вершинам $v_1, \ldots, v_k$.*

Лемма 3. *Пусть G — граф, для которого $\mathrm{cl}(G)=k+1$ и $\chi(G)>k+1$. Тогда любое $\chi(G)$-хроматическое разложение графа G содержит не более k одноэлементных хроматических классов.*

Лемма 4. *Пусть $\mathrm{cl}(G)=k+1$, $\chi(G)>k+1$ и некоторое $\chi(G)$-хроматическое разложение графа G содержит k одноэлементных хроматических классов $\{v_1\}, \ldots, \{v_k\}$. Тогда любой хроматический класс, отличный от $\{v_1\}, \ldots, \{v_k\}$, содержит .вершину, которая несмежна некоторой из вершин $v_1, \ldots, v_k$.*

Лемма 5. *Пусть G — граф с 5 вершинами и $\mathrm{cl}(G)\leqq 3$. Тогда $\chi(G)\leqq 3$.*

Пусть G_1 и G_2 — два графа, для которых $V(G_1)\cap V(G_2)=\varnothing$. Следуя Зыкову [8], под соединением G_1+G_2 графов G_1 и G_2 будем понимать граф G, для которого $V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$ и $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup E_{12}$, где E_{12} состоит из всех ребер $[v_1, v_2]$, $v_1\in V(G_1)$, $v_2\in V(G_2)$. Через C_n обозначим простой цикл длины n.

Лемма 6 [4; 6]. *Пусть G — минимальнй t-граф, для которого $|V(G)|\leqq 8$ и $\mathrm{cl}(G)\leqq 5$. Тогда G изоморфен графу C_3+C_5.*

Лемма 7. *Пусть G является t-графом с 8 вершинами и $\mathrm{cl}(G)\leqq 5$. Тогда три из его вершин имеют степень 7.*

Лемма 8. *Пусть G является t-графом с 9 вершинами и $\mathrm{cl}(G)\leqq 5$. Тогда $\chi(G)=6$.*

Через $\bar{G}$ обозначим дополнительный граф графа G.

Лемма 9. *Пусть G — минимальный t-граф с 9 вершинами. Тогда* $\mathrm{cl}(\bar{G})=2$.

Лемма 10. *Пусть G является t-графом с 9 вершинами, который содержит минимальный t-подграф тоже с 9 вершинами. Тогда хотя бы две из его вершин имеют степень* 8.

Лемма 11. *Пусть G граф с 9 вершинами. Если* $\mathrm{cl}(G)\leq 3$, *то* $\mathrm{cl}(\bar{G})\geq 3$ (*доказательство см. в* [1]).

Лемма 12. *Не существует граф G с 9 вершинами, для которого* $\mathrm{cl}(G)\leq 3$ *и* $\chi(G)\geq 5$.

Пусть v_1 и v_2 — две несмежные вершины графа G, а $v_3,\ldots,v_n$ — остальные вершины. Через $G(v_1\equiv v_2=v_0)$ обозначим граф G_1, получающийся от G склеиванием вершин v_1 и v_2, т. е. $V(G_1)=\{v_0, v_3,\ldots,v_n\}$ и $E(G_1)=E(\langle v_3,\ldots,v_n\rangle)\cup E'$, где E' содержит все пары $[v_0, v_i]$, для которых $[v_1, v_i]\in E(G)$ или $[v_2, v_i]\in E(G)$, $i=3,\ldots,n$.

Лемма 13. *Пусть v_1 и v_2 — две несмежные вершины графа G. Если граф G является t-графом, то граф $G(v_1\equiv v_2)$ тоже является t-графом.*

2. Доказательства лемм. Доказательство леммы 1. Пусть $V(G)=V_1\cup V_2\cup V_3\cup V_4\cup V_5$ является 5-хроматическим разложением графа G. Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер графа G: ребра, имеющие один конец в V_i, а второй в V_j, покрасим в красный цвет, если $|i-j|\in\{1, 4\}$. Все остальные ребра покрасим в зеленый цвет. Полученная 2-раскраска ребер графа G правильная. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть

