Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

ВЫЧИСЛИМОСТЬ В СМЫСЛЕ МОСКОВАКИСА И ЕЕ СВЯЗЬ С ЧАСТИЧНОЙ РЕКУРСИВНОСТЬЮ ЧЕРЕЗ НУМЕРАЦИИ

АНГЕЛ В. ДИЧЕВ

В настоящей работе рассматривается связь между вычислимостью в смысле Московакиса, определенной в произвольном множестве, и частичной рекурсивностью при нумерации элементов этого множества.

В работе [5] Московакис определил понятие вычислимости в произвольном множестве B. Возникает вопрос: если множество B счетно и его элементы нумеруются данным способом, то справедливо ли, что для каждой вычислимой функции существует частично рекурсивная функция (ч. р. ф.), которая „действует над номерами" элементов множества B так же, как и данная вычислимая функция „действует" над самими элементами множества B. Ответ на этот вопрос положителен и дается в настоящей статье.

По обратному вопросу высказана гипотеза Д. Скордева, которая, грубо говоря, звучит так: пусть дано конечное число функций одного или нескольких переменных. Они определяют данным в статье способом класс из „нумераций". Если для некоторой функции известно, что относительно каждой „нумерации" из этого класса существует ч. р. ф., которая „действует над номерами" так же, как и данная функция, то эта функция вычислима относительно заданных прежде функций. Этот вопрос, конечно, более интересен и труден, и ответ на него в настоящей статье дается только частично.

Пусть B — произвольное множество, $\boldsymbol{0} \notin B$ и $B_0 = B \cup \{\boldsymbol{0}\}$. Определим множество B^* следующим образом:

1. Есл $s \in B_0$, то $s \in B^*$.
2. Если $s \in B^*$ и $t \in B^*$, то $\langle s, t \rangle \in B^*$.

Предполагаем, что множество B_0 не содержит упорядоченных пар. Это, конечно, не ограничивает общности, потому что от операции упорядочения пар требуется возможность однозначно распознавать, является ли элемент из B^* упорядоченной парой, и если да, то какова последовательность компонент. Так что если некоторые элементы множества B_0 являются упорядоченными парами, то мы можем определить понятие упорядоченной пары другим подходящим способом.

Положим по определению $\boldsymbol{1} = \langle \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0} \rangle$, $\boldsymbol{2} = \langle \boldsymbol{1}, \boldsymbol{0} \rangle$ и т. д. В B^* определим две функции π и δ следующим образом: $\pi(\langle s, t \rangle) = s$; $\delta(\langle s, t \rangle) = t$; $\pi(s) = \delta(s) = \boldsymbol{1}$, если $s \in B$; $\pi(\boldsymbol{0}) = \delta(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$.

Функцию, определенную всюду в B^* и принимающую значение x для всех элементов B^*, будем обозначать через $\breve{x}$.

Через $\mathcal{F}$ обозначим множество всех частично определенных функций в B^*. Для того чтобы указать, что некоторая функция φ всюду определена в некотором подмножестве M_1 множества B^*, и ее значения содержатся в M_2, будем писать $\varphi: M \to M_2$. Если хотим сказать, что φ частично определена в M_1 и ее значения содержатся в M_2, то пишем $\varphi: M_1 - \ominus \to M_2$. Далее, $!\varphi(x)$ обозначает, что x принадлежит области определения φ.

В $\mathcal{F}$ определим три операции — композиция, сочетание и итерация:
1. Композиция функций φ_1 и φ_2 обозначается через $\varphi_1\varphi_2$ и определяется при помощи равенства $\varphi_1\varphi_2(s) = \varphi_1(\varphi_2(s))$;
2. Сочетание функций φ_1 и φ_2 обозначается через $\Pi(\varphi_1, \varphi_2)$ и определяется при помощи равенства $\Pi(\varphi_1, \varphi_2)(s) = \langle \varphi_1(s), \varphi_2(s) \rangle$.
3. Итерация функции φ, управляемая функцией χ, обозначается через $[\varphi, \chi]$ и определяется при помощи эквивалентности:

$$[\varphi, \chi](s) = t \leftrightarrow \exists m \exists r_0 \ldots \exists r_m \{r_0 = s \& r_m = t \& \chi(r_m) \in B_0 \& \underset{i<m}{\forall} i (r_{i+1} = \varphi(r_i) \& \chi(r_i) \in B^* \setminus B_0)\}$$

Определим упорядоченную k-орку $\langle\langle b_1, \ldots, b_n \rangle\rangle$ следующим образом:
1. $\langle\langle b_1 \rangle\rangle = b_1$;
2. $\langle\langle b_1, \ldots, b_k, b_{k+1} \rangle\rangle = \langle \langle\langle b_1, \ldots, b_k \rangle\rangle, b_{k+1} \rangle$;

Через B_0^k обозначим множество $\{\langle\langle b_1, \ldots, b_k \rangle\rangle : b_i \in B_0, i = 1, \ldots, k\}$. Очевидно, множество B_0^k содержится в B^* для каждого натурального k.

Пусть $\psi_j : B^* - \ominus \to B^*, j = 1, \ldots, l$. Будем говорить, что φ просто вычислима относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$, если φ получается из $\psi_1, \ldots, \varphi_l, \pi, \delta$ и произвольных всюду определенных константных функций $\check{x}\,(x \in B^*)$ с помощью конечного числа приложений операций композиции, сочетания и итерации.

Пусть $\varphi: B^* - \ominus \to B^*$. Функция φ вычислима относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$, если существует просто вычислимая относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$ функция θ такая, что $\varphi(s) = t \leftrightarrow \exists r\,(\theta(\langle s, r \rangle) = t)$.

Определения, данные нами для просто вычислимой и вычислимой функции, близки к определениям в работе [5], но не повторяют их. Тем не менее, эти определения эквивалентны, что доказывается в работе [4] Д. Скордева. Выбор определений в данной статье объясняется их простотой и краткостью.

Если $\varphi: B_0^k - \ominus \to B_0$, то $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, где $x_1, \ldots, x_k$ из B_0, обозначает $\varphi(\langle\langle x_1, \ldots, x_k \rangle\rangle)$.

Будем предполагать, что множество B не пусто.

Пусть теперь множество B не более чем счетно. Нумерацией первого рода этого множества будем называть каждую функцию α, где $\alpha: N \xrightarrow{\text{на}} B$, а нумерацией второго рода будем называть каждую функцию α_0, где $\alpha_0: N \xrightarrow{\text{на}} B_0$ и $\alpha_0^{-1}(O)$ — рекурсивно.

Рассмотрим произвольную нумерацию первого рода α. Будем говорить, что φ эффективна относительно $\alpha\,(\varphi: B^k - \ominus \to B)$, если существует ч. р. ф. f от k переменных такая, что для всех $i_1, \ldots, i_k$ из N $\varphi(\alpha(i_1), \ldots, \alpha(i_k)) = \alpha(f(i_1, \ldots, i_k))$. Здесь равенство надо понимать условно, то есть, если $!\varphi(\alpha(i_1), \ldots, \alpha(i_k))$, то $!\alpha(f(i_1, \ldots, i_k))$, и в этом случае $\varphi(\alpha(i_1), \ldots, \alpha(i_k))$ равно $\alpha(f(i_1, \ldots, i_k))$, и если $!\alpha(f(i_1, \ldots, i_k))$, то $!\varphi(\alpha(i_1), \ldots, \alpha(i_k))$.

О подмножестве C множества B^k будем говорить, что оно эффективно перечислимо относительно α, если множество $\{(i_1, \ldots, i_k) : \langle\langle \alpha(i_1), \ldots, \alpha(i_k) \rangle\rangle \in C\}$ — рекурсивно перечислимо (р. п.).

Пусть $\psi_j : B^{k_j} - \ominus \to B$ и $C_i \subseteq B^{r_i}$, $j = 1, \ldots, l$; $i = 1, \ldots, m$. Говорим, что нумерация α согласована с $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $C_1, \ldots, C_m$, если $\varphi_1, \ldots, \psi_l$ эффективны относительно α, и $C_1, \ldots, C_m$ эффективно перечислимы относительно α.

Говорим, что $\varphi(\varphi : B^k -\ominus\rightarrow B)$ допустима относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l; C_1, \ldots, C_m$, если φ эффективна относительно каждой нумерации, согласованной с $\psi_1, \ldots, \psi_l; C_1, \ldots, C_m$.

Аналогичным образом можем определить понятие допустимости относительно данных функций и множеств в случае нумерации второго рода. В этом случае определение будет отличаться от предыдущего только заменой B на B_0 и α на α_0.

Верно следующее предложение: если $\varphi : B^k -\ominus\rightarrow B$ и $\psi_j : B^{k_j} -\ominus\rightarrow B$, $C_i \subseteq B^{r_i}$, $j = 1, \ldots, l$; $i = 1, \ldots, m$, то функция φ допустима относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $C_1, \ldots, C_m$ при использовании нумераций первого рода тогда и только тогда, когда φ допустима относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $C_1, \ldots, C_m$ при использовании нумераций второго рода.

