Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ВЕЩЕСТВЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ НАД АЛГЕБРОЙ КЛИФФОРДА

ЕВСТАТИ В. ПАВЛОВ

Если $U_r(A_2)$ — пространство постоянной кривизны над алгеброй Клиффорда, то его вещественная реализация U_{2r} будет симметрическим римановым пространством. Когда кривизна $U_r(A_2)$ — вещественное число, то геометрия этого пространства можеть быть реализована как внутренняя геометрия специальной квадрикой.

1. Пусть A_m —алгебра порядка m над полем действительных или комплексных чисел. Предполагается, что A_m коммутативна, ассоциативна и фробениусова. Обозначим через $\{l_a\}$ и $\{l^a\}$ взаимные базисы A_m, а через C^a_{hb} ее структурные константы. Так как A_m фробениусова, то существует невырожденная квадратная матрица (q_{ab}), такая, что $l_a = q_{ab} l^b$.

В работе будем употреблять следующую систему индексов: $a, b, c, \ldots = 1, 2, \ldots, m$; $i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, r$; $\alpha, \beta, \sigma, \ldots = 1, 2, \ldots, mr$. Везде суммируется по правилу Эйнштейна.

В [1] доказано, что если U_{mr} — риманово пространство, в котором задана интегрируемая структура r-кратного представления A_m, то U_{mr} можно рассматривать как вещественную реализацию риманова пространства $U_r(A_m)$ над A_m. Там сформулировано условие, которому дожно удовлетворять тензорное поле $t^{\alpha \cdots}_{\sigma \cdots}$ в U_{mr}, для того чтобы оно было вещественной реализацией тензорного поля той же валентности в $U_r(A_m)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке U_{mr} тензор $t^{\alpha \cdots}_{\sigma \cdots}$ коммутировал со всеми $\Phi^{\alpha}_{a|\sigma}$ — операторами представления A_m. Такой тензор называется чистым. К условию чистоты метрического тензора $g_{\alpha\tau}$ пространства U_{mr} добавляется и требование, чтобы присоединенные тензоры $g_{a|\alpha\sigma} = \Phi^{\varkappa}_{a|\alpha} g_{\varkappa}$ были тоже симметричны. Такое U_{mr} называется B-пространством.

Установлено следующее алгебраическое строение чистого тензора:

$$t^{\alpha_1 \cdots}_{\sigma_1 \cdots} = t^{m(i_1-1)+a_1, \cdots}_{m(j_1-1)+b_1, \cdots} = T^{p|i_1 i_2 \cdots}_{j_1 \cdots} C^{q_1}_{b_1 p} \ldots C^{r_1}_{b_s q_{s-1}} C^{a_1 r_2}_{r_1} \ldots C^{a}_{r_{p-1}} {}^{p-1}{}_{a_p}.$$

Для коваринтного тензора формула видоизменяется: $t_{m(j_1-1)+b_1, \ldots} = T_{p|j_1 j_2} \ldots C^p_{q_1 b_1} \ldots C^{q_{s-2}}_{b_{s-1} b_s}$.

Тензор $T^{i_1 \cdots}_{j_1 \cdots}$ пространства $U_r(A_m)$ определяется тензором $t^{\alpha_1 \cdots}_{\sigma_1 \cdots}$ — его вещественной реализации — следующим образом: $T^{i_1 \cdots}_{j_1 \cdots} := T^{a|i_1 \cdots}_{j_1 \cdots} l_a = T^{i_1 \cdots}_{a|j_1 \cdots} l^a$.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 7, 1981, с. 3–6.

Если $P^{i\,\cdots}_{k\,\cdots}$ и $Q^{j\,\cdots}_{b\,\cdots}$ — тензорные поля произвольной валентности в $U_r(A_m)$, а $p^{\alpha\,\cdots}_{\beta\,\cdots}$ и $q^{\sigma\,\cdots}_{\tau\,\cdots}$ — их вещественные реализации, то произведение $p^{\alpha\,\cdots}_{\beta\,\cdots}\,q^{\sigma\,\cdots}_{\tau\,\cdots}$ не будет вещественной реализацией произведения $P^{i\,\cdots}_{k\,\cdots}\,Q^{j\,\cdots}_{l\,\cdots}$, ибо оно не является чистым. В [2] показано, что тензнорное поле

$$R^{\alpha\,\cdots}_{\beta\,\cdots} = q^{ab}\Phi^{\alpha}_{a/\tau}\,\Phi^{\alpha}_{b/\beta}\,p^{\tau\,\cdots}_{\varrho\,\cdots}\,q^{\varkappa\,\cdots}_{\sigma\,\cdots} \tag{1}$$

определяет вещественную реализацию произведения $P^{i\,\cdots}_{k\,\cdots}\,Q^{j\,\cdots}_{l\,\cdots}$.