$$V(G)=\{v_1\}\cup\ldots\cup\{v_k\}\cup C_{k+1}\cup\ldots\cup C_m$$

является $\chi(G)$-хроматическим разложением графа G $(\chi(G)=m)$. Допустим, что в некотором хроматическом классе C_i, $k+1\leq i\leq m$, нет вершины, смежной всем вершинам $v_1,\ldots,v_k$. Группируя любую из вершин класса C_i с несмежной ей вершиной из $\{v_1,\ldots,v_k\}$, получим, что граф G обладает $(\chi(G)-1)$-хроматическим разложением, что невозможно. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Допустим, что граф G обладает $\chi(G)$-хроматическим разложением, имеющим $k+1$ одноэлементные хроматические классы $\{v_1\},\ldots,\{v_{k+1}\}$. Ясно, что $\{v_1,\ldots,v_{k+1}\}$ является $(k+1)$-кликой графа G (иначе получим, что граф G обладает $(\chi(G)-1)$-хроматическим разложением). Так как $\chi(G)>k+1$, то согласно лемме 2, существует вершина, которая смежна всем вершинам $v_1,\ldots,v_{k+1}$. Мы получили, что граф G содержит $(k+2)$-клику. Это противоречит условию $\mathrm{cl}(G)=k+1$. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Допустим, что все вершины некоторого хроматического класса C, отличного от $\{v_1\},\ldots,\{v_k\}$, смежны всем вершинам $v_1,\ldots,v_k$. Из $\chi(G)>k+1$ следует, что существует хроматический класс C_1 рассматриваемого хроматического разложения, отличный от $\{v_1\},\ldots,\{v_k\}$, C. Пусть $w_1,\ldots,w_s$ — все вершины класса C_1, которые смежны всем вершинам $v_1,\ldots,v_k$, а через $w_{s+1},\ldots,w_t$ — остальные вершины класса C_1. Ясно, что $C'=\{C, w_1,\ldots,w_s\}$ является независимым множеством графа G (иначе получим $\mathrm{cl}(G)\geq k+2$). Группируя любую из вершин $w_{s+1},\ldots,m_t$ с несмежной ей вершиной из $\{v_1,\ldots,v_k\}$, получим $(\chi(G)-1)$-хроматическое разложение графа G с хроматическим классом C'. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 4.

Доказательство леммы 5. Допустим, что $\chi(G) \geq 4$. Тогда, очевидно, любое $\chi(G)$-хроматическое разложение содержит хотя бы три одноэлементных хроматических класса. Это противоречит лемме 3.

О доказательстве леммы 6. Доказательство содержится в [6] (см. теорему 3 и следствие) и [4].

Доказательство леммы 7. Лемма 7 является очевидным следствием леммы 6.

Доказательство леммы 8. Согласно лемме 1, $\chi(G) \geq 6$. Допустим, что $\chi(G) > 6$. Рассмотрим произвольное $\chi(G)$-хроматическое разложение графа G. Так как G имеет всего 9 вершин и $\chi(G) > 6$, то это хроматическое разложение содержит 5 одноэлементных хроматических классов. Это противоречит лемме 3.

Доказательство леммы 9. Сначала докажем, что $\mathrm{cl}(\overline{G}) \leq 3$. Допустим, что $\mathrm{cl}(\overline{G}) > 3$. Пусть $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ является независимым множеством, а v_5, v_6, v_7, v_8, v_9 — остальные вершины графа G. Рассмотрим 6-хроматическое разложение графа G:

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \cup \{v_5\} \cup \{v_6\} \cup \{v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_9\}.$$

Согласно лемме 1, это является $\chi(G)$-хроматическим разложением графа G а согласно лемме 3, $\mathrm{cl}(G) \geq 6$, что противоречит условию $\mathrm{cl}(G) \leq 5$. Итак мы получили, что $\mathrm{cl}(\overline{G}) \leq 3$. Очевидно $\mathrm{cl}(\overline{G}) \geq 2$. Следовательно $\mathrm{cl}(\overline{G}) = 2$ или $\mathrm{cl}(\overline{G}) = 3$. Докажем, что в самом деле $\mathrm{cl}(\overline{G}) = 2$. Допустим, что это не так, т. е. $\mathrm{cl}(\overline{G}) = 3$. Пусть $\{v_7, v_8, v_9\}$ является независимым множеством графа G Непременно две из остальных вершин $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ несмежны (иначе $\mathrm{cl}(G) \geq 6$). Пусть это будут вершины v_5 и v_6. Ясно, что $\{v_1\} \cup \{v_2\} \cup \{v_3\} \cup \{v_4\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8, v_9\}$ является 6-хроматическим разложением графа G. Согласно лемме 1, оно является $\chi(G)$-хроматическим разложением графа G. Согласно лемме 2, одна из вершин v_7, v_8, v_9, например, v_7, смежна всем вершинам v_1, v_2, v_3, v_4, а также одна из вершин v_5 и v_6, например, v_5, смежна всем вершинам из $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Итак, будем предполагать, что

$$[v_i, v_7] \in E(G),\ [v_i, v_5] \in E(G), \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

Ясно, что из (1) следует $[v_5, v_7] \in E(\overline{G})$ (иначе $\mathrm{cl}(G) \geq 6$).

Согласно лемме 4, можно предположить, что v_6 и v_9 несмежны всем вершинам v_1, v_2, v_3, v_4.

Рассмотрим два случая:

1. Вершина v_8 смежна всем вершинам из $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
2. Вершина v_8 несмежна некоторой вершине из $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Случай 1. В этом случае $\{v_5, v_7, v_8\}$ является независимым множеством графа G (иначе $\mathrm{cl}(G) \geq 6$). Заметим, что $[v_5, v_9] \in E(G)$ (иначе $\mathrm{cl}(\overline{G}) > 3$). Докажем, что $[v_6, v_9] \in E(G)$. Допустим, что это не так, т. е. $[v_6, v_9] \in E(\overline{G})$. Тогда группируя вершины v_6 и v_9 с несмежными им вершинами из $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, получим 5-хроматическое разложение графа G, что противоречит лемме 1. Следовательно, $[v_6, v_9] \in E(G)$. Одно из ребер $[v_6, v_8]$ или $[v_6, v_7]$ является ребром графа G (иначе $\mathrm{cl}(\overline{G}) \geq 4$). Без ограничения общности можно предположить, что $[v_6, v_7] \in E(G)$. Если существуют две различные вершины множества $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, например, v_1 и v_2, такие, что $[v_1, v_6] \in (\overline{G})$ и $[v_2,$

$v_9] \in E(\overline{G})$, то $\{v_1, v_6\} \cup \{v_2, v_9\} \cup \{v_3\} \cup \{v_4\} \cup \{v_5, v_7, v_8\}$ является 5-хроматическим разложением графа G, что противоречит лемме 1. Следовательно для одной из вершин v_1, v_2, v_3, v_4, например, для v_1, имеем $[v_1, v_6] \in E(\overline{G})$, $[v_1, v_9] \in E(\overline{G})$, и

$$(2) \qquad [v_i, v_6] \in E(G),\ [v_i, v_9] \in E(G), \quad i=2,\ 3,\ 4.$$

Напомним, что выше мы показали, что

$$(3) \qquad [v_6, v_9],\ [v_5, v_9],\ [v_6, v_7] \in E(G).$$

Из (1), (2) и (3) следует, что граф G содержит собственный t-подграф $\langle v_1, v_6, v_7, v_5, v_9\rangle + \langle v_2, v_3, v_4\rangle \cong C_3 + C_5$, что является противоречием (мы предполагаем, что G является минимальным t-графом). В случае 1 лемма 9 доказана.

Случай 2. Любая из вершин v_6, v_8 и v_9 несмежна некоторой из вершин v_1, v_2, v_3, v_4.

Подслучай 2. а. Вершина v_6 смежна не более чем одной из вершин v_1, v_2, v_3, v_4. В этом случае вершины v_6, v_8 и v_9 можно так группировать с несмежными им вершинами из $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, чтобы получилось 5-хроматическое разложение графа G с хроматическим классом $\{v_5, v_7\}$. Это противоречит лемме 1.

Подслучай 2.б. Вершина v_6 несмежна ровно двум из вершин, например, вершинам v_1 и v_2. Если хотя бы одно из ребер $[v_3, v_8]$, $[v_3, v_9]$, $[v_4, v_8]$, $[v_4, v_9]$ не является ребром графа G, то вершины v_6, v_8 и v_9 можно так группировать с несмежными им вершинами из $\{v_1, v_2, v_3\}$, чтобы получилось 5-хроматическое разложение графа G с хроматическим классом $\{v_5, v_7\}$. Это противоречит лемме 1. Следовательно можно предположить, что все ребра $[v_3, v_8]$, $[v_3, v_9]$, $[v_4, v_8]$, $[v_4, v_9]$ являются ребрами графа G и что вершина v_8 несмежна одной из вершин v_1, v_2, например, v_1, т. е. $[v_1, v_8] \in E(\overline{G})$. Заметим, что $[v_1, v_9] \in E(G)$, так как иначе $\{v_1, v_8, v_9\} \cup \{v_2, v_6\} \cup \{v_5, v_7\} \cup \{v_3\} \cup \{v_4\}$ является 5-хроматическим разложением графа G, что противоречит лемме 1. Из $[v_1, v_9] \in E(G)$ следует $[v_2, v_9] \in E(\overline{G})$. Ясно, что $[v_2, v_8] \in E(G)$ так как иначе $\{v_2, v_8, v_9\} \cup \{v_1, v_6\} \cup \{v_5, v_7\} \cup \{v_3\} \cup \{v_4\}$ является 5-хроматичесским разложением для графа G, что снова противоречит лемме 1.

Через F обозначим граф, заданный на рис. 1. Из сделанных выше рассуждений, следует, что в случае 2.б. граф G является подграфом графа F.

Пусть

$$M = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер графа F: если элемент a_{ij} матрицы M равен 1, ребро $[v_i, v_j]$ красное, а если $a_{ij}=2$ — ребро, $[v_i, v_j]$ —

зеленое. Несложная проверка показывает, что эта 2-раскраска ребер графа F правильная, т. е. граф F не является t-графом. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 9 в подслучае 2.б.

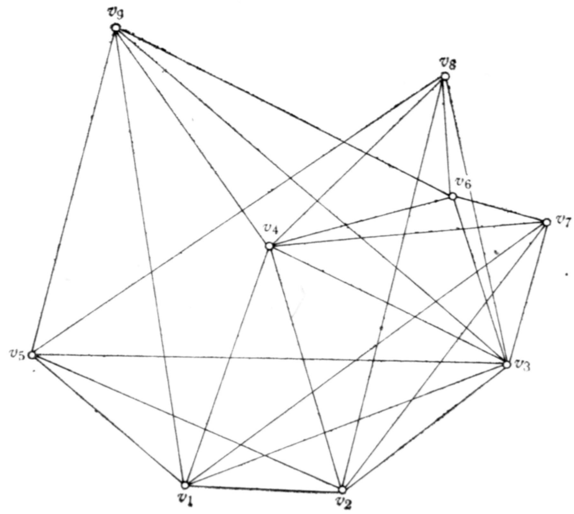

Рис. 1

Подслучай 2.в. Вершина v_6 несмежна одной единственной вершине из $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, например, v_1, т. е. $[v_1, v_6] \in E(\bar{G})$ и $[v_i, v_6] \in E(G)$, $i=2, 3, 4$. Ясно, что $[v_6, v_7] \in E(G)$, так как иначе группируя вершины v_8 и v_9 с несмежными им вершинами из $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, получим 5-хроматическое разложение графа G. Заметим, что $[v_6, v_8] \in E(G)$ или $[v_6, v_9] \in E(G)$ (иначе можно группировать вершины v_6, v_8 и v_9 с несмежными им вершинами из $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, чтобы получилось 5-хроматическое разложение графа G). Без ограничения общности можно предположить, что $[v_6, v_8] \in E(G)$. Представляются две возможности:

1. $[v_6, v_9] \in E(\bar{G})$. В этом случае получим, что $[v_5, v_8] \in E(G)$ (иначе группируя вершины v_6 и v_9 с несмежными им вершинами из $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, получим $\chi(G) \leqq 5$). Можно предположить, что $[v_2, v_8]$, $[v_3, v_8]$, $[v_4, v_8]$ являются ребрами графа G (иначе $\chi(G) \leqq 5$). Следовательно $[v_1, v_8] \notin E(G)$. Но тогда $G \supset \langle v_1, v_5, v_6, v_7, v_8 \rangle + \langle v_2, v_3, v_4 \rangle \cong C_3 + C_5$. Это, однако, невозможно, так как G является минимальным t-графом.

2. $[v_6, v_9] \in E(G)$. Напомним, что мы показали, что $[v_6, v_8]$ и $[v_6, v_7]$ являются ребрами графа G. Так как $\mathrm{cl}(\bar{G}) \leqq 3$ и $[v_5, v_7] \in E(\bar{G})$, то $[v_5, v_8]$ или $[v_5, v_9]$ является ребром графа G. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_5, v_8] \in E(G)$. Заметим, что одно из ребер $[v_2, v_8]$, $[v_3, v_8]$ $[v_4, v_8]$ принадлежит $E(\bar{G})$ (иначе $G \supset \langle v_2, v_3, v_4 \rangle + \langle v_1, v_5, v_6, v_7, v_8 \rangle \cong C_3 + C_5$) Без ограничения общности можно предположить, что $[v_2, v_8] \in E(\bar{G})$. Тогда непременно $[v_5, v_9] \in E(G)$ (иначе $\{v_3\} \cup \{v_4\} \cup \{v_1, v_6\} \cup \{v_2, v_8\} \cup \{v_5, v_7, v_9\}$ является 5-хроматическим разложением графа G). Одно из ребер $[v_2, v_9]$,

$[v_3, v_9]$, $[v_4, v_9]$ не является ребром графа G, так как иначе $G\supset\langle v_2, v_3, v_4\rangle+\langle v_1, v_5, v_6, v_7, v_9\rangle\simeq C_3+C_5$. Теперь нетрудно убедиться в том, что $\chi(\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_8, v_9\rangle)=4$, и следовательно, $\chi(G)\leqq 5$. Это противоречит лемме 1. Этим лемма 9 доказана полностью.

Доказательство леммы 10. Ясно, что достаточно доказать лемму 10 для минимального t-графа с 9 вершинами. Итак, будем предполагать, что граф G является минимальным t-графом с 9 вершинами. Согласно лемме 8, $\chi(G)=6$. Из леммы 9 следует, что любое 6-хроматическое разложение имеет вид:

$$\{v_1\}\cup\{v_2\}\cup\{v_3\}\cup\{v_4, v_5\}\cup\{v_6, v_7\}\cup\{v_8, v_9\}.$$

Согласно лемме 2, можно предположить, что вершины v_4, v_6, v_8 смежны всем вершинам v_1, v_2, v_3. Если хотя бы одна из вершин v_5, v_7, v_9 смежна всем вершинам v_1, v_2, v_3, утверждение леммы 10 очевидно. Следовательно можно предположить, что любая из вершин v_5, v_7, v_9 несмежна некоторой из вершин v_1, v_2, v_3, т. е. $[v_5, v']\in E(\bar{G})$, $[v_7, v'']\in E(\bar{G})$ и $[v_9, v''']\in E(\bar{G})$, где v', v'', $v'''\in\{v_1, v_2, v_3\}$. Допустим, что утверждение леммы не верно. Представляются две возможности:

1. Среди вершин v', v'', v''' нет совпадающих. В этом случае можно предположить, что $v'=v_1$, $v''=v_2$, $v'''=v_3$. Заметим, что $\chi(\langle v_4, v_6, v_8\rangle)=2$ (иначе $\mathrm{cl}(G)\geqq 6$). Пусть $A_1\cup A_2$ является 2-хроматическим разложением для $\langle v_4, v_6, v_8\rangle$. Тогда $\{v_1, v_5\}\cup\{v_2, v_7\}\cup\{v_3, v_9\}\cup A_1\cup A_2$ является 5-хроматическим разложением графа G, что противоречит лемме 1.

2. Среди вершин v', v'', v''' есть две совпадающие, т. е. $v'\equiv v''\neq v'''$. Предположим для определенности, что $v'=v''=v_1$ и $v'''=v_2$. Так как $\mathrm{cl}(G)\leqq 5$, то одно из ребер $[v_4, v_6]$, $[v_4, v_8]$, $[v_6, v_8]$, является ребром дополнительного графа $\bar{G}$. Рассмотрим все три возможности:

2. а. $[v_6, v_8]\in E(\bar{G})$. В этом случае

$$\{v_1, v_7\}\cup\{v_2, v_9\}\cup\{v_6, v_8\}\cup\{v_4, v_5\}\cup\{v_3\}$$

является 5-хроматическим разложением графа G, что противоречит лемме 1

2. б. $[v_4, v_8]\in E(\bar{G})$. В этом случае

$$\{v_1, v_5\}\cup\{v_2, v_9\}\cup\{v_4, v_8\}\cup\{v_3\}\cup\{v_6, v_7\}$$

является 5-хроматическим разложением графа G, что снова противоречит лемме 1.

2. в. $[v_4, v_6]\in E(\bar{G})$ и $(v_6, v_8]$, $[v_4, v_8]\in E(G)$. Заметим, что в этом случае $[v_5, v_7]$, $[v_5, v_6]$, $[v_4, v_7]\in E(G)$ (иначе получим, что $\mathrm{cl}(\bar{G})\geqq 3$, а это противоречит лемме 9). Заметим, что все ребра $[v_2, v_5]$, $[v_2, v_7]$, $[v_3, v_5]$, $[v_3, v_7]$ $[v_5, v_8]$, $[v_8, v_7]$ являются ребрами графа G, так как иначе $\chi(G)\leqq 5$. Из сделанных рассуждений вытекает, что $G\supset\langle v_2, v_3, v_8\rangle+\langle v_1, v_4, v_5, v_6, v_7\rangle\cong C_3+C_5$, т. е. G содержит собственный t-подграф. Это, однако, невозможно, так как мы предположили, что граф G является минимальным t-графом. Лемма 10 доказана.

Доказательство леммы 12. Сначала докажем, что $\mathrm{cl}(\bar{G})=3$. Согласно лемме 11, $\mathrm{cl}(\bar{G})\geqq 3$. Допустим, что $\mathrm{cl}(\bar{G})>3$ и пусть $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$— независимое множество вершин графа G, а v_5, v_6, v_7, v_8, v_9 — остальные его вершины. Согласно лемме 5, $\chi(\langle v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\rangle)\leqq 3$. Следовательно

$\chi(G) \leqq 4$. Это противоречит условию $\chi(G)=5$. Итак, будем предполагать, что $\mathrm{cl}(\bar{G})=3$. Пусть $\{v_1, v_2, v_3\}$ — независимое множество графа G. Среди остальных вершин есть две несмежные (иначе $\mathrm{cl}(G)>3$). Пусть это вершины v_4 и v_5, т. е. $[v_4, v_5] \in E(\bar{G})$. Среди вершин v_6, v_7, v_8, v_9 тоже есть две несмежные вершины (иначе $\mathrm{cl}(G)>3$). Пусть это вершины v_6 и v_7, т. е. $[v_6, v_7] \in E(\bar{G})$. Так как $\chi(G) \geqq 5$, то $\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_9\}$ является $\chi(G)$-хроматическим разложением графа G. Согласно лемме 2, можно предположить, что любая из вершин v_1, v_4, v_6 смежна вершинам v_8 и v_9. Заметим, что $\{v_1, v_4, v_6\}$ является независимым множеством (иначе $\mathrm{cl}(G \geqq 4)$. Заметим тоже, что любая из вершин v_2, v_3, v_5, v_7 тоже несмежна некоторой из вершин v_8 и v_9 (иначе $\mathrm{cl}(\bar{G}) \geqq 4$). Очевидно $\chi(\langle v_2, v_3, v_8, v_9\rangle)=2$. Пусть $A_1 \cup A_2$ является 2-хроматическим разложением для $\langle v_2, v_3, v_8, v_9\rangle$. Ясно, что $[v_5, v_7] \in E(G)$ (иначе $\chi(G) \leqq 4$). Покажем, что $[v_1, v_5] \in E(G)$. Допустим, что $[v_1, v_5] \in E(\bar{G})$. Тогда

$$A_1 \cup A_2 \cup \{v_1, v_5, v_4\} \cup \{v_6, v_7\}$$

является 4-хроматическим разложением графа G, что невозможно.

Покажем тоже, что $[v_1, v_7] \in E(G)$. Допустим, что это не так. Тогда $A_1 \cup A_2 \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_1, v_6, v_7\}$ является 4-хроматическим разложением графа G, что противоречит условию $\chi(G)=5$.

Заметим, что $\chi(\langle v_5, v_7, v_8, v_9\rangle)=2$ (иначе, согласно теореме Кенига, граф $\langle v_5, v_7, v_8, v_9\rangle$ содержит треугольник, и, следовательно, v_1 является вершиной 4-клики графа G).

Пусть $B_1 \cup B_2$ — 2-хроматическое разложение подграфа $\langle v_5, v_7, v_8, v_9\rangle$. Тогда $\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_6\} \cup B_1 \cup B_2$ является 4-хроматическим разложением графа G, что снова является противоречием. Лемма 12 доказана.

Доказательство леммы 13. Допустим, что граф $G(v_1 \equiv v_2 = v_0)$ не является t-графом. Рассмотрим произвольную правильную 2-расскраску его ребер. Построим 2-раскраску ребер графа G следующим образом:

1. Все ребра подграфа $\langle v_3, \ldots, v_n\rangle$ покрасим так же как и в рассматриваемой правильной 2-раскраске ребер графа $G(v_1 \equiv v_2 = v_0)$.

2. Если $[v_1, v_i]$ является ребром графа G, то оно имеет такой же цвет, что и ребро $[v_0, v_i]$ графа $G(v_1 \equiv v_2 = v_0)$ в рассматриваемой 2-раскраске его ребер.

3. Если $[v_2, v_i]$ является ребром графа G, то оно имеет такой же цвет, что и ребро $[v_0, v_i]$ графа $G(v_1 \equiv v_2 = v_0)$ в рассматриваемой 2-раскраске его ребер.

Очевидно полученная 2-раскраска ребер графа G является правильной 2-раскраской. Это противоречит тому, что граф G является t-графом. Лемма 13 доказана.

3. Доказательство теоремы. Допустим, что существует t-графа с 10 вершинами и $\mathrm{cl}(G)=4$. Сначала покажем, что $\chi(G)=6$. Согласно лемме 1, $\chi(G) \geqq 6$. Допустим, что $\chi(G)>6$. Нетрудно заметить, что в таком случае любое $\chi(G)$-хроматическое разложение графа G содержит хотя бы 4 одноэлементные хроматические класса. Это противоречит лемме 3. Итак, будем предполагать, что $\chi(G)=6$. Теперь покажем, что $\mathrm{cl}(\bar{G}) \leqq 3$. Допустим, что $\mathrm{cl}(\bar{G})>3$. Пусть $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ — независимое множество графа G, а $v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}$ — все остальные вершины. Среди вершин $v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}$

есть две несмежные (иначе $\mathrm{cl}(G)>4$). Следовательно можно предположить, что вершины v_5 и v_6 несмежные. Так как $\chi(G)=6$, то

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_9\} \cup v_{10}\}$$

является $\chi(G)$-хроматическим разложением графа G, которое содержит 4. одноэлементные хроматические класса. Согласно лемме 3 это невозможно. Представляются две возможности: $\mathrm{cl}(\overline{G})=2$ и $\mathrm{cl}(\overline{G})=3$.

Случай 1. $\mathrm{cl}(\overline{G})=3$. Пусть $\{v_1, v_2, v_3\}$ — независимое множество графа G. Среди остальных вершин $v_4, \ldots, v_{10}$ есть две несмежные (иначе $\mathrm{cl}(G)>4$), Пусть, например, вершины v_5 и v_6 несмежные. Среди вершин v_6, v_7, v_8, v_9 v_{10} есть тоже две несмежные (иначе $\mathrm{cl}(G)>4$). Следовательно можно предположить, что v_6 и v_7 несмежные. Так как $\chi(G)=6$, то

$$\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_9\} \cup \{v_{10}\}$$

является $\chi(G)$-хроматическим разложением графа G. Согласно лемме 2, можно предположить, что любая из вершин v_1, v_4, v_6 смежна всем вершинам v_8, v_9, v_{10}. Заметим, что из $\mathrm{cl}(G)=4$ следует, что $\{v_1, v_4, v_6\}$ является независимым множеством. Заметим тоже, что любая из вершин v_2, v_3, v_5, v_7 несмежна некоторой из вершин v_8, v_9, v_{10} (иначе $\mathrm{cl}(\overline{G})\geqq 4$, а мы убедились, что это невозможно). Следовательно $\chi(\langle v_2, v_3, v_8, v_9, v_{10}\rangle)=3$. Так как $\chi(G)=6$, то $\chi(\langle v_1, v_4, v_5, v_6, v_7\rangle)\geqq 3$. Согласно теореме Кенига, подграф $\langle v_1, v_4, v_5, v_6, v_7\rangle$ содержит простой цикл нечетной длины. Ясно, что этот цикл является либо треугольником, либо пятиугольником. Из того, что $\{v_1, v_4, v_6\}$ является независимым множеством, следует, что единственным возможным простым циклом нечетной длины подграфа $\langle v_1, v_4, v_5, v_6, v_7\rangle$ является треугольник $[v_1, v_5, v_7]$, т. е. непременно $[v_1, v_5], [v_1, v_7], [v_5, v_7] \in E(G)$. Так как все ребра $[v_1, v_5], [v_1, v_7], [v_1, v_8], [v_1, v_9], [v_1, v_{10}]$ являются ребрами графа G, то $\langle v_5, v_7, v_8, v_9, v_{10}\rangle$ не содержит 4-клику (иначе вершина v_1 будет вершиной 5-клики). Согласно лемме 5, $\chi(\langle v_5, v_7, v_8, v_9, v_{10}\rangle)\leqq 3$. Так как $\chi(\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\rangle)\leqq 2$ (напомним, что $\{v_1, v_4, v_6\}$ является независимым множеством), то $\chi(G)\leqq 5$. Это противоречит лемме 1. В случае I. теорема доказана.

Случай 2. $\mathrm{cl}(\overline{G})=2$. В этом случае любое 6-хроматическое разложение графа G имеет вид:

$$\{v_1\} \cup \{v_2) \cup \{v_3, v_4\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8\} \cup \{v_9, v_{10}\}.$$

Согласно лемме 2, можно предположить, что любая из вершин v_3, v_5, v_7, v_9 смежна вершинам v_1 и v_2. Заметим, что любая вершина графа G имеет степень не больше 8. В самом деле, в противном случае есть вершина v_i, которая смежна всем остальным вершинам графа G. Рассмотрим граф G_1, получающийся от графа G удалением вершины v_i. Ясно, что $\mathrm{cl}(G_1)\leqq 3$ (иначе v_i будет вершиной 5-клики). Ясно тоже, что $\chi(G_1)=5$. Мы получили, что существует граф G_1 с 9 вершинами такой, что $\mathrm{cl}(G_1)\leqq 3$ и $\chi(G)=5$. Это противоречит лемме 12. Итак, любая вершина графа G имеет степень не больше 8. Покажем, что любая вершина графа G имеет степень не больше 7. Допустим, что некоторая вершина v_i графа G имеет степень 8. Пусть v_j — единственная, несмежная вершина вершине v_i. Согласно лемме 13, граф $G(v_i \equiv v_j)$

является t-графом. Очевидно граф $G(v_i \equiv v_j)$ изоморфен подграфу графа G, получающимся удалением вершины v_j. Мы получили, что существует t-граф с 9 вершинами и кликовым числом 4. Это противоречит неравенству $N(3, 5) \geqq 10$ [4]. Итак, любая вершина графа G имеет степень не больше 7.

Покажем, что одно из ребер $[v_i, v_1]$, $[v_i, v_2]$ принадлежит $E(G)$, $i=4, 6, 8, 10$. Допустим, что это не так. Пусть, например $[v_4, v_1] \in (\bar{G})$ и $[v_4, v_2] \in E(\bar{G})$. Так как v_1 имеет степень не больше 7, то одно из ребер $[v_1, v_6]$, $[v_1, v_8]$, $[v_1, v_{10}]$ принадлежит $E(\bar{G})$. Пусть это будет ребро $[v_1, v_6]$. Аналогично, одно из ребер $[v_2, v_6]$, $[v_2, v_8]$, $[v_2, v_{10}]$ принадлежит $E(\bar{G})$. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_2, v_6] \in \bar{E}(G)$ или $[v_2, v_8] \in E(\bar{G})$.

Рассмотрим граф $G' = \bar{G}(v_9 \equiv v_{10})$. Согласно лемме 13 граф G' является t-графом. Из неравенства $N(3, 5) \geqq 10$ [4] следует, что $\mathrm{cl}(G') \geqq 5$. Но так как $\mathrm{cl}(G)=4$, $\mathrm{cl}(G')=5$. Следовательно граф G' содержит минимальный t-подграф с кликовым числом 5. Из леммы 6 следует, что этот минимальный t-подграф имеет либо 8, либо 9 вершин. Граф G' не содержит минимальный t-подграф с 9 вершинами. В самом деле, согласно лемме 10, если бы граф G' содержал минимальный t-подграф с 9 вершинами, то он бы имел две вершины степени 8. Ясно, однако, что граф G' имеет не больше одной вершины степени 8. Так как граф G' не содержит минимальный t-подграф с 9 вершинами, то существует вершина графа G', после удаления которой получается t-подграф G'. Очевидно после удаления произвольной вершиной графа G' получается подграф, который имеет не больше двух вершин степени 7. Согласно лемме 7, граф G' не содержит собственных t-подграфов. Полученное противоречие показывает, что одно из ребер $[v_i, v_1]$, $[v_i, v_2]$ принадлежит $E(G)$, $i=4, 6, 8, 10$.

Из того, что v_1 и v_2 имеют степени не больше 7, следует, что v_1 несмежна ровно двум из вершин v_4, v_6, v_8, v_{10}, например, v_4 и v_6, а v_2 несмежна вершинам v_8 и v_{10} (однако v_2 смежна v_4 и v_6). Покажем, что $[v_5, v_7] \in E(G)$. Допустим, что это не так. Тогда $\{v_1, v_6\} \cup \{v_2, v_8\} \cup \{v_3, v_4\} \cup \{v_5, v_7\} \cup \{v_9, v_{10}\}$ является 5-хроматическим разложением графа G, что противоречит лемме 1. Аналогично доказывается, что $[v_3, v_7], [v_5, v_9] \in E(G)$. Из $[v_5, v_7] \in E(G)$ и $[v_5, v_9] \in E(G)$ следует $[v_7, v_9] \in E(\bar{G})$ (иначе $\mathrm{cl}(G) \geqq 5$). Следовательно $\langle v_2, v_7, v_8, v_9, v_{10} \rangle$ не содержит треугольников. Из $[v_3, v_7] \in E(G)$ и $[v_5, v_7] \in E(\bar{G})$ следует $[v_3, v_5] \in E(\bar{G})$. Из $[v_3, v_5] \in E(\bar{G})$ вытекает, что $\langle v_1, v_3, v_5, v_4, v_6 \rangle$ не содержит треугольников.

Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер графа G: все ребра подграфов $\langle v_2, v_7, v_8, v_9, v_{10} \rangle$ и $\langle v_1, v_3, v_4, v_5, v_6 \rangle$ красные, а остальные ребра графа G зеленые. Из того, что подграфы $\langle v_2, v_7, v_8, v_9, v_{10} \rangle$ и $\langle v_1, v_3, v_4, v_5, v_6 \rangle$ не содержат треугольников, следует, что эта 2-раскраска правильная. Это противоречит тому, что граф G является t-графом.

Замечание. Из леммы 12, следует, что если G — граф с 10 вершинами и $\mathrm{cl}(G) \leqq 3$, то $\chi(G) \leqq 5$. Это следствие принадлежит Н. Хаджииванову (неопубликованное).

Автор благодарен своему научному руководителю Н. Хаджииванову за многочисленные беседы, связанные с настоящей работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. E. Greenwood, A. M. Gleason. Combinatorial relation and chromatic graphs. *Canad. J. Math.*, **7**, 1955, 1-8.
2. R. Graham. On edgewise 2-colored graphs with monochromatic triangles an containing no complete hexagon. *J. Combin. Theory*, **4**, 1968, 300.
3. R. Graham, J. Spenser. On small graphs with forced monochromatic triangles. *Lecture Notes in Math.*, **186**, 137-141.
4. S. Lin. On Ramsey Numbers and $\vec{K}_r$-Coloring of Graphs. *J. Combin. Theory, Ser. B* **12**, 1972, 82-92.
5. M. Schauble. Zu einem Kanten ferbungsproblem. *Wiss. Z. Th. Ilemenau*, **15**, **2**, 1969, 55-58.
6. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. О графах, содержащих монохроматический треугольник при произвольной двуцветной раскраске ребер. *Сердика*, **5**, 1979, 303—305.
7. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. О числе Грахама — Спенсера. *Доклады БАН*, **32**, 1979, 155—158.
8. А. Зыков. О некоторых свойствах линейных комплексов. *Мат. сб.*, **24**, 1949, 163—188.
9. Ф. Харари. Теория графов. Москва, 1973.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 17. 5. 1979