Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПОДГРУППЫ ω-УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

С. А. ТОДОРИНОВ, П. И. ГЕОРГИЕВА

Пусть G — группа. Через $\Pi(G)$ обозначим множество всех обобщенно периодических элементов группы G. Пусть $P(G)$ частичный порядок группы G. Группа G называется ω-упорядоченной, если для каждого элемента $g \in G \setminus \Pi(G)$ существует целое, ненулевое число m, зависящее от g, и такое, что $g^m \in P(G)$.

В работе доказывается критерий об относительной выпуклости подгруппы в классе ω-упорядоченных групп (Теорема 1) и в классе групп Ω^*, в котором каждый частичный порядок продолжается до ω-порядка (Теорема 2).

Относительно выпуклые подгруппы играют важную роль при рассмотрении ряда основных вопросов теории упорядоченных групп, например, исследование гомоморфных образов упорядоченных групп, продолжение порядков и др.

В 1968-ом году Кокориным и Копытовым [1] была решена проблема поставления в монографии Л. Фукса [4] об относительной выпуклости подгруппы линейно упорядоченной группы. При доказательстве этого критерия и ряда других утверждений, касающихся выпуклых подгрупп линейно упорядоченных групп, существенно используются групповые условия упорядочиваемости. Чтобы решить вопросы, связанные с относительной выпуклостью подгруппы для других видов упорядоченностей, нужно искать новые методы.

Настоящая работа посвящена изучению относительно выпуклых подгрупп ω-упорядоченных групп. Доказываются критерии относительной выпуклости подгруппы ω-упорядоченной группы и ω^*-упорядоченной группы и указывается условие относительной выпуклости подгруппы при максимальном ω-порядке.

0. Пусть G — группа. Элемент $g \in G$ называется обобщенно периодическим, если существуют $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ такие, что $x_1^{-1}gx_1x_2^{-1}gx_2 \ldots x_n^{-1}gx_n = e$, где e единичный элемент группы G. Множество всех обобщенно периодических элементов группы G обозначается через $\Pi(G)$.

Обозначим через F множество всех функций f определенных на $G \setminus \Pi(G)$ и принимающих значения в $Z \setminus \{0\}$, где Z — множество целых чисел.

Пусть G — группа и $P(G)$—частичный порядок группы G. Напомним, что группа G называется ω-упорядоченной, а ее порядок $P(G)$ — ω-порядком, если для каждого элемента $g \in G \setminus \Pi(G)$ существует целое, ненулевое число m, зависящее от g, такое, что $g^m \in P(G)$ [2]. Если G ω-упорядоченная и $g \in G \setminus \Pi(G)$, то через $m(g)$ будем обозначать наименьшее по абсолютному значению число, для которого $g^{m(g)} \in P(G)$. Очевидно, что ω-упорядоченность обобщает понятие линейная упорядоченность, и ее можно рассматривать в группах G, где $\Pi(G) \neq \emptyset$. Группу, которую можно ω-упорядочить, будем называть ω-группой.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 7, 1981, с. 107—116.

Класс всех ω-групп обозначается через Ω.

Будем говорить, что G является ω^*-группой, если каждый частичный порядок $P(G)$ можно продолжить до ω-порядка. Класс всех ω^*-групп обозначим через Ω^*.

Пусть G ω-группа. Может оказаться, что множество всех чисел $m(g)$, $g \in G \diagup \Pi(G)$ ограничено. В таком случае существует наименьшее натуральное число n, для которого имеет место: если $g \in G \diagup \Pi(G)$, то или $g^n \in P(G)$, или $g^{-n} \in P(G)$. Класс всех таких групп (ω_n-групп) обозначим через Ω_n.

Аналогично классу Ω^* определяется и класс Ω_n^*. Легко видеть, что любая абелевая группа принадлежит классу Ω_1^*.

Подгруппа H ω-группы G называется ω-относительно выпуклой, если она является выпуклой при некотором ω-порядке группы G.

Пусть G группа и $H \leqq G$. Мы будем говорить, что H слабо изолированная подгруппа группы G, если для каждого $g \in G \diagup \{H \cup \Pi(G)\}$ и для каждого натурального числа m элемент $g^m \notin H$. Ясно, что любая изолированная подгруппа является слабо изолированной.

Слабая изолированность подгруппы H является естественным ограничением при исследовании относительной выпуклости. Если H выпуклая и $g > h > e$, где $g \in G \diagup \{H \cup \Pi(G)\} h \in H$, то $g^m \notin H$ для каждого натурального m. Допустим, что существует m_0, такое, что $g^{m_0} = h_0 \in H$. Тогда $h_0 = g^{m_0} > g > h > e$ противоречит выпуклости подгруппы H.