В настоящей работе определяется вещественная релизация пространства постоянной кривизны $U_r(A_m)$ в случае, когда A_m — алгебра Клиффорда.

2. Обозначим через $G_{ij} = G_{h/ij}\,l^h$ поле метрического тензора пространства $U_r(A_m)$ и пусть $R_{ijks} = K(G_{ik}G_{js} - G_{is}\,G_{ik})$ его тензорное поле кривизны. Если $K = \mathrm{const}$, подобно вещественному случаю, $U_r(A_m)$ называем пространством постоянной кривизны.

Вещественная реализация последного пространства получается применением (1). Если $K = K^a l_a$, $R_{\alpha\beta\sigma\tau}$ и $g_{\alpha\sigma}$—вещественные реализации R_{ijks} и G_{ij}, то

$$R_{\alpha\beta\sigma\tau} = K^h C^{ab}_h (g_{a/\alpha\sigma}\,g_{b/\beta\tau} - g_{a/\alpha\tau}\,g_{b(\beta\sigma)}). \tag{2}$$

Поскольку структура представления интегрируемая [1], т. е. в координатной окрестности всякой точки аффиноры представления A_m можно привести к постоянному виду, то тензорное поле кривизны $R_{\alpha\beta\sigma\tau}$ пространства U_{mr} ковариантно постоянно в U_{mr}.

Теорема 1. *Вещественная реализация риманова пространства над коммутативной, ассоциативной и Фробениусовой алгеброй есть симметрическое риманово B-пространство.*

Структура (2) тензора $R_{\alpha\beta\sigma\tau}$ — необходимое и достаточное условие для того, чтобы U_{mr} было вещественной реализацией пространства постоянной кривизны $U_r(A_m)$.

Пусть дальше $m=2$, т. е. A_m — Алгебра Клиффорда, и пусть $\{\delta^{\alpha}_{\sigma},\ f^{\alpha}_{\sigma}\}$ — операторы представления A_2, соответствующие единицам — $\{1,\ \varkappa\}$, $\varkappa^2 = \omega$, $\omega = \pm 1{,}0$ алгебры A_2. Оператор δ^{α}_{σ} тождественный, а $f^{\alpha}_{\beta}\,f^{\beta}_{\sigma} = \omega\delta^{\alpha}_{\sigma}$.

Если $K = a + \varkappa b$, $a, b = \mathrm{const}$ и $\widetilde{g}_{\alpha\sigma} = f^{\tau}_{\alpha}\,k_{\tau\sigma}$, из (2) получаем

$$R_{\alpha\beta\sigma.}{}^{\tau} = (f^{\tau}_{\varrho}\,g_{\beta\sigma} + \delta^{\tau}_{\varrho}\,\widetilde{g}_{\beta\sigma} - \widetilde{g}_{\varrho\sigma}\delta^{\tau}_{\beta} - g_{\varrho\alpha}f^{\tau}_{\beta})(a\delta^{\varrho}_{\alpha} + \omega b f^{\varrho}_{\alpha}). \tag{3}$$

Определим метрический тензор вещественного симметрического B-пространства U_{2r}. Рассмотрим сначала случай $b=0$, т. е. $U_r(A_2)$ имеет вещественную кривизну.

а) $\omega \neq 0$. В локальной системе координат для f^{α}_{σ} имеет место $f^{\sigma}_{\sigma} = 0$. Из равенства (3) для поля тензора Риччи и скалярной кривизны получаем $R_{\alpha\sigma} = a(n-2)\widetilde{g}_{\alpha\sigma}$, $R=0$;

б) $\omega = 0$, а $R_{\alpha\sigma}$ и R такие же как в случае а), но здесь можно предполагать более общее представление A_2, т. е. что оператор f^{α}_{σ} имеет характеристику $[(\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{p},\ \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{q})]$. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно выбрать такие локальные координаты, что f^{α}_{σ} был в жордановом каноническом виде. Так как $\omega = 0$, следует, что $f^{\sigma}_{\sigma} = 0$.