Доказательство этого предложения сводится к простой проверке определения и использованию некоторых свойств из теории рекурсивных функций (излагаемых, например, в [1; 2]).

Для того чтобы учесть и случай, когда B несчетно, будем рассматривать более общие нумерации, которые назовем многозначными. В этом случае также можно определить нумерации первого и второго родов. Мы определим понятие многозначной нумерации второго рода и будем использовать только такие нумерации.

Если $\mathfrak{R} \subseteq N \times B_0$, $\mathfrak{R}_1 = \{i : \exists x[(i, x) \in \mathfrak{R}]\}$, $\mathfrak{R}_2 = \{x : \exists i[(i, x) \in \mathfrak{R}]\}$, то $\mathfrak{R}$ будем называть многозначной нумерацией, если $\mathfrak{R}_1 = N$, $\mathfrak{R}_2 = B_0$, $\{i ; (i, \boldsymbol{O}) \in \mathfrak{R}\}$ рекурсивно и $\forall x[(i, x) \in \mathfrak{R} \,\&\, (i, \boldsymbol{O}) \in \mathfrak{R} \rightarrow x = \boldsymbol{O}]$. Если множество B не более чем счетно, то пример многозначной нумерации дает нам график каждой однозначной нумерации второго рода.

Пусть $I(i_1, i_2) = 2^{i_1}(2i_2 + 1)$, а L и R — примитивно рекурсивные функции, определяемые равенствами $L(0) = R(0) = 0$, $L(I(i_1, i_2)) = i_1$, $R(I(i_1, i_2)) = i_2$. Положим $I'(i_1, i_2) = I(I(L(i_1), L(i_2)), I(R(i_1), R(i_2)))$. Через N_0 обозначим множество нечетных чисел. Определим множество N^* следующим образом:

1. Если $i_1 \in N_0$, то $i_1 \in N^*$.
2. Если $i_1 \in N^*$ и $i_2 \in N^*$ то $I'(i_1, i_2) \in N^*$.

Здесь I' кодирует упорядоченные пары. Если рассмотреть внимательно определения N^* и B^*, можно заметить, что N^* и B^* определяются аналогичными способами.

Множество N^* рекурсивно перечислимо, потому что оно является минимальной неподвижной точкой оператора перечисления [3]. Следовательно, существует одноместная ч. р. ф. h_1 с областью определения N^*.

Пусть $h(i) = C_1^1(h_1(i))$, где C_a^n обозначает n-местную всюду определенную на N константу a.

Если $\mathfrak{R}$ — произвольная многозначная нумерация B_0, мы можем определить расширение $\overline{\mathfrak{R}}$ многозначной нумерации $\mathfrak{R}$ на B^*. Это расширение не является нумерацией B^* и играет только вспомогательную роль.

1. Если $(i, x) \in \mathfrak{R}$, то $(I(0, i), x) \in \overline{\mathfrak{R}}$.
2. Если $(i_1, x_1) \in \overline{\mathfrak{R}}$ и $(i_2, x_2) \in \overline{\mathfrak{R}}$, то $(I'(i_1, i_2), \langle x_1, x_2 \rangle) \in \overline{\mathfrak{R}}$.

Положим $I^1(i_1) = i_1$

$$I^{k+1}(i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}) = I(I^k(i_1, \ldots, i_k), i_{k+1}).$$

Это индуктивное определение системы функций $\{I^k\}_{k=1}^{\infty}$.

Докажем несколько лемм, относящихся к $\overline{\mathfrak{R}}$.

Лемма 1. *Для каждого положительного натурального* k *и для всех* $i_1, \ldots, i_k$ *из* N, $I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)) \in N^*$.

Лемма 2. *Если* $(i_1, x_1) \in \mathfrak{R} \& \ldots \& (i_k, x_k) \in \mathfrak{R}$, *то* $(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)), \langle\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\rangle \in \overline{\mathfrak{R}}$.

Лемма 3. *Пусть* $i \in N^*$ *и* $L(i) = I^k(0, \ldots, 0)$. *Тогда существуют* $i_1, \ldots, i_k$ *из* N *такие, что* $i = I(I^k(0, \ldots 0), I^k(i_1, \ldots, i_k))$.

Лемма 4. *Если* $(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)), x) \in \overline{\mathfrak{R}}$, *то существуют* $x_1 \ldots, x^k$ *из* B_0, *такие, что* $x = \langle\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\rangle \& (i_1, x_1) \in \mathfrak{R} \& \ldots \& (i_k, x_k) \in \mathfrak{R}$.

Лемма 5. *Если* $(i, \langle\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\rangle) \in \overline{\mathfrak{R}}$ *и* $x_1, \ldots, x_k$ *принадлежат* B_0, *то существуют* $i_1 \ldots, i_k$, *принадлежащие* N, *и такие, что* $i = I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k))$.

Так как все доказательства проводятся индукцией по k, то мы докажем только леммы 4 и 5.

Доказательство леммы 4. Пусть $k = 1$ и $(I(0, i_1), x) \in \overline{\mathfrak{R}}$. Из определения $\overline{\mathfrak{R}}$ сразу следует, что $(i_1, x) \in \mathfrak{R}$ и, следовательно, $x \in B_0$, потому что $(I(0, i_1), x) \in \overline{\mathfrak{R}}$ по первомупункту определения $\overline{\mathfrak{R}}$. Допустим, что лемма верна для $k \geqq 1$ и $(I(I^{k+1}(0, \ldots, 0), I^{k+1}(i_1, \ldots, i_{k+1})), x) \in \overline{\mathfrak{R}}$. Существуют такие j_1, j_2, y_1, y_2, что $x = \langle y_1, y_2\rangle$, $(j_1, x_1) \in \overline{\mathfrak{R}}$, $I'(j_1, j_2) = I(I^{k+1}(0, \ldots, 0), I^{k+1}(i_1, \ldots, i_{k+1}))$, $(j_2, x_2) \in \overline{\mathfrak{R}}$, так как $(I(I^{k+1}(0, \ldots, 0), I^{k+1}(i_1, \ldots, i^{k+1})), x) \in \overline{\mathfrak{R}}$ по второму пункту определения $\overline{\mathfrak{R}}$. Следовательно, $L(j_1) = I^k(0, \ldots, 0)$, $R(j_1) = I^k(i_1, \ldots, i_k)$, $L(j_2) = 0$, $R(j_2) = i_{k+1}$. Очевидно, что $j_1 \in N^*$, потому что $\overline{\mathfrak{R}} \subseteq N^* \times B^*$ и, следовательно, $j_1 \in$ Range I, откуда получаем $j_1 = I(L(j_1), R(j_1)) = I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k))$, причем $(j_1, y_1) \in \overline{\mathfrak{R}}$. Поэтому существуют $x_1, \ldots, x_k$ из B_0 такие, что $y_1 = \langle\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\rangle \& (i_1, x_1) \in \mathfrak{R} \& \ldots \& (i_k, x_k) \in \mathfrak{R}$. Аналогичным образом $j_2 \in N^*$, и, следовательно, $j_2 \in$ Range I, то есть $j_2 = I(L(j_2), R(j_2)) = I(0, i_{k+1})$. Из того, что $(j_2, y_2) \in \overline{\mathfrak{R}}$, заключаем, что $(i_{k+1}, y_2) \in \mathfrak{R}$ и $y_2 \in B_0$. Пусть $x_{k+1} = y_2$. Тогда $x = \langle\langle x_1, \ldots, x_{k+1}\rangle\rangle \& (i_1, x_1) \in \mathfrak{R} \& \ldots \& (i_{k+1}, x_{k+1}) \in \mathfrak{R}$.

Доказательство леммы 5. Пусть $(i, x_1) \in \overline{\mathfrak{R}} \& x_1 \in B_0$, то есть рассмотрим случай, когда $k = 1$. Тогда $(i, x_1) \in \overline{\mathfrak{R}}$ согласно первому пункту определения $\overline{\mathfrak{R}}$. Существует i_1 такое, что $i = I(0, i_1)$. Здесь мы существенно использовали то обстоятельство, что элементы множества B_0 не являются упорядоченными парами.

Допустим, что лемма верна для $k \geqq 1$, и $(i, \langle\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\rangle) \in \overline{\mathfrak{R}}$, где $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$ принадлежат B_0. Очевидно, что тогда $(i, \langle\langle x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\rangle\rangle) \in \overline{\mathfrak{R}}$ по второму пункту определения $\overline{\mathfrak{R}}$, то есть существуют j_1, j_2, y_1, y_2, такие, что $(j_1, y_1) \in \overline{\mathfrak{R}} \& (j_2, y_2) \in \overline{\mathfrak{R}} \& i = I'(j_1, j_2) \& y_2 = x_{k+1} \& y_1 = \langle\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\rangle$. Из индуктивного предложения следует, что существуют $i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}$, что $j_1 = I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)), \& j_2 = I(0, i_{k+1})$, то есть $i = I(I^{k+1}(0, \ldots, 0), I^{k+1}(i_1, \ldots, i_{k+1}))$. Этим лемма 5 доказана.