1. Теорема 1. *Пусть G — группа, $P(G)$ — частичный порядок группы: G и H — слабо изолированная подгруппа. Частичный порядок $P(G)$ можно продолжить до ω-порядка, относительно которого H является выпук): лой тогда и только тогда, когда для $P(G)$ выполняется условие* (U^ω

Существует функция $f \in F$, такая, что для любого выбора множеств

$$L = \{g_i \mid i = 1, \dots, r\} \leq G \diagdown \{H \cup \Pi(G)\},$$
$$M_i = \{h_{i,\nu} \mid \nu = 1, \dots, t_i\} \leq H, \ i = 1, \dots, r,$$
$$A = \{a_j \mid j = 1, \dots, n\} \leq H \diagdown \Pi(G),$$

для которых $g_i^{f(g_i)} h_{i,\nu} \in G \diagdown \Pi(G)$ выполняются

$$m_{i,\nu} = f(g_i^{f(g_i)} h_{i,\nu}) > 0 \ i = 1, \dots, r; \ \nu = 1, \dots, t_i,$$

$$P \cap S(\{(g_i^{f(g_i)} h_{i,\nu})^{m_{i,\nu}}, i = 1, \dots, r; \ \nu = 1, \dots, t_i\}, a_1^{f(a_1)}, \dots, a_n^{f(a_n)}) = \varnothing.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть частичный порядок $P(G)$ продолжается до ω-порядка Q, относительно которого H является выпуклой. Докажем, что выполняется условие (U_ω). Для каждого $g \in G \diagdown \Pi(G)$ принимаем, что $f(g)$ — это наименьшее по абсолютному значению ненулевое число, для которого $g^{f(g)} \in Q^{-1}$.

Это определение функции $f(g)$ возможно, так как Q — ω-порядок. Пусть L, M_i и A выбраны так, что удовлетворяют всем требованиям условия (U_ω). Тогда

$$g_i^{f(g_i)} < e, \quad i = 1, \dots, r, \tag{1}$$

$$a_j^{f(a_j)} < e, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Рассматриваем элемент $g_{i_0}^{f(g_{i_0})} h_{i_0,\nu_0} \in \Pi(G)$, $i_0 \in \{1, \dots, r\}$; $\nu_0 \in \{1, \dots, t_{i_0}\}$.

Существует наименьшее по абсолютному значению число s_{i_0,ν_0}, такое, что

(3) $$(g_{i_0}^{f(g_{i_0})}h_{i_0,\nu_0})^{s_{i_0,\nu_0}}<e.$$

Если $s_{i_0,\nu_0}>0$, то $m_{i_0,\nu_0}=s_{i_0,\nu_0}$. Пусть $s_{i_0,\nu_0}=-k$, $k>0$. Из (1) следует' что $g_{i_0}^{f(g_{i_0})}h_{i_0,\nu_0}<h_{i_0,\nu_0}$ и $(g_{i_0}^{f(g_{i_0})}h_{i_0,\nu_0})^k<(h_{i_0,\nu_0})^k$. Но из (3) имеем $(g_{i_0}^{f(g_{i_0})}h_{i_0,\nu_0})s^{i_0,\nu}=(g_{i_0}^{f(g_{i_0})}h_{i_0,\nu_0})^{-k}<e$. Следовательно, $e<(g_{i_0}^{f(g_{i_0})}h_{i_0,\nu_0})^k<h_{i_0,\nu_0}^k\in H$. Из выпуклости подгруппы H следует, что $(g_{i_0}^{f(g_{i_0})}h_{i_0,\nu_0})^k\in H, g_{i_0}^{f(g_{i_0})}h_{i_0,\nu_0}=h\in H$. Следовательно, $g_{i_0}^{f(g_{i_0})}=hh_{i_0,\nu_0}^{-1}\in H$ и опять из слабой изолированности H получаем, что $g_{i_0}\in H$. Это противоречит выбору g_{i_0}. Видно, что осуществляется только случай $m_{i_0,\nu_0}=s_{i_0,\nu_0}>0$. Для так выбранных m_{i_0,ν_0} и из (2)

$$S(\{(g_i^{f(g_i)}h_{i,\nu})^{m_{i,\nu}},\ i=1,\ldots,r;\ \nu=1,\ldots,t_i\},\ a_1^{f(a_1)},\ldots,a_n^{f(a_n)})\leq Q^{-1}\setminus\{e\}.$$

С другой стороны, ω-порядок Q является продолжением частичного порядка $P(G)$, т. е.

$$P\cap S(\{(g_i^{f(g_i)}h_{i,\nu})^{m_{i,\nu}},\ i=1,\ldots,r;\ \nu=1,\ldots,t_i\},\ a_1^{f(a_1)},\ldots,a_n^{f(a_n)})$$

$$\subseteq Q\cap S(\{(g_i^{f(g_i)}h_{i,\nu})^{m_{i,\nu}},\ i=1,\ldots,r;\ \nu=1,\ldots,t_i\},\ a_1^{f(a_1)},\ldots,a_n^{f(a_n)})$$

$$\subseteq Q\cap[Q^{-1}\setminus\{\ \}]=\varnothing,$$

откуда следует, что для P выполняется условие (U_ω).

Достаточность. Пусть подгруппа H удовлетворяет условие (U_ω). Докажем, что $P(G)$ продолжается до ω-порядка, относительно которого H является выпуклой.

Через Σ обозначим множество всех расширений частичного порядка P, которые удовлетворяют условие (U_ω), имея одну и ту же функцию f. Пусть $\{P_\alpha, \alpha\in I\}$ — линейно упорядоченная по включению подсовокупность множеству Σ. Легко видеть, что $P^*=\cup_{\alpha\in I}P_\alpha$ удовлетворяет условие (U_ω) и имеет ту же самую функцию f. По лемме Цорна Σ имеет максимальный элемент $\widetilde{P}$. Из условия (U_ω) следует, что $\widetilde{P}$ — ω-порядок. Это можно доказать также, как и критерий ω-упорядочиваемости.

Докажем, что H является выпуклой относительно $\widetilde{P}$.

Пусть $h\in H, g\in G$ и

(4) $$h<g<e.$$

Из (4) следует, что $g\in G\setminus\Pi(G)$. Докажем, что $g\in H\setminus\Pi(G)$. Допустим, что $g\in G\setminus\{H\cup\Pi(G)\}$. Из того, что $\widetilde{P}$ удовлетворяет условие (U_ω), можем написать $\widetilde{P}\cup S(g^{f(g)})=\varnothing$. Из максимальности $\widetilde{P}$ в Σ и того, что $\bar{P}=\widetilde{P}S'(g^{-f(g)})$ также удовлетворяет (U_ω), следует $\bar{P}=\widetilde{P}S'(g^{-f(g)})\equiv\widetilde{P}$ и

(5) $$g^{-f(g)}>e.$$

Если допустим, что $f(g)<0$, то из (4) $g^{-f(g)}<e$ противоречит неравен ству (5). Следовательно, $f(g)>0$ и из (4) $h^{f(g)}<g^{f(g)}<e$, т. е.

(6) $$g^{f(g)}h^{-f(g)}>e.$$

Рассмотрим элементы $g \in G \setminus \{H \cup \Pi(G)\}$ и $h^{-f(g)} \in H$. Из (6) следует $g^{f(g)}h^{-f(g)} \notin \Pi(G)$. Для g, $h^{-f(g)}$ и $\widetilde{P}$ из условия (U_ω) имеем: $m = f(g^{f(g)}h^{-f(g)}) > 0$; $\widetilde{P} \cap S((g^{f(g)}h^{-f(g)})^m) = \varnothing$. Снова из максимальности $\widetilde{P}$ и того, что $\widehat{P} = \widetilde{P}S'((g^{f(g)} \times h^{-f(g)})^{-m}) \in \Sigma$, следует $\widehat{P} = \widetilde{P}S'((g^{f(g)}h^{-f(g)})^{-m}) \equiv \widetilde{P}$, откуда $(g^{f(g)}h^{-f(g)})^m < e$. Последнее противоречит неравенству (6), так как $m > 0$.

Предположение $g \in G \setminus \{H \cup \Pi(G)\}$ привело к противоречию. Тогда $g \in H \setminus \Pi(G)$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. (Критерий ω-относительной выпуклости, слабоизолированной подгруппы.) *Слабо изолированная подгруппа H группы G является ω-относительно выпуклой тогда и только тогда, когда существует функция $f \in F$, такая, что для любого выбора множеств*

$$L = \{g_i / i = 1, \ldots, r\} \subseteq G \setminus \{H \cup \Pi(G)\},$$

$$M_i = \{h_{i,\nu} / \nu = 1, \ldots, t_i\} \subseteq H,\ i = 1, \ldots, r,$$

$$A = \{a_j / j = 1, \ldots, n\} \subseteq H \setminus \Pi(G),$$

для которых $g_i^{f(g_i)}h_{i,\nu} \in G \setminus \Pi(G)$, выполняются:

$$m_{i,\nu} = f(g_i^{f(g_i)}h_{i,\nu}) > 0,\ i = 1, \ldots, r;\ \nu = 1, \ldots, t_i,$$

$$e \notin S(\{(g_i^{f(g_i)}h_{i,\nu})^{m_{i,\nu}},\ i = 1, \ldots, r;\ \nu = 1, \ldots, t_i\},\ a_1^{f(a_1)}, \ldots, a_n^{f(a_n)}).$$

Следствие 2. *Слабо изолированная подгруппа H группы G является ω_n-относительно выпуклой тогда и только тогда, когда для любого выбора множеств*

$$L = \{g_i / i = 1, \ldots, r\} \subseteq G \setminus \{H \cup \Pi(G)\},$$

$$M_i = \{h_{i,\nu} / \nu = 1, \ldots, t_i\} \subseteq H,\ \ i = 1, \ldots, r,$$

$$A = \{a_j / j = 1, \ldots, k\} \subseteq H \setminus \Pi(G)$$

существуют наборы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$; $\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \ldots, r$; $\eta_1, \ldots, \eta_k$; $\eta_j = \pm 1, j = 1, \ldots, k$, *такие, что из* $g_i^{\varepsilon_i n}h_{i,\nu} \in G \setminus \Pi(G)$ *следует* $e \notin S(\{(g_i^{\varepsilon_i n}h_{i,\nu})^n;\ \ i = 1, \ldots, r;\ \nu = 1, \ldots, t_i\},\ a_1^{\eta_1 n}, \ldots, a_k^{\eta_k n})$.

2. Пусть G — группа, $\Pi(G)$ — совокупность обобщенно периодических элементов, H — подгруппа G. Через Φ обозначаем класс функций, определенных на $G \setminus \{H \cup \Pi(G)\}$ и принимающих свои значения в $Z \setminus \{0\}$, т. е. $\Phi = \{\varphi g \in G \setminus \{H \cup \Pi(G)\},\ \varphi(g) \in Z \setminus \{0\}\}$.

Теорема 2. *Слабо изолированная подгруппа H ω^*-группы G является ω-относительно выпуклой тогда и только тогда, когда выполняется условие (U_{ω^*}):*

Существует функция $\varphi \in \Phi$, такая, что для любого набора множеств

$$L = \{g_i / i = 1, \ldots, r\} \subseteq G \setminus \{H \cup \Pi(G)\},$$
$$M_i = \{h_{i,\nu} / \nu = 1, \ldots, t_i\} \subseteq H,\ i = 1, \ldots, r,$$

для которых $g_i^{\varphi(g_i)}h_{i,\nu} \in G \setminus \Pi(G)$ выполняются:

$$m_{i,\nu} = \varphi(g_i^{\varphi(g_i)}h_{i,\nu}) > 0,\ i = 1, \ldots, r;\ \nu = 1, \ldots, t_i,$$

$$e \notin S(\{(g_i^{\varphi(g_i)}h_{i,\nu})^{m_{i,\nu}},\ i = 1, \ldots, r;\ \nu = 1, \ldots t_i\}).$$

Доказательство. Необходимость. Условие необходимо, так как является следствием из (U_ω) при $A=\varnothing$ и соответственно $f\in\Phi$.

Достаточность. Пусть выполняется условие (U_{ω^*}). Упорядочим трансфинитно множество $H\setminus\Pi(G)$. Обозначим через $\widehat{S}$ подполугруппу, порожденную всеми элементами типа $(g_i^{\varphi(g_i)}h_{i,\nu})^{m_{i,\nu}}$, где $h_{i,\nu}\in H$,

$$g_i\in G\setminus\{H\cup\Pi(G)\};\ g_i^{\varphi(g_i)}h_{i,\nu}\notin\Pi(G);\ m_{i,\nu}=\varphi(g_i^{\varphi(g_i)}h_{i,\nu}).$$

а) Рассмотрим элемент a_k, где $k=1$ или a_k имеет непосредственно предшествующий элемент.

Допустим, что для элементов $a_1,\ldots,a_{k-1}$ существуют целые числа $\varphi(a_1),\ldots,\varphi(a_{k-1})$, такие, что

$$e\notin S(\widehat{S},a_1^{\varphi(a_1)},\ldots,a_{k-1}^{\varphi(a_{k-1})}),\tag{1}$$

но для каждого целого числа l $(l\neq0)$

$$e\in S(\widehat{S},a_1^{\varphi(a_1)},\ldots,a_{k-1}^{\varphi(a_{k-1})},a_k^l).\tag{2}$$

Из (2) следует, что для любого $m>0$

$$e=s_mb_m,\tag{3}$$

$$e=t_mc_m,\tag{4}$$

где $t_m,s_m\in S(\widehat{S},a_1^{\varphi(a_1)},\ldots,a_{k-1}^{\varphi(a_{k-1})})$; $b_m\in S(a_k^m)$; $c_m\in S(a_k^{-m})$. Для b_m,c_m имеем что $b_m\neq e$, $c_m\neq e$ для любого m, так как предположение, что $b_m=e$ или $c_m=e$, (3) и (4) приведет к противоречию с реляцией (1).

Будем пользоваться следующим критерием из [3].

Группа $G\in\Omega^*$ тогда и только тогда, когда любой $g\in G\setminus\Pi(G)$ удовлетворяет условию: для любого набора элементов b_i,c_i; $b_i,c_i^{-1}\in S(g_l^i)$, хотя одна из инвариантных полугрупп

$$S(b_1,b_2,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_n)$$

содержит единицу группы G.

Так как рассматриваемая в теореме группа G принадлежит классу Ω^*, то существует $m=m_0$, такое, что

$$e\in S(b_1,b_2,\ldots,b_{m_0},c_1,\ldots,c_{m_0}).\tag{5}$$

Используя равенства (3), (4) и (5) и подходящие преобразования, получаем

$$e=s't',\tag{6}$$

где $s',t'\in S(\widehat{S},a_1^{\varphi(a_1)},\ldots,a_{k-1}^{\varphi(a_{k-1})})$.

При $k=1$ (6) противоречит условию (U_{ω^*}), а при $k>1$ предположению (1),

б) У элемента a_k нет непосредственно предшествующего элемента.

Допустим, что для каждого элемента a_q, $q<k$, существует $\varphi(a_q)$, такое, что $e\notin S_q(\widehat{S},a_1^{\varphi(a_1)},\ldots,a_q^{\varphi(a_q)})$. Рассматриваем последовательность подполугрупп $S_1,S_2,\ldots,S_q,\ldots$. Определим $S_k=S(S'_k,a_k^{\varphi(a_k)})$, где $S'_k=\bigcup\limits_{q<k}S_q$. Пусть для элемента a_k как бы и не сопоставляли число $l\in Z\setminus\{0\}$ имеем $e\in S_k$.

Из определения полугруппы S_k следует, что существует хотя бы одно $q<k$, такое, что $e \in S(S_q, a_k^{\varphi(a_k)})$.

Если q такое, что a_q имеет непосредственно предшествующий элемент, продолжаем так, как в пункте а), а если a_q не имеет непосредственно предшествующего элемента, снова приложим б).

Во всех случаях предположение, что нельзя доопределить функцию φ для элементов из $H \setminus \Pi(G)$, ведет к противоречию. Следовательно, функцию φ можно доопределить, а тогда по теореме 1 H является относительно выпуклой, что и требовалось доказать.

Следствие 3. *Пусть $G \in \Omega_n^*$ и H — слабо изолированная подгруппа группы G. H является ω_n-относительно выпуклой тогда и только тогда, когда для любого набора элементов $g_1, \ldots, g_r \in G \setminus \{H \cup \Pi(G)\}$ существуют $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$; $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, r$, такие, что для любого выбора совокупностей $M_i = \{h_{i,\nu}; \nu = 1, \ldots, t_i\}, i = 1, \ldots, r$, для которых $g_i^{\varepsilon_i n} h_{i,\nu} \notin \Pi(G)$ выполняется $e \notin S(\{(g_i^{\varepsilon_i n} h_{i,\nu})^n; i = 1, \ldots, r; \nu = 1, \ldots, t_i\})$.*

Заметим, что если G — абелевая группа и H — слабо изолированная подгруппа, то произведение $[G \setminus \{H \cup \Pi(G)\}] . H$, рассматриваемое как произведение комплексов, не содержит периодических элементов. Действительно, если $g \in G \setminus \{H \cup \Pi(G)\}$, $h \in H$ и допустим, что $(gh)^m = e$, то $g^m = h^{-m} \in H$. Из слабой изолированности подгруппы H следует $g \in H$, которое противоречит выбору элемента g.

Следствие 4. *Любая слабо изолированная подгруппа абелевой группы является ω_1-относительно выпуклой.*

Доказательство. Пусть G — абелевая группа, H — слабо изолированная подгруппа, G^* — минимальная полная абелевая группа, содержащая G. Через $I(H)$ обозначим изолятор подгруппы H в G^*, а через $\pi(G)$ совокупность периодических элементов группы G. Ясно, что $I(H) \supseteq \pi(G)$ и $I(H) \supseteq H$.

Докажем, что если $I(H)$ является ω_1-выпуклой подгруппой группы G^*, то H ω_1-относительно выпуклая в G.

Пусть $e < x < h$, где $h \in H$, $x \in G$.

Из относительной выпуклости $I(H)$ и $I(H) \supseteq H$ следует, что $x \in I(H)$. Существует тогда число $l(x)$, такое, что $x^{l(x)} \in H$. Из слабой изолированности подгруппы H следует, что $x \in H$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что $I(H)$ является ω_1-относительно выпуклой в G^*. Мы будем применять следствие 3. Имея в виду, что $n = 1$ и замечание, сделанное для абелевых групп, докажем только, что имеет место условие $(U_{\omega^*}^a)$:

Для любого набора: $g_1, \ldots, g_r \in G^* \setminus \{I(H) \cup \pi(G^*)\}$ существуют $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$; $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, r$, такие, что для любых $M_i = \{h_{i,\nu} / \nu = 1, \ldots, t_i\} \leq I(H)$, $i = 1, \ldots, r$ выполняется $e \notin S(\{g_i^{\varepsilon_i} h_{i,\nu} / i = 1, \ldots, r; \nu = 1, \ldots, t_i\})$.

Пусть $r = 1$. Предположим, что условие $(U_{\omega^*}^a)$ не выполняется, т. е. существует $g_1 \in G^* \setminus \{I(H) \cup \pi(G)\}$, такой, что для любого $\varepsilon_1 = \pm 1$ существует множество $M_1 = \{h_{1,1}, \ldots, h_{1,t_1}\} \subseteq I(H)$, такое, что $e \in S(g_1^{\varepsilon_1} h_{1,1}, \ldots, g_1^{\varepsilon_1} h_{1,t_1})$. Следовательно, $e = (g_1^{\varepsilon_1})^s h_1$, где $h_1 \in I(H)$ и $(g_1^{\varepsilon_1})^s \neq e$, так как $g_i^{\varepsilon_i} \notin \pi(G^*)$. Тогда

$(g_1^{\varepsilon_1})^s = h_1^{-1} \in I(H)$, а из изолированности $I(H)$ в G^* следует $g_1 \in I(H)$, что противоречит выбору элемента g_1.

Предположим, что условие выполняется для $r-1$, но не выполняется для r.

Следовательно существуют $\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{r-1}$; $\varepsilon_1 = \pm 1$, $i = 1, \ldots, r-1$, такие, что для любого выбора множеств $M_i = \{h_{i,\nu}/\nu = 1, \ldots, t_i\} \subseteq I(H)$ $i = 1, \ldots, r-1$, $e \notin \widehat{S} = S(\{g_i^{\varepsilon_i} h_{i,\nu}/i = 1, \ldots, r-1;\ \nu = 1, \ldots, t_i\})$ и для любых $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r-1}, \varepsilon_r$; $\varepsilon_i = \pm 1$ $i = 1, \ldots, r$ существуют $M_i^* = \{h_{i,\nu}/\nu = 1, \ldots, t_i\} \subseteq I(H)$ $i = 1, \ldots, r$, такие, что

$$e \in S(\{g_i^{\varepsilon_i} h_{i,\nu}/\nu = 1, \ldots, r;\ \nu = 1, \ldots, t_i\}).$$

Рассматриваем набор $\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{r-1}, \varepsilon_r = 1$. Существуют $M'_i \subseteq I(H)$, $i = 1, \ldots, r$, такие, что $e \in S(\{g_i^{\varepsilon'_i} h_{i,\nu}/i = 1, \ldots, r-1;\ \nu = 1, \ldots, t_i\}, g_r h'_{r,1}, \ldots, g_r h'_{r,t'_r})$, а для $\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{r-1}, \varepsilon_r = -1$ существуют $M''_i \subseteq I(H)$ $i = 1, \ldots, r$, такие, что

$$e \in S(\{g_i^{\varepsilon'_i} h''_{i,\nu}/i = 1, \ldots, r-1;\ \nu = 1, \ldots, t_i\}, g_r^{-1} h''_{r,1}, \ldots, g_r^{-1} h''_{r,t''_r}).$$

Следовательно, $e = s_1 g_r^{m_1} \overline{h}_r$, $e = s_2 g_r^{-m_2} \overline{\overline{h}}_r$; где $s_1, s_2 \in \widehat{S}$. Получаем

$$e = s_1^{m_2} s_2^{m_1} \overline{h}_r^{m_2} \overline{\overline{h}}_r^{m_1}, \tag{7}$$

где $\overline{h}_r^{m_2} \overline{\overline{h}}_r^{m_1} = h \in I(H) \subseteq G^*$. Так как G^* полная, можем написать h как подходящую степень α элемента из $I(H)$, чтобы получить в правой стороне равенства множитель вида $(g_{i_0}^{\varepsilon'_{i_0}} h_{i_0,\nu_0})^\alpha \in \widehat{S}$. Тогда $e = \overline{s}_1 \overline{s}_2$, где $s_1, s_2 \in \widehat{S}$, что противоречит предположению.

Так мы индукцией доказали, что $I(H)$ ω_1-относительно выпуклая подгруппа, а из этого следует, что и $H \omega_1$ — относительно выпуклая, что и требовалось доказать.

3. Теорема 3. *Пусть G — группа, H — слабо-изолированная подгруппа группы G, $(P)G$ — частичный порядок на G. $(P)G$ продолжается до максимального ω-порядка Q, относительно которого H является выпуклой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

А. *Существует функция $f \in F$, такая, что $P \cap S(g_1^{f(g_1)}, \ldots, g_n^{f(g_n)}) = \emptyset$ для любого конечного набора элементов $g_1, \ldots, g_n \in G \setminus \Pi(G)$.*

Б. *Если $g \in G \setminus \{H \cup \Pi(G)\}$; $h \in H \setminus \Pi(G)$; $f(g) = f(h) = -1$ и $e \notin S(hg^{-1}, b_1^{f(b_1)}, \ldots, b_l^{f(b_l)}) \cap S(gh^{-1}, c_1^{f(c_1)}, \ldots, c_k^{f(c_k)})$ для любого конечного набора, элементов $b_1, \ldots, b_l, c_1, \ldots, c_k \in G \setminus \Pi(G)$, то $P \cap S(hg^{-1}, d_1^{f(d_1)}, \ldots, d_m^{f(d_m)}) = \emptyset$ для любого конечного набора элементов $d_1, \ldots, d_m \in G \setminus \Pi(G)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $P(G)$ продолжается до максимального ω-порядка Q, относительно которого подгруппа H выпуклая. Тогда существует функция $f \in F$, такая, что выполняется условие А и для каждого элемента $g \in G \setminus \Pi(G)$

$$g^{f(g)} \in Q^{-1}. \tag{1}$$

Пусть f такая функция, что для каждого $g \in G \setminus \Pi(G) f(g)$ является минимальным по абсолютному значению числом, для которого выполнено (1).

Докажем, что выполняется условие Б. Пусть $g \in G \setminus \Pi(G)$, $h \in H \setminus \Pi(G)$ такие, что удовлетворяют всем требованиям условия В, но существуют $d_1, \ldots, d_m \in G \setminus \Pi(G)$ такие, что

$$P \cap S(hg^{-1}, d_1^{f(d_1)}, \ldots, d_m^{f(d_m)}) \neq \varnothing,$$

I $$x \neq e;\ x \in P \cap S(hg^{-1}, d_1^{f(d_1)}, \ldots, d_m^{f(d_m)}).$$

Из $x \in P$ следует $x^{-1} \in P^{-1} \subset Q^{-1}$ и $f(x) = -1$, а из $x \in S(hg^{-1}, d_1^{f(d_1)}, \ldots, d_m^{f(d_m)})$ следует, что

$$x = s \in S(hg^{-1}, d_1^{f(d_1)}, \ldots, d_m^{f(d_m)}),$$

$$e = sx^{-1} \in S(hg^{-1}, d_1^{f(d_1)}, \ldots, d_m^{f(d_m)}, x^{f(x)}).$$

Так как выполняются требования условия Б $e \notin S(gh^{-1}, c_1^{f(c_1)}, \ldots, c_k^{f(c_k)})$ для любых $c_1, \ldots, c_k \in G \setminus \Pi(G)$;

II $$x = e;\ x \in P \cap S(hg^{-1}, d_1^{f(d_1)}, \ldots, d_m^{f(d_m)}).$$

Следовательно, $e \in S(hg^{-1}, d_1^{f(d_1)}, \ldots, d_m^{f(d_m)})$ и из выполнения требования условия Б $e \notin S(gh^{-1}, c_1^{f(c_1)}, \ldots, c_k^{f(c_k)})$ для любых $c_1, \ldots, c_k \in G \setminus \Pi(G)$. В обоих случаях видно, что $S(gh^{-1}, c_1^{f(c_1)}, \ldots, c_k^{f(c_k)})$ является частичным порядком. Докажем, что

(2) $$Q \cap S(gh^{-1}, c_1^{f(c_1)}, \ldots, c_k^{f(c_k)}) = \varnothing.$$

Пусть $c'_1, \ldots, c'_k$, такие, что $y \in Q \cap S(gh^{-1}, c_1'^{f(c'_1)}, \ldots, c_k'^{f(c'_k)})$. Следовательно: $y \in Q$; $y^{-1} \in Q^{-1}$ и $f(y) = -1$, $y, y^{-1} \in S(gh^{-1}, c_1'^{f(c'_1)}, \ldots, c_k'^{f(c'_u)}, y^{f(y)})$ противоречие с тем, что $S(gh^{-1}, c_1^{f(c_1)}, \ldots, c_k^{f(c_k)})$ для любых конечных наборов является частичным порядком.

Из (2) следует, что $Q' = QS'(hg^{-1}, c_1^{-f(c_1)}, \ldots, c_k^{-f(c_k)})$ частичный порядок продолжающей Q. Так как Q — максимальный порядок, то $Q' \equiv Q$. Тогда $hg^{-1} \in Q$, т. е. $hg^{-1} > e$ и $h > g$. Но для элемента g $f(g) = -1$ и, следовательно, $g^{-1} < e$, $g > e$. Получаем $h > g > e$, что противоречит выпуклости подгруппы H. Этим и доказано, что выполняется условие Б.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $P(G)$ — частичный порядок, для которого выполняются условия А и Б. Рассмотрим $a \in G \setminus \Pi(G)$ и $P_1 = PS'(a^{-f(a)})$. Из выполнения А для P следует, что P_1 — частичный порядок. Легко проверить, что для P_1 тоже выполняется условие А. Докажем, что для P_1 выполняется и условие Б.

Допустим, что элементы $g \in G \setminus \{H \cup \Pi(G)\}$; $h \in H \setminus \Pi(G)$ удовлетворяют всем требованиям условия Б, но тем не менее существует конечной набор элементов $d'_1, \ldots, d'_m \in G \setminus \Pi(G)$, такие, что

(3) $$S(hg^{-1}, d_1'^{f(d'_1)}, \ldots, d_m'^{f(d'_m)}) \cap PS'(a^{-f(a)}) \neq \varnothing.$$

Из (3) следует $S(hg^{-1}, d_1'^{f(d_1')}, \ldots, d_m'^{f(d_m')}, a^{f(a)}) \cap P \neq \varnothing$, что противоречит предположению о выполняемости условия Б) для частичного порядка P.

Пусть Σ — совокупность всех расширений частичного порядка P, удовлетворяющие А и Б. Как уже доказали, $\Sigma \neq \varnothing$. Можем предполагать, что все порядки из Σ имеют одну и ту же функцию f. Если $\Sigma_0 = \{P_\alpha \in \Sigma, \alpha \in I\}$ линейно упорядоченная по включению подсовкупность совокупности Σ, то легко доказать, что $P^* = \bigcup_{\alpha \in I} P_\alpha$ — опять частичный порядок, удовлетворяющий А) и Б) при помощи этой же функции f. По лемме Цорна Σ имеет максимальный элемент $\widetilde{P}$, который удовлетворяет А и Б и имеет ту же функцию. В силу условия А $\widetilde{P}$ является ω-порядком и включается в максимальный ω-порядок Q. Докажем, что H выпукла относительно Q. Пусть

$$x > y > e \tag{4}$$

относительно Q, где $x \in H \setminus \Pi(G), y \in G \setminus \Pi(G)$. Нужно доказать, что $y \in H \setminus \Pi(G)$. Предположим, что $y \in G \setminus \{H \cup \Pi(G)\}$. Так как $x, y \notin \Pi(G)$, то $x^{f(x)} \in \widetilde{P}^{-1}$, $y^{f(y)} \in \widetilde{P}^{-1}$

$$x^{-f(x)} \in \widetilde{P} \subset Q,\ y^{-f(y)} \in \widetilde{P} \subset Q. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $f(x) < 0$; $f(y) < 0$. Пусть $\delta = \text{НОК}\,(f(x), f(y))$; $\delta < 0$. Из (4)

$$x^{-\delta} > y^{-\delta} > e. \tag{6}$$

Положим

$$h = x^{-\delta}, \quad g = y^{-\delta}. \tag{7}$$

Так как $h = x^{-\delta} \in \widetilde{P}$, $g = y^{-\delta} \in \widetilde{P}$, то следует $h, g \notin \Pi(G)$ и $h^{-1}, g^{-1} \in \widetilde{P}^{-1}$, т. е. $f(h) = f(g) = -1$. Из $x \in H \setminus \Pi(G)$ и (7) следует $h \in H \setminus \Pi(G)$, а из $y \in G \setminus \{H \cup \Pi(G)\}$, (7) и слабой изолированности подгруппы H следует $g \in G \setminus \{H \cup \Pi(G)\}$.

Для $\widetilde{P}, g, h$ должно выполняться условие Б. Одно из требований условия Б, а именно $f(g) = f(h) = -1$, мы уже установили. Из (6) и (7) получаем $gh^{-1} < e$. Следовательно, для каждого конечного набора $c_1, \ldots, c_k \in G \setminus \Pi(G) S(gh^{-1}, c_1^{f(c_1)}, \ldots, c_k^{f(c_k)}) \notin e$, т. е. выполняется и второе требование. Но опять из (6) и (7) следует, что $hg^{-1} \in \widetilde{P}$ и

$$hg^{-1} \in S(hg^{-1}, d_1^{f(d_1)}, \ldots, d_m^{f(d_m)}) \cap \widetilde{P}$$

для любого выбора элементов $d_1, \ldots, d_m \in G \setminus \Pi(G)$. Так мы получили, что для $\widetilde{P}, g, h$ выполняются все требования условия Б), но тем не менее не имеет место заключение этого условия. Это противоречит факту, что для $\widetilde{P}$ условие Б выполняется. Противоречие получается из-за предположения, что $y \in G \setminus \{H \cup \Pi(G)\}$.

Следовательно, $y \in H \setminus \Pi(G)$, что и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Кокорин, В. М. Копытов. Относительно выпуклые подгруппы упорядочиваемых групп. *Сиб. мат. ж.*, 9, 1968, 833—839.
2. С. А. Тодоринов. Един клас от нелинейно наредени групи, I. *Научни трудове на Пловд. унив., мат.*, **5**, 1967, № 3, 49—57.
3. С. А. Тодоринов. Об одном классе частично упорядоченных групп. *Алгебра и логика*, **10**, 1971, 76—80.
4. Л. Фукс. Частично упорядоченные алгебраические системы.

ВИХВП, Кафедра высшей математики
4000 Пловдив

Поступила 10. 7. 1979