Отметим, что результат такой же, когда $p=1$ и $b\neq 0$, что проверяется конкретными значениями (3).

Так как в обеих случаях а) и б) в каждой точке U_{2r} алгебраическая структура тензоров кривизны и Риччи такая, что U_{2r} является конформно-эвклидовым симметрическим пространством [3], то верна

Теорема 2. *Вещественная реализация пространства постоянной вещественной кривизны над Клиффордовой алгеброй является симметрическим конформно-эвклидовым пространством.*

Все типы конформно-эвклидовых симметрических пространств перечислены в [4, 366—382]. Их метрический тензор относительно конформно декартовых координат имеет вид:

$$g_{\alpha\sigma}=4\varepsilon a_{\alpha\sigma}/\Omega^2+2B+\alpha, \quad \varepsilon=\pm 1, \tag{4}$$

где $\Omega^2=a_{\alpha\sigma}x^\alpha x^\sigma$ $B=b_{\alpha\sigma}x^\alpha x^\sigma$ и $a_{\alpha\sigma}, b_{\alpha\sigma}$, α — постоянные. Случаи $\alpha>0$, $\alpha<0$, $\alpha=0$ отвечают трем типам таких пространств: приводимым пространствам произвольного числа измерений и пространствам постояннной кривизны, особому типу неприводимых пространств четного числа измерений и, наконец, неприводимым пространствам произвольного числа измерений и эвклидовым пространствам.

Теорема 3. *Вещественная реализация геометрии пространства постоянной вещественной кривизны над Клиффордовой алгеброй является внутренней геометрией первого рода нормализованной B-квадрики.* (*Квадрика в проективном пространстве с коэффициентами B-тензора $g_{\alpha\sigma}$ называется B-квадрикой*).

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 2 и теоремы А. П. Широкова [3]: геометрия любого конформно-эвклидового симметрического пространства может быть реализована как внутренняя геометрия первого рода нормализованной B-квадрикой.

Рассмотрим теперь случай $b\neq 0$ Пусть $\bar{U}_{2r}$ есть B-пространство с метрическим тензором $\bar{g}_{\alpha\sigma}$, являющимся вещественной реализацией пространства постоянной вещественной кривизны над A_2. Допустим, что установлено взаимно однозначное и дифференцируемое соответствие между $\bar{U}_{2r}$ и U_{2r}, при котором

$$\bar{g}_{\alpha\sigma}=g_{\alpha\tau}(a\delta^\tau_\sigma+\omega b f^\tau_\sigma), \tag{5}$$

(при $\omega=1{,}0$ соотношения (5) одинаковы!).

По теореме 2 следует, что $\bar{U}_{2r}$ — конформно-эвклидово симметрическое, а зная строение $\bar{g}_{\alpha\sigma}$, легко найти $g_{\alpha\sigma}$ (4). Это возможно, если $a^2-\omega b^2\neq 0$, т. е. матрица $(a\delta^\sigma_\alpha+\omega b f^\alpha_\sigma)$ невырожденная. Следовательно, если существует указанное соответствие между $\bar{U}_{2r}$ и U_{2r}, то верна

Теорема 4. *Вещественная реализация пространства постоянной кривизны над клиффордовой алгеброй является симметрическим конформно-эвклидовым B-пространством, метрический тензор которого относительно конформно-декартовых координат имеет вид:*

$$g_{\alpha\sigma}=4\varepsilon a_{\alpha\tau}(a\delta^\tau_\sigma-\omega b f^\tau_\sigma)/(a^2-\omega b^2)\,(\Omega^2+2B+\alpha).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В Вишневский. Некоторые свойства дифференциально-геометрических структур, определяемых алгебрами. *Научни трудове Пловд. унив.*, **10**, 1972, кн. 1, 23—29.
2. В. В. Вишневский. О вещественных реализациях тензорных операций в пространствах над алгебрами. *Известия высш. учебн. заведений. Математика*, **1974**, № 5, 62—65.
3. А. П. Широков. Проективная интерпретация конформно-эвклидовых симметрических пространств. *Уч. зап. Казанск. гос. унив.* **116**, 1956, кн. 1, 15—19.
4. П. А. Широков. Избранные работы по геометрии. Казань, 1966.

Пловдивский университет, 4000 Пловдив

Поступила 20. 9. 1976,
в переработанном виде 25. 4. 1978