Пусть $\varphi: B_0^k - \ominus \rightarrow B_0$. Говорим, что φ эффективна относительно многозначной нумерации $\mathfrak{R}$, если существует ч. р. ф. k переменных f, такая, что выполняется условие:

$$(1) \quad \forall i_1 \ldots \forall i_k \forall x_1 \ldots \forall x_k((i_1, x_1) \in \mathfrak{R} \& \ldots \& (i_k, x_k) \in \mathfrak{R} \rightarrow ((!\varphi(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow !f(i_1, \ldots, i_k)) \& \forall j \forall y (\varphi(x_1, \ldots, x_k) = y \& f(i_1, \ldots, i_k) = j \rightarrow (j, y) \in \mathfrak{R}))).$$

Пусть $C \subseteq B_0^k$. Говорим, что C эффективно перечислимо относительно многозначной нумерации $\mathfrak{R}$, если существует рекурсивно перечислимое подмножество D множества N^k, обладающее свойством:

(2) $$\forall i_1 \ldots \forall i_k \forall x_1 \ldots \forall x_k((i_1, x_1) \in \mathfrak{R} \,\&\, \ldots \,\&\, (i_k, x_k) \in \mathfrak{R} \rightarrow$$
$$((i_1, \ldots, i_k) \in D \leftrightarrow \langle\langle x_1, \ldots, x_k \rangle\rangle \in C)).$$

Рассмотрим $\psi_j : B_0^{k_j} - \ominus \rightarrow B_0, j = 1, \ldots, l$ и $C_i \subseteq B_0^{r_i}$, $i = 1, \ldots, m$. Говорим, что $\mathfrak{R}$ согласована с $\psi_1 \ldots, \psi_l$; $C_1, \ldots, C_m$, если $\psi_1, \ldots, \psi_e$ эффективны относительно $\mathfrak{R}$, и $C_1, \ldots, C_m$ эффективно перечислимы относительно $\mathfrak{R}$.

Если $\varphi : B_o^k - \ominus \rightarrow B_0$, то говорим, что φ допустима относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $C_1, \ldots, C_m$ тогда и только тогда, когда φ эффективна относительно каждой многозначной нумерации, согласованной с $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $C_1, \ldots, C_m$. Если $C \subseteq B_0^k$, то $\widehat{C}$ обозначает функцию, обладающую следующими свойствами: $!\widehat{C}(x) \leftrightarrow x \in C$ и если $!\widehat{C}(x)$, то $\widehat{C}(x) = \boldsymbol{0}$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $\varphi : B_0^k - \ominus \rightarrow B_0$ и φ просто вычислима относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l; C_1, \ldots, C_m$. Тогда функция φ допустима относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $C, \ldots, C_m$.*

Доказательство. Возьмем произвольную многозначную нумерацию, $\mathfrak{R}$, согласованную с $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $C_1, \ldots, C_m$. Существует ч. р. ф. $g_1'', \ldots, g_l''$ такие, что g_q'' и ψ_q удовлетворяют условию (1) для $k = k_q, q = 1, \ldots l$. Пусть $g_q'(i) = g_q''(L^{k_q - 1}(i), RL^{k_q - 2}(i), \ldots, R(i))$, $q = 1, \ldots, l$. Существуют рекурсивно перечислимые множества $D_1, \ldots, D_m$, такие, что D_q и C_q удовлетворяют условию (2) для $k = r_q$, $q = 1, \ldots, m$. Поэтому существуют ч. р. ф. $d_1'', \ldots, d_m''$, такие, что D_q является областью определения d_q'', $q = 1, \ldots, m$.

Пусть $d_q'(i) = d_q''(L^{r_q - 1}(i), RL^{r_q - 2}(i), \ldots, R(i))$, $q = 1, \ldots, m$. Обозначим через τ рекурсивную функцию со свойством $\tau(i) = 0 \leftrightarrow (i, \boldsymbol{O}) \in \mathfrak{R}$ и пусть $i_0 = \mu i[\tau(i) = 0]$

В N определим следующие исходные функции и операции:

$$g_q(i) = \begin{cases} h(i) \,.\, I(0, g_q'(R(i))), & \text{если } \; |L(i) - I^{k_q}(0, \ldots, 0)| = 0, \\ \mu j[j + 1 = 0], & \text{если } \; |L(i) - I^{k_q}(0, \ldots, 0)| > 0, \end{cases}$$

$q = 1, \ldots, l$.

$$d_q(i) = \begin{cases} h(i) \,.\, I(0, C_{i_0}^1(d_q'(R(i)))), & \text{если } \; |L(i) - I^{r_q}(0, \ldots, 0)| = 0, \\ \mu j[j + 1 = 0], & \text{если } \; |L(i) - I^{r_q}(0, \ldots, 0)| > 0, \end{cases}$$

$q = 1, \ldots, m$.

$$\Pi_1(i) = \begin{cases} I(L^2(i), LR(i)), & \text{если } \; \overline{sg}L(i) = 0, \\ i & \text{если } \; \overline{sg}L(i) > 0 \,\&\, \tau(R(i)) = 0, \\ I(I(0, 0), I(i_0, i_0)) & \text{если } \; \overline{sg}L(i) > 0 \,\&\, \tau(R(i)) > 0, \end{cases}$$

$$\Delta_1(i)=\begin{cases} I(RL(i),\, R^2(i)) & \text{если} \quad \overline{sg}L(i)=0,\\ i & \text{если} \quad \overline{sg}L(i)>0\ \&\ \tau(R(i))=0,\\ I(I(0,0),\, I(i_0, i_0)), & \text{если} \quad \overline{sg}L(i)>0\ \&\ \tau(R(i))>0,\end{cases}$$

$$\Pi(i)=h(i)\,.\,\Pi_1(i); \quad \Delta(i)=h(i)\,.\,\Delta_1(i).$$

Для $q\in N^*$ положим $\overline{C}_q(j)=C_q^1(j)\,.\,h(j)$. $\{\overline{C}_q\}_{q\in N^*}, \Pi, \Delta, \{d_q\}_{q=1}^m, \{g_k\}_{k=1}^l$ — частично рекурсивные функции.

Пусть $\mathcal{G}$ — множество всех частично определенных функций в N. В $\mathcal{G}$ определим три операции:
1. Если $f, g\in\mathcal{G}$, то композиция функций f и g обозначается через fg и определяем при помощи равенства $fg(i)=f(g(i))$.
2. Если f, $g\in\mathcal{G}$, то сочетание функций f и g обозначается через (f,g) и определяем при помощи равенства $(f,g)(i)=I'(f(i), g(i))$.
3. Если $f, g\in\mathcal{G}$, то L — итерация f и g обозначается через $I[f,g]$ и определяем при помощи равенства$]f,g]\,(i)=[f, Lg](i)$, где $[f_1, f_2]$ обозначает обычную итерацию f_1, управляемую f_2, т. е. $[f_1, f_2](i)=j\leftrightarrow\exists n\exists k_0\ldots\exists k_n\,(k_0=i\ \&\ k_n=j\ \&\ f_2(k_n)=0\ \&\ \forall_{p<n}\, p(k_{p+1}=f_1(k_p)\ \&\ f_2(k_p)>0))$.

Конечно, все три операции сохраняют частичную рекурсивность, т. е., если f_1, f_2 — ч. р. ф., то f_1f_2, (f_1, f_2) и $]f_1, f_2]$ — также ч. р. ф..

Лемма 6. *Пусть функция φ просто вычислима относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $C_1, \ldots, C_m$. Тогда существует ч. р. ф. f со свойством:*

$$\forall i\forall x((i,\ x)\in\overline{\mathfrak{R}}\rightarrow(!f(i)\leftrightarrow !\,\varphi(x))\&\forall j\forall y(f(i)=j\ \&\ \varphi(x)=y\rightarrow(j,y)\in\overline{\mathfrak{R}})). \tag{3}$$

Доказательство. Будем проводить его индукцией относительно построения просто вычислимой функции φ. Сначала проверим верность леммы для исходных функций.

Пусть $\varphi=\psi_q$. Полагаем $f=g_q$ и предположим, что $(i, x)\in\overline{\mathfrak{R}}$. Если $!f(i)$, то $f(i)=g_q(i)=I(0, g_q'(R(i)))\ \&\ i\in N^*\ \&\ L(i)=I^{k_q}(0,\ldots,0)$. Согласно лемме 3, существуют $j_1,\ldots,j_{k_q}$, такие, что $i=I(I^{k_q}(0,\ldots,0),\ I^{k_q}(j_1,\ldots,j_{k_q}))$, а из леммы 4 следует существование $x_1,\ldots,x_{k_q}$ из B_0 со свойством $x=\langle\langle x_1,\ldots,x_{k_q}\rangle\rangle$ & $(j_1, x_1)\in\mathfrak{R}\ \&\ldots\&\ (j_{k_q}, x_{k_q})\in\mathfrak{R}$. Из определения g_q' следует, что $g_q'(i)=g_q''(j_1, \ldots, j_{k_q})$, то есть $!\ g_q''(j_1,\ldots,j_{k_q})$, откуда $!\ \psi_q(\langle\langle x_1,\ldots,x_{k_q}\rangle\rangle)$, т. е. $!\,\psi_q(x)$.

Пусть теперь $!\ \psi_q(x)$; $x=\langle\langle x_1,\ldots,x_{k_q}\rangle\rangle$, где $x_1,\ldots,x_{k_q}$ принадлежат B_0, так как $\psi_q: B_0^{k_q}-\mathbb{O}\rightarrow B_0$. Из леммы 5 следует, что существуют $j_1,\ldots,j_{k_q}$ из N, такие, что $i=I(I^{k_q}(0,\ldots,0),\ I^{k_q}(j_1,\ldots,j_{k_q}))$, а из леммы 4 следует, что $(j_1, x_1)\in\mathfrak{R}\ \&\ldots\&\ (j_{k_q}, x_{k_q})\in\mathfrak{R}$. Из $!\,\psi_q(x)$ следует, что $!\,g_q''(j_1,\ldots,j_{k_q})$, т. е. $!\,g_q'(I^{k_q}(j_1,\ldots,j_{k_q}))$, а из $L(i)=I^{k_q}(0,\ldots,0)$ следует, что $!\,g_q(i)$.

Пусть $g_q(i)=j\ \&\psi_q(x)=y$. Тогда $i\in N^*$, $L(i)=I^{k_i}(0,\ldots,0)$. Следовательно, в силу леммы 3, существуют $j_1,\ldots,j_{k_q}$ из N, такие, что $i=I(I^{k_q}(0,\ldots,0),\ I^{k_q}(j_1,\ldots,j_{k_q}))$, а согласно лемме 4, существуют $x_1,\ldots,x_{k_q}$ из B_0, такие, что $x=\langle\langle x_1,\ldots,\ x_{k_q}\rangle\rangle\ \&\ (j_1, x_1)\in\mathfrak{R}\ \&\ldots\&\ (j_{k_q}, x_{k_q})\in\mathfrak{R}$. Очевидно, $j=I(0, g_q'(I^{k_q}(j_1,\ldots,j_{k_q})))=I(0, g_q''(j_1,\ldots,j_{k_q}))$ и $(g_q''(j_1,\ldots,j_{k_q}),\ \psi_q(x))\in\mathfrak{R}$, откуда $(j, y)\in\overline{\mathfrak{R}}$.

Рассмотрим случай, когда $\varphi = C_q$. Полагаем $f = d_q$ и опять предположим что $(i, x) \in \overline{\mathfrak{R}}$. Если $!\, d_q(i)$, то $dg(i) = I(0, i_0)$, $i \in N^*$, $L(i) = I_q^r(0, \ldots, 0)$ и $!\, d_q'(\mathfrak{R}(i))$. Существуют $j_1, \ldots, j_{r_q})$), из N, такие, что $i = I(I_q^r(0, \ldots, 0), I_q^r(j_1, \ldots, j_q^r))$ и, соответственно, $x_1, \ldots, x_{r_q}$ из B_0, такие, что $x = \langle\langle x_1, \ldots, x_{r_q}\rangle\rangle \,\&\, (j_1, x_1) \in \mathfrak{R} \,\&\, \ldots \,\&\, (j_{r_q}, x_{r_q}) \in \mathfrak{R}$. Так как $!\, d_q'(I^{r_q}(j_1, \ldots, j_{r_q}))$, то $!\, d_q''(j_1, \ldots, j_{r_q})$, то есть $(j_1, \ldots, j_{r_q}) \in \overline{D}_q$, а из $(j_1, x_1) \in \mathfrak{R} \,\&\, \ldots \,\&\, (j_{r_q}, x_{r_q}) \in \mathfrak{R}$ следует, что $\langle\langle x_1, \ldots, x_{r_q}\rangle\rangle \in \overline{C}_q$ т. е. $!\, \widehat{C}_q(x)$.

Доказательство того, что если $!\, C_q(x)$, то $!\, d_q(x)$ не представляет трудности, вследствие чего опускается.

Пусть $d_q(i) = j \,\&\, \widehat{C}_q(x) = y$. Тогда $y = \boldsymbol{0} \,\&\, j = I(0, i_0)$, где $\tau(i_0) = 0$, то есть $(i_0, \boldsymbol{0}) \in \mathfrak{R}$, и, значит, $(I(0, i_0), \boldsymbol{0}) \in \overline{\mathfrak{R}}$. Следовательно, $(j, y) \in \overline{\mathfrak{R}}$.

Если $\varphi = \pi$, возьмем $f = \Pi$. Так как $\overline{\mathfrak{R}} \subseteq N^* \times B^*$ и π, Π всюду определены соответственно в B^*, N^*, то мы покажем только, что если $((i, x) \in \overline{\mathfrak{R}} \,\&\, \Pi(i) = j \,\&\, \pi(x) = y$, то $(j, y) \in \overline{\mathfrak{R}}$. Докажем это индукцией относительно определения $\overline{\mathfrak{R}}$. Пусть $(i, x) \in \overline{\mathfrak{R}}$ по первому пункту определения $\overline{\mathfrak{R}}$, т. е. существует i_1 такое, что $i = I(0, i_1)$ и $(i_1, x) \in \mathfrak{R}$. Если $\tau(i_1) = 0$, то $j = i = I(0, i_1)$. Так как $\mathfrak{R}$ есть нумерация, то из $(i_1, x) \in \mathfrak{R} \,\&\, (i_1, \boldsymbol{0}) \in \mathfrak{R}$ следует, что $x = \boldsymbol{0}$ и $\pi(x) = \boldsymbol{0}$, т.е. $y = \boldsymbol{0} = x$, откуда $(j, y) \in \overline{\mathfrak{R}}$. Если $\tau(i_1) > 0$, то $x \in B_0 \,\&\, x \neq \boldsymbol{0}$, так что $\pi(x) = \langle \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}\rangle$, т. е. $y = \langle \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}\rangle$ и $\Pi(i) = I(I(0, 0), I(i_0, i_0))$. Согласно определения $\overline{\mathfrak{R}}$, $(I(0, i_0), \boldsymbol{0}) \in \overline{\mathfrak{R}}$, потому что $(i_1, \boldsymbol{0}) \in \mathfrak{R}$, и, значит, $(I(I(0, 0), I(i_0, i_0)), \langle \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}\rangle) \in \overline{\mathfrak{R}}$. Опять $(j, y) \in \overline{\mathfrak{R}}$.

Пусть теперь $(i, x) \in \overline{\mathfrak{R}}$ по второму пункту определения, т. е. существуют j_1, j_2, y_1, y_2 такие, что $(j_1, y_1) \in \overline{\mathfrak{R}} \,\&\, (j_2, y_2) \in \overline{\mathfrak{R}} \,\&\, i = I'(j_1, j_2) \,\&\, x = \langle y_1, y_2\rangle$. Тогда $j = \Pi(i) = \Pi(I'(j_1, j_2)) = I(L(j_1), R(j_1)) = j_1$, так как $j_1 \in \operatorname{Range} I$. Кроме того, $y = \pi(x) = \pi(\langle y_1, y_2\rangle) = y_1$ и опять получили $(j, y) \in \overline{\mathfrak{R}}$.

Если $\varphi = \delta$, то $f = \Delta$ и доказательство проводится аналогичным образом.

В случае, когда $\varphi = \check{x}$ для некоторого x из B^*, положим $f = C_{i_0}^1 h$, где i_0 такое, что $(i_0, x) \in \overline{\mathfrak{R}}$. Очевидно, что f и φ удовлетворяют условию (3), и этим мы доказали, что утверждение (3) верно для исходных функций.

Предположим теперь, что φ_1 и φ_2 — просто вычислимые функции относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $C_1, \ldots, C_m$, и что для них существуют f_1, f_2 — ч. р. ф., которые удовлетворяют (3). Докажем, что для $\varphi_1\varphi_2$, $\Pi(\varphi_1, \varphi_2)$, и $[\varphi_1, \varphi_2]$ существуют ч. р. ф., которые удовлетворяют условию (3). Если $\varphi = \varphi_1\varphi_2$, то в качестве функции f, удовлетворяющей условию (3), возьмем $f_1 f_2$; если $\varphi = \Pi(\varphi_1, \varphi_2)$, то в качестве функции f, удовлетворяющей (3), возьмем (f_1, f_2), а если $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2]$, то в качестве функции f, удовлетворяющей (3), возьмем $]f_1, f_2]$. Ввиду простоты доказательства проведем его только для случая, когда $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2]$. Тогда $f =]f_1, f_2]$. Примем, что $(i, x) \in \overline{\mathfrak{R}}$. Если $!\,]f_1, f_2](i)$, то существует натуральное число n такое, что $[f_1, Lf_2](i) = f_1^n(i)$ и $!\, f_1^n(i)$. Тогда $L(f_2(f_1^n(i))) = 0$ и $\underset{j<n}{\forall} j\, (L(f_2(f_1^j(i))) > 0)$. С другой стороны, $\underset{j\leqq n}{\forall} j\, (f_2(f_1^j(i)), \varphi_2(\varphi_1^j(x))) \in \overline{\mathfrak{R}} \,\&\, (f_1^j(i), \varphi_1^j(x)) \in \overline{\mathfrak{R}})$. Так как для $j = n$ $L(f_2(f_1^j(i))) = 0$, то $\varphi_2(\varphi_1^n(x)) \in B_0$ и для $j < n$ $\varphi_2(\varphi_1^j(x)) \in B^* \setminus B_0$ согласно определению $\overline{\mathfrak{R}}$, т. е. $!\, [\varphi_1, \varphi_2](x)$.

Пусть $![\varphi_1, \varphi_2](x)$. Существует натуральное n такое, что $[\varphi_1, \varphi_2](x)=\varphi_1^n(x)$ $\varphi_2(\varphi_1^n(x))\in B_0$, $\underset{j<n}{\forall} j\,(\varphi_2(\varphi_1^j(x))\in B^*\setminus B_0)$. В этом случае, конечно, $!]f_1, f_2](i)$ и $]f_1, f_2](i)=f_1^n(i)$. Из предыдущих рассуждений ясно, что если $\varphi(x)=y\,\&\,f(i)=j$, то $(j, y)\in\overline{\mathfrak{R}}$. Лемма 6 доказана.

Докажем теперь теорему 1. Пусть $\varphi: B_0^k\to B_0$ и функция φ просто вычислима относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $\widehat{C}_1, \ldots, \widehat{C}_m$. Из леммы 6 следует существование ч. р. ф. f, удовлетворяющей (3).

Положим $f'(i_1, \ldots, i_k)=R(f(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k))))$ и убедимся, что она имеет требуемые свойства.

Возьмем $(i_1, x_1)\in\mathfrak{R}\,\&\ldots\&\,(i_k, x_k)\in\mathfrak{R}$. Тогда $(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)), \langle\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\rangle)\in\overline{\mathfrak{R}}$. Если $!\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, то $!f(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)))$, т. е. $!f'(i_1, \ldots, i_k)$. А если $!f'(i_1, \ldots, i_k)$, то $!f(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k))$, откуда $!\varphi(x_1, \ldots, x_k)$.

Пусть $f'(i_1, \ldots, i_k)=j\,\&\,\varphi(x_1, \ldots, x_k)=y$. Тогда $y\in B_0$ и пусть $j_1=f(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)))$. Из леммы 6 следует, что $(j_1, y)\in\overline{\mathfrak{R}}$, а из определения $\overline{\mathfrak{R}}$ следует, что $j_1=I(0, j)$. Следовательно, $(j, y)\in\mathfrak{R}$. Этим доказана теорема 1.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi: B_0^k-\ominus\to B_0$ *и функция* φ *вычислима относительно* $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $\widehat{C}_1, \ldots, \widehat{C}_m$. *Тогда* φ *допустима относительно* $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $C_1, \ldots, C_m$.

Доказательство. Пусть φ вычислима относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $\widehat{C}_1, \ldots, \widehat{C}_m$, т. е. существует θ — просто вычислимая функция относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $\widehat{C}_1, \ldots, \widehat{C}_m$, такая, что $\varphi(s)=t\leftrightarrow\exists r\,(\theta(\langle s, r\rangle)=t)$. Пусть h_2 — ч. р. ф. такая, что

$$\forall i\forall x((i, x)\in\overline{\mathfrak{R}}\to(!h_2(i)\leftrightarrow\theta(x))\,\&\,\forall j\forall y(h_2(i)=j\,\&\,\theta(x)=y\to(j, y)\in\overline{\mathfrak{R}})).$$

Положим $h_3(i_1, \ldots, i_k, p)=R(h_2(I'(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)), p)))\,.\,h(p)$ и пусть $A=\{(i_1, \ldots, i_k, j): \exists p(h_3(i_1, \ldots, i_k, p)=j)\}$. Очевидно, что A есть рекурсивно перечислимое множество. Существует ч. р. ф. h_4, которая униформизирует A (см. [2]). Покажем, что она удовлетворяет (1).

Если $(i_1, x_1)\in\mathfrak{R}\,\&\ldots\&\,(i_k, x_k)\in\mathfrak{R}$, то $(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)), \langle\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\rangle)\in\overline{\mathfrak{R}}$. Допустим, что $!h_4(i_1, \ldots, i_k)$. Тогда $(i_1, \ldots, i_k, h_4(i_1, \ldots, i_k))\in A$ и существует $p\in N^*$ такое, что $h_3(i_1, \ldots, i_k, p)=h_4(i_1, \ldots, i_k)$. Так как $\overline{\mathfrak{R}}_1=N^*$, то существует y такое, что $(p, y)\in\overline{\mathfrak{R}}$, и для такого y получаем $(I'(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)), p), \langle\langle\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\rangle, y\rangle)\in\overline{\mathfrak{R}}$; и, далее, $!\theta(\langle\langle\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\rangle, y\rangle)$, потому что $!h_3(i_1, \ldots, i_k, p)$, а, следовательно, и $!h_2(I'(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)), p))$. Отсюда вытекает, что $!\varphi(x_1, \ldots, x_k)$. Если $!\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, то существует y такое, что $!\theta(\langle\langle\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\rangle, y\rangle)$. Однако $\overline{\mathfrak{R}}_2=B^*$, и поэтому существует p такое, что $(p, y)\in\overline{\mathfrak{R}}$. Взяв такое p, получаем

$$(I'(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)), p), \langle\langle\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\rangle, y\rangle)\in\overline{\mathfrak{R}}.$$

Следовательно, $!h_2(I'(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)), p))$ и значит $!h_3(i_1, \ldots, i_k, p)$, откуда $!h_4(i_1, \ldots, i^k)$.

Пусть $h_4(i_1, \ldots, i_k)=j\,\&\,\varphi(x_1, \ldots, x_k)=y$. Тогда $(i_1, \ldots, i_k, j)\in A$ и существует p' такое, что $h_3(i_1, \ldots, i_k, p')=j$. Следовательно, $p'\in N^*$ и $j=R(h_2(I'(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)), p')))$. Пусть $j_1=h_2(I'(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)), p'))$. Тогда существует y' такое, что $(p', y') \in \overline{\mathfrak{R}}$, так как $\overline{\mathfrak{R}}_1 = N^*$. Отсюда следует, что $(I'(I(I^k(0, \ldots, 0), I^k(i_1, \ldots, i_k)), p'), \langle \langle\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\rangle, y'\rangle) \in \mathfrak{R}$ и $(j_1, \theta(\langle \langle\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\rangle, y'\rangle)) \in \overline{\mathfrak{R}}$. Следовательно $(j_1, y) \in \overline{\mathfrak{R}}$, так как $\psi(x_1, \ldots, x_k) = \theta(\langle \langle\langle x_1, \ldots, x_k\rangle\rangle, y'\rangle)$. Но $y \in B_0$ и значит $L(j_1) = 0$. С другой стороны, $R(j_1) = j$, откуда $j_1 = I(0, j)$. Следовательно, $(j_1, y) \in \overline{\mathfrak{R}}$ по первому пункту определения $\overline{\mathfrak{R}}$ и $(j, y) \in \mathfrak{R}$. Этим доказана теорема 2.

По обратному вопросу Д. Скордев высказал следующую гипотезу: *Если* $\varphi: B_0^k \multimap B_0$, *и функция* φ *допустима относительно* $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $C_1, \ldots, C_m$, *то* φ *вычислима относительно* $\psi_1, \ldots, \psi_l; \widehat{C}_1, \ldots, \widehat{C}_m$. В самом общем случае гипотеза оказывается неверной. Чтобы показать это, приведем один контрпример.

Пусть $B = [0, 2]$ и $C_1 \subseteq B^2$, $C_1 = \{\langle x, x+1\rangle : x \in [0, 1]\}$. Покажем, что все функции допустимы относительно C_1. Допустим, что $\mathfrak{R}$ — нумерация, согласованная с C_1. Тогда $\mathfrak{R}$ будет однозначной нумерацией, т. е., если $(i, y_1) \in \mathfrak{R} \,\&\, (i, y_2) \in \mathfrak{R}$, то $y_1 = y_2$. Действительно, существует р. п. множество D_1 такое, что $\forall i_1 \forall i_2 \forall x_1 \forall x_2 ((i_1, x_1) \in \mathfrak{R} \,\&\, (i_2, x_2) \in \mathfrak{R} \to ((i_1, i_2) \in D_1 \leftrightarrow \langle x_1, x_2\rangle \in C_1))$.

Рассмотрим случай, когда $y_2 \in [0, 1]$ (в случае $y_1 \in (1, 2]$ рассуждения аналогичны). Тогда $\langle y_1, 1+y_1\rangle \in C_1$. Находим i_1 такое, что $(i_1, 1+y_1) \in \mathfrak{R}$, откуда $(i, i_1) \in D_1$. Следовательно, $\langle y_2, 1+y_1\rangle \in C_1$, т. е. $y_1 = y_2$. Мы установили, что $\mathfrak{R}$ — однозначная нумерация, т. е. $\overline{\overline{[0,2]}} = \overline{\overline{N}}$, что неверно. Следовательно, не существует нумерации, согласованной с C_1. Отсюда следует, что каждая функция вычислима относительно C_1, если предположить, что гипотеза верна. Но вычислимые относительно $\widehat{C}_1$ функции получаются из $2^{\aleph_0}$ констант, $\widehat{C}$, π, δ путем конечного числа применений операций композиции, сочетания и итерации. Следовательно, мощность множества вычислимых функций равна $2^{\aleph_0}$, а совокупность частично определенных функций в $[0, 2]$ по мощности превосходит $2^{\aleph_0}$. Полученное противоречие показывает, что в данном случае гипотеза не верна. Тем не менее, есть основания предполагать что при наложении некоторых не очень сильных ограничений гипотеза окажется верной.

Рассмотрим случай, когда $l = 0$ и $m = 0$, т. е. когда функция φ допустима без исходных функций. В таком случае мы будем говорить, что функция φ допустима.

Покажем сначала один класс функций $\mathcal{A}$, который содержит класс допустимых функций. Потом покажем, что класс $\mathcal{A}$ содержится в классе вычислимых функций и отсюда будет следовать, что $\mathcal{A}$ совпадает с классом допустимых функций, согласно теореме 2.

Пусть F' — фиксированное рекурсивно перечислимое множество, дополнение которого не является рекурсивно перечислимым, и пусть $F = F' \cup \{0, 1\}$.

Пусть функция φ допустима, $\varphi: B_0^k \multimap B_0$. Мы хотим показать, что $\mathrm{Dom}\,\varphi$ является объединением конечного числа множеств вида $A_1 \times \ldots \times A_k$, где $A_i = \{\mathbf{0}\}$ или $A_i = B$, $i = 1, \ldots, k$. Каждое $A_1 \times \ldots \times A_k$ такое, что $A_i = \{\mathbf{0}\}$ или $A_i = B$, $i = 1, \ldots, k$, назовем компонентой. Увидим, что $\mathrm{Dom}\,\varphi$ является объединением конечного числа компонент.

Лемма 7. *Пусть* $!\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ *и* $x_i \in B$ *для некоторого* i. *Тогда* $\forall y_i (y_i \in B \to\, !\varphi(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_k))$.

Доказательство. Для простоты и ясности записи будем считать, что $i=1$. Допустим, что для данных $x_2, \dots, x_k$ существует y_1 такое, что $\neg ! \varphi(y_1, x_2, \dots, x_k)$, и пусть $A'=\{z \in B : \neg ! \varphi(z, x_2, \dots, x_k)\}$. Очевидно, $A' \neq \varnothing$ и $B \setminus A' \neq \varnothing$.

Отметим, что допустимыми являются те функции, которые эффективны относительно каждой нумерации.

Образуем следующее бинарное отношение:

$$\Re=\{(0, \boldsymbol{0})\} \cup (N \setminus F) \times (B \setminus A') \cup (F \setminus \{0\}) \times A'.$$

Очевидно, что $\Re$ — многозначная нумерация. Существует ч. р. ф. f, которая удовлетворяет (1). Находим $j_2, \dots, j_k$ такие, что $(j_2, x_2) \in \Re \& \dots \& (j_k, x_k) \in \Re$. Для фиксированных $j_2, \dots, j_k : \forall j_1 \forall y_1 (j_1, y_1) \in \Re \to (!f(j_1, \dots, j_k) \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_k)))$. Пусть для определенности $\neg ! \varphi(\boldsymbol{0}, x_2, \dots, x_k)$ (случай, когда $! \varphi(\boldsymbol{0}, x_2, \dots, x_k)$ рассматривается аналогично). Тогда $! \varphi(y_1, x_2, \dots, x_k) \leftrightarrow y_1 \in B \setminus A'$. Если $f'(j_1)=f(j_1, j_2, \dots, j_k)$, то $! f(j_1) \leftrightarrow j_1 \in N \setminus F$, т. е. мы нашли ч. р. ф., область определения которой не является рекурсивно перечислимым множеством. Противоречие получается в результате допущения, что существует y_1 со свойством $\neg ! \varphi(y_1, x_2, \dots, x_k)$. Отсюда следует утверждение леммы.

Очевидно, что число компонент равно 2^k. Пусть $A=\bigcup\{A_1 \times \dots \times A_k : A_1 \times \dots \times A_k \cap \operatorname{Dom} \varphi \neq \Phi$, $A_1 \times \dots \times A_k$ — компоненты$\}$. Тогда $\operatorname{Dom} \varphi \subseteq A$. Проверим обратное включение. Пусть $\langle\langle y_1, \dots, y_k \rangle\rangle \in A$. Существует $A_1 \times \dots \times A_k$ — компонента, такая, что $A_1 \times \dots \times A_k \cap \operatorname{Dom} \varphi \neq \varnothing$ и $\langle\langle y_1, \dots, y_k \rangle\rangle \in A_1 \times \dots \times A_k$. Пусть $\langle\langle x_1, \dots, x_k \rangle\rangle \in A_1 x \dots x A_k \cap \operatorname{Dom} \varphi$. Для простоты предположим, что $A_i=B$ для $1 \leq i < i_0$ и $A_i=\{\boldsymbol{0}\}$ для $i_0 \leq i \leq k$. В силу леммы 7 $\langle\langle y_1, x_2, \dots, x_k \rangle\rangle \in \operatorname{Dom} \varphi$, $\langle\langle y_1, y_2, x_3, \dots, x_k \rangle\rangle \in \operatorname{Dom} \varphi$ и т. д. $\langle\langle y_1, \dots, y_{i_0-1}, x_{i_0}, \dots, x_k \rangle\rangle \in \operatorname{Dom} \varphi$, и так как $\langle\langle y_1, \dots, y_k \rangle\rangle = \langle\langle y_1, \dots, y_{i_0-1}, x_{i_0}, \dots, x_k \rangle\rangle$, то $\langle\langle y_1, \dots, y_k \rangle\rangle \in \operatorname{Dom} \varphi$. Мы показали обратное включение, тем самым доказав, что $\operatorname{Dom} \varphi$ является объединением конечного числа компонент.

Лемма 8. *Пусть* $\varphi(a_1, \dots, a_i', \dots, a_k)=a' \& \varphi(a_1, \dots, a_i'', \dots, a_k)=a'' \& a' \neq a'' \& a_i' \in B \& a_i'' \in B$. *Тогда* $a'=a_i' \& a''=a_i''$.

Доказательство. Для простоты записи примем $i=1$. Покажем сначала, что $a' \neq \boldsymbol{0}$ и $a'' \neq \boldsymbol{0}$. Допустим, например, что $a'=\boldsymbol{0}$. Пусть $A'=\{x_1 \in B : \varphi(x_1, a_2, \dots, a_k)=\boldsymbol{0}\}$. Рассмотрим отношение $\Re=\{(0, \boldsymbol{0})\} \cup (N \setminus F) \times A' \cup (F \setminus \{0\}) \times (B \setminus A')$. Очевидно $\Re$ есть нумерация. Относительно этой нумерации существует ч. р. ф. f от k переменных такая, что справедливо (1). Существуют $i_2, \dots, i_k$ такие, что $(i_2, a_2) \in \Re \& \dots \& (i_k, a_k) \in \Re$. Для фиксированных $i_2, \dots, i_k$ функция $f'(j)=f(j, i_2, \dots, i_k)$ частично рекурсивна, и множество $\{j : f'(j)=0\}$ — рекурсивно перечислимо. Опять можно ограничиться случаем, когда $\neg ! \varphi(\boldsymbol{0}, a_2, \dots, a_k)$. Тогда $f'(j)=0 \leftrightarrow j \in N \setminus F$. Действительно, пусть $f'(j)=0$. Тогда существует x из B такое, что $(j, x) \in \Re$. Согласно (1) $! \varphi(x)$ и $(f'(j), \varphi(x, a_2, \dots, a_k)) \in \Re$, т. е. $(0, \varphi(x, a_2, \dots, a_k)) \in \Re$. Отсюда следует, что $\varphi(x, a_2, \dots, a_k)=\boldsymbol{0}$, т. е. $x \in A'$. Следовательно, $j \in N \setminus F$. Пусть теперь $j \in N \setminus F$. Тогда $(j, x) \in \Re$ для некоторого x из A'. Согласно (1) $(f'(j), \varphi(x, a_2, \dots, a_k)) \in \Re$, т. е. $(f'(j), \boldsymbol{0}) \in \Re$ Следовательно, $f'(j)=0$. Мы получили, что $N \setminus F$ рекурсивно перечислимо. Получено противоречие вследствие допущения, что $a'=\boldsymbol{0}$. Значит, $a' \neq \boldsymbol{0}$ и $a'' \neq \boldsymbol{0}$. Отсюда $a' \in B$ и $a'' \in B$.

Допустим, что $a_1' \neq a'$ или $a_1'' \neq a''$. Пусть для определенности $a_1' \neq a'$. Тогда $\varphi(a', a_2, \dots, a_k)=a_1'$ или $\varphi(a', a_2, \dots, a_k) \neq a_1'$.

Мы покажем, что каждый из этих двух случаев невозможен, откуда будет следовать утверждение леммы. Сначала покажем, что невозможен первый из этих двух случаев. Допустим, что $\varphi(a', a_2, \ldots, a_k)=a'_1$. Рассмотрим случай, когда $B=\{a', a'_1\}$. Образуем нумерацию $\mathfrak{N}=\{(0, \boldsymbol{O})\} \cup (F \setminus \{0\}) \times \{a'\} \cup (N \setminus F) \times \{a'_1\}$. Существует ч. р. ф. f от k переменных, удовлетворяющая (1), и существуют такие $i_2, \ldots, i_k$ из N, что $(i_2, a_2) \in \mathfrak{N} \& \ldots \& (i_k, a_k) \in \mathfrak{N}$. Рассмотрим ч. р. ф. $f'(j)=f(j, i_2, \ldots i_k)$ для фиксированных $i_2, \ldots, i_k$. Взяв $j_1 \in N \setminus F$, определим ч. р. ф: f'' следующим образом:

$$f''(j)=\begin{cases} f'(j), & \text{если } j>0, \\ j_1, & \text{если } j=0. \end{cases}$$

Докажем, что $j \in N \setminus F \leftrightarrow f''(j) \in F$. Действительно, если $j \in N \setminus F$, то $(j, a'_1) \in \mathfrak{N}$ и, следовательно, $(f'(j), a') \in \mathfrak{N}$, т. е. $f'(j) \in F \setminus \{0\}$. И так как $j \neq 0$, $f''(j)=f'(j) \in F$. Пусть, $f''(j) \in F$. Допустим, что $j \in F$. Если $j=0$, то $f''(j)=j_1 \in N \setminus F$. Следовательно, $j \neq 0$. Тогда $j \in F \setminus \{0\}$ и $(j, a') \in \mathfrak{N}$, т. е. $(f'(j), a'_1) \in \mathfrak{N}$ и значит $f''(j)=f'(j) \in N \setminus F$, что невозможно. Мы получили, что $j \in N \setminus F$. Из доказанной эквивалентности следует, что $N \setminus F$ рекурсивно перечислимо. Этим показали, что когда $B=\{a', a'_1\}$, первый случай невозможен. В случае, когда $B \neq \{a', a'_1\}$, рассмотрим нумерацию

$$\mathfrak{N}=\{(0, \boldsymbol{O})\} \cup \{1\} \times (B \setminus \{a', a'_1\}) \cup (F \setminus \{0, 1\}) \times \{a'\} \cup (N \setminus F) \times \{a'_1\}.$$

Существует ч. р. ф. f от k переменных, которая удовлетворяет (1), и существуют $i_2, \ldots, i_k$, такие, что $(i_2, a_2) \in \mathfrak{N} \& \ldots \& (i_k, a_k) \in \mathfrak{N}$. Для фиксированных $i_2, \ldots, i_k$ рассмотрим опять функцию $f'(j)=f(j, i_2, \ldots, i_k)$. Взяв $j_1 \in N \setminus F$, определим ч. р. ф. f'' следующим способом:

$$f''(j)=\begin{cases} f'(j), & \text{если } j>1, \\ j_1, & \text{если } j \leqq 1. \end{cases}$$

Легко получаем, что опять $j \in N \setminus F \leftrightarrow f''(j) \in F$, т. е. $N \setminus F$ — рекурсивно перечислимо. Мы увидели, что и в случае, когда $B \neq \{a', a'_1\}$, невозможно $\varphi(a', a_2, \ldots, a_k)=a'_1$. Этим мы доказали, что невозможно $\varphi(a', a_2, \ldots, a_k)=a'_1$.

Допустим, что $\varphi(a', a_2, \ldots, a_k) \neq a'_1$. Пусть $A'=\{x \in B : \varphi(x, a_2, \ldots, a_k)=a'\}$. Предположим, что $B=A' \cup \{a'\}$. Покажем, что $\varphi(a', a_2, \ldots, a_k) \neq a'$. Действительно, допустим, что $\varphi(a'_1 a_2, \ldots, a_k)=a'$. Следовательно, $\varphi(a''_1, a_2, \ldots, a_k)=a'' \neq a'$, т. е. $a''_1 \in B \setminus A'$. Значит, $a''_1=a'$ и поэтому $a'=\varphi(a''_1, a_2, \ldots, a_k)=a''$, что неверно. Показали, что $\varphi(a', a_2, \ldots, a_k) \neq a'$. Как в начале этой леммы, взяв a' в качестве a''_1, мы можем установить, что $\varphi(a', a_2, \ldots, a_k) \in B$. Тогда, взяв $\varphi(a', a_2, \ldots, a_k)$ в качестве a'_1, попадаем в первый случай, невозможность которого уже доказали. Предположение, что $B=A' \cup \{a'\}$ неверно, т. е. $B \setminus (A' \cup \{a'\}) \neq \varnothing$. Возьмем следующее отношение $\mathfrak{N}=\{(0, \boldsymbol{O})\} \cup \{(1, a')\} \cup (F \setminus \{0, 1\}) \times (B \setminus (A' \cup \{a'\})) \cup (N \setminus F) \times A'$. После доказательства, что $B \setminus (A' \cup \{a'\}) \neq \varnothing$, ясно, что $\mathfrak{N}$ — нумерация. Существует ч. р. ф. f от k переменных, удовлетворяющая (1), и существуют $i_2, \ldots, i_k$, такие, что $(i_2, a_2) \in \mathfrak{N} \& \ldots \& (i_k, a_k) \in \mathfrak{N}$. Рассмотрим ч. р. ф. $f'(j)=f(j, i_2, \ldots, i_k)$. Определим ч. р. ф. f'':

$$f''(j)=\begin{cases} f'(j), & \text{если } j>1, \\ 0, & \text{если } j \leqq 1. \end{cases}$$

Докажем, что $j \in N \setminus F \leftrightarrow f''(j)=1$. Действительно, пусть $j \in N \setminus F$. Тогда $(j, a_1') \in \mathfrak{R}$ и, следовательно, $(f'(j), a') \in \mathfrak{R}$, т. е. $f'(j)=1$ и так как $j>1, f''(j)=1$. Пусть теперь $f''(j)=1$. Допустим, что $j \in F$. Очевидно $j>1$, т. е. $j \in F \setminus \{0, 1\}$. Тогда существует x из $B \setminus (A' \cup \{a'\})$, такое, что $(j, x) \in \mathfrak{R}$. Оказалось, что $(f'(j), \varphi(x, a_2, \ldots, a_k)) \in \mathfrak{R}$, т. е. $(1, \varphi(x, a_2, \ldots, a_k)) \in \mathfrak{R}$. Значит $\varphi(x, a_2, \ldots, a_k) = a'$ и $x \in A'$, что невозможно. Получили противоречие вследствие допущения, что $j \in F$. Следовательно, $j \in N \setminus F$. Мы показали, что $N \setminus F$ рекурсивно перечислимо, а это неверно. Этим показали, что невозможно $\varphi(a', a_2, \ldots, a_k) \neq a_1'$, тем самым доказав лемму 8.

Следовательно, если для некоторого i $\varphi(a_1, \ldots, a_i', \ldots, a_k) \neq \varphi(a_1, \ldots, a_i'', \ldots, a_k)$ и $a_i', a_i'' \in B$, то φ является проектирующей функцией по i-тому аргументу для фиксированных таким образом $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k$, когда i-тый аргумент пробегает B.

Покажем, что, если множество B содержит более двух элементов, то на каждой компоненте, принадлежащей области определения φ, эта функция является либо константой, либо проектирующей по некоторому из своих аргументов.

Лемма 9. *Пусть функция $\psi : B^2 \to B_0$ обладает свойством*

$$(\psi(a_1', a_2) \neq \psi(a_1'', a_2) \to \psi(a_1', a_2) = a_1' \,\&\, \psi(a_1'', a_2) = a_1'') \,\&$$

$$(\psi(a_1, a_2') \neq \psi(a_1, a_2'') \to \psi(a_1, a_2') = a_2' \,\&\, \psi(a_1, a_2'') = a_2'')$$

и множество B содержит не менее трех различных элементов. Тогда ψ константа или проектирующая функция по одному из своих аргументов.

Доказательство. Допустим, что $\psi(a_1', a_2') \neq \psi(a_1'', a_2'')$ для некоторых a_1', a_1'', a_2''. Тогда $\psi(a_1', a_2') \neq \psi(a_1', a_2'')$ или $\psi(a_1', a_2'') \neq \psi(a_1'', a_2'')$. Примем для определенности $\psi(a_1', a_2'') \neq \psi(a_1'', a_2'')$. Полагаем $b_1 = a_2''$. Тогда $\psi(a_1, b_1) = a_1$ для каждого $a_1 \in B$. Покажем, что второй аргумент функции ψ фиктивен, т. е. не существуют $a_1, \overline{a_2'}, \overline{a_2''}$, такие, что $\psi(a_1, \overline{a_2'}) \neq \psi(a_1, \overline{a_2''})$, из чего будет следовать что ψ — проектирующая функция по первому аргументу. Допустим противное, т. е., что существуют $a_1, \overline{a_2'}, \overline{a_2''}$, такие, что $\psi(a_1, \overline{a_2'}) \neq \psi(a_1, \overline{a_2''})$. Тогда $\psi(a_1, a_2) = a_2$ для каждого a_2 из B. Если $a_2 = b_1$, то $\psi(a_1, b_1) = b_1$ и, с другой стороны, $\psi(a_1, b_1) = a_1$, а значит $a_1 = b_1$. По крайней мере один из элементов $\overline{a_2'}, \overline{a_2''}$ различен от b_1. Обозначим его b_2. Существует по крайней мере еще один элемент — обозначим его через b_3. Тогда, конечно, $\psi(b_1, b_2) = b_2, \psi(b_1, b_3) = b_3$, $\psi(b_2, b_1) = b_2$, $\varphi(b_3, b_1) = b_3$. Имеем $\psi(b_2, b_2) = b_2$, потому что в противном случае было бы $\psi(b_2, b_1) \neq \psi(b_2, b_2)$, откуда $\psi(b_2, b_1) = b_1$, что неверно. По тем же соображениям $\psi(b_2, b_3) = b_2$, $\psi(b_3, b_2) = b_3$ и $\psi(b_3, b_3) = b_3$. В таком случае, $\psi(b_1, b_3) = b_3$, $\psi(b_2, b_3) = b_2$ и $b_2 \neq b_3$. Значит, $\psi(b_1, b_3) = b_1$, что невозможно, т. е. функция ψ не зависит от второй переменной и тем самым является проектирующей по первому аргументу.

С помощью леммы 9 докажем, что если B содержит по крайней мере три элемента и функция φ допустима, то она является либо константой, либо проектирующей функцией на каждой из компонент, где она определена.

Пусть $A_1 \times \ldots \times A_k \subseteq \mathrm{Dom}\, \varphi$, $A_i = B$ или $A_i = \{O\}$. Допустим, что существуют $\langle\langle a_1', \ldots, a_k' \rangle\rangle$, $\langle\langle a_1'', \ldots, a_k'' \rangle\rangle$ из $A_1 \times \ldots \times A_k$, такие, что $\varphi(a_1', \ldots, a_k')$

$\neq \varphi(a_1'', \ldots, a_k'')$. Снова будем предполагать для простоты записи, что $A_i = B$ для $1 \leqq i < i_0$ и $A_i = \{0\}$ для $i_0 \leqq i \leqq k$. $\varphi(a_1', a_2', \ldots, a_k') \neq \varphi(a_1'', a_2', \ldots, a_k'')$ или $\varphi(a_1'', a_2', a_3', \ldots, a_k') \neq \varphi(a_1'', a_2'', a_3', \ldots, a^{k'})$ или ... или $\varphi(a_1'', \ldots, a_{i_0-2}'', a_{i_0-1}', \ldots, a_k') \neq \varphi(a_1'', \ldots, a_{i_0-2}'', a_{i_0-1}'', a_{i_0}', \ldots, a_k')$. Для простоты предположим, что $\varphi(a_1 a_2', \ldots, a_k') \neq \varphi(a_1'', a_2', \ldots, a_{\pi}')$. Увидим, что на $A_1 \times \ldots \times A_k \varphi\ (a_1, a_2, \ldots, a_k), = a_1$. Пусть $\langle\langle a_1^0, \ldots, a_k^0\rangle\rangle \in A_1 \times \ldots \times A_k$. Рассмотрим $\varphi(a_1', \ldots, a_k')$ и фиксируем $a_2', \ldots, a_k'$. Тогда $\varphi\ (a_1^0, a_2^1, \ldots, a_k') = a_1^0$. Для фиксированных $a_3', \ldots, a_k$ с помощью леммы 9 устанавливаем, что $\varphi(a_1^0, a_2^0, a_3', \ldots, a_k') = a_1^0$ и т. д., получаем $\varphi(a_1^0, \ldots, a_k^0) = a_1^0$, так как $a_i' = a_i^0$ дли $i_0 \leqq i \leqq k$.

Следовательно, если множество B содержит по крайней мере три элемента, то для того, чтобы φ была допустимой, необходимо, чтобы она была либо константой, либо проектирующей функцией на каждой компоненте. В этом случае покажем, что функции, которые являются допустимыми, вычислимы.

Определим несколько просто вычислимых функций в B.

$$\alpha_1 = \pi\,[\langle\langle 0, \breve{0}, 0\rangle\rangle, \pi]\,\Pi(\pi, \pi), \quad \alpha_2 = \pi\,[\langle\langle 0, \breve{0}, 0\rangle\rangle, \pi\alpha_1],$$

$$\alpha_3 = \alpha_1\,[\pi\delta, \delta]\,\Pi(\Pi(\pi, \pi), \pi)\alpha_1, \quad \alpha_4 = \pi\,[\breve{0}, \alpha_3].$$

Эти функции обладают следующими свойствами:

$$!\,\alpha_1(\langle s, t\rangle) \leftrightarrow s \in B_0 \quad \text{и} \quad !\,\alpha_1(\langle s, t\rangle) \to \alpha_1(\langle s, t\rangle) = s,$$

$$!\,\alpha_2(\langle s, t\rangle) \leftrightarrow s = 0 \quad \text{и} \quad !\,\alpha_2(\langle s, t\rangle) \to \alpha_2(\langle s, t\rangle) = s,$$

$$!\,\alpha_3(\langle s, t\rangle) \leftrightarrow s \in B \quad \text{и} \quad !\,\alpha_3(\langle s, t\rangle) \to \alpha_3(\langle s, t\rangle) = 0,$$

$$!\,\alpha_4(\langle s, t\rangle) \leftrightarrow s \in B \quad \text{и} \quad !\,\alpha_4(\langle s, t\rangle) \to \alpha_4(\langle s, t\rangle) = s.$$

Докажем одно из них, например, для α_3.

Пусть $!\,\alpha_3(\langle s, t\rangle)$. Следовательно, $!\,\alpha_1(\langle s, t\rangle)$, т. е. $s \in B_0$ и $\alpha_1(\langle s, t\rangle) = s$. Если допустим, что $s = 0$, то $\alpha_3(\langle s, t\rangle) = \alpha_1[\pi\delta, \delta]\,(2)$ и $!\,\alpha_1$. Отсюда вытекает невозможность этого допущения. Значит $s \neq 0$, т. е. $s \in B$.

Обратно, пусть $s \in B$. Тогда $\alpha_3(\langle s, t\rangle) = \alpha_1[\pi\delta, \delta]\Pi(\Pi(\pi, \pi), \pi)(s) = \alpha_1[\pi\delta, \delta] (\langle\langle\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 0\rangle\rangle, \langle 0, 0\rangle\rangle) = \alpha_1[\pi\delta, \delta]\,(0) = 0$. Аналогичным образом доказываются и остальные свойства.

В $\mathcal{F}$ вводим операцию $(\chi \supset \varphi, \psi)$ следующим образом: $(\chi \supset \varphi, \psi)\,(s) = t \leftrightarrow (\chi(s) \in B_0\ \&\ \varphi(s) = t) \vee (\chi(s) \in B^* \setminus B_0\ \&\ \psi(s) = t)$. В работе [4] доказано, что если φ, ψ, χ — просто вычислимые, то и $(\chi \supset \varphi, \psi)$ просто вычислима.

Докажем, что для каждого $k \geqq 1$ существует просто вычислимая функция β_k, такая, что $!\,\beta_k(\langle s, t\rangle) \leftrightarrow s \in B_0^k$ и $!\,\beta_k(\langle s, t\rangle) \to \beta_k(\langle s, t\rangle) = s$. Для $k = 1$ существование такой функции нами уже показано. Допустим, что существование β_k доказано для некоторого $k \geqq 1$. Докажем существование β_{k+1} с требуемым свойством.

Пусть $\alpha_5 = [\langle\langle 0, \breve{0}, 0\rangle\rangle, \pi]\langle\langle 0, \breve{0}, 0\rangle\rangle$, т. е. α_5 нигде не определена, и $\gamma_{k+1} = [\langle\langle K, \breve{0}\rangle, 0\rangle, \delta^3\beta_k]\,[\langle 0, \breve{0}, 0\rangle\rangle, \delta]\,\pi$. Пусть $\beta_{k+1} = (\pi \supset \alpha_5, \gamma_{k+1})$. Покажем, что $!\,\beta_{k+1}(\langle s, t\rangle) \leftrightarrow s \in B_0^{k+1}$ и $!\,\beta_{k+1}(\langle s, t\rangle) \to \beta_{k+1}(\langle s, t\rangle) = s$. Если $s \in B_0^{k+1}$, то $s = \langle s_1, s_2\rangle$, где $s_1 \in B_0^k$, а $s_2 \in B_0$ и $\pi(\langle s, t\rangle) = s \in B^* \setminus B_0$. Тогда $\beta_{k+1}(\langle s, t\rangle) = \gamma_{k+1}(\langle s, t\rangle) = [\langle\langle K, \breve{0}\rangle, 0\rangle, \delta^3\beta_k]\,[\langle 0, \langle\breve{0}, 0\rangle\rangle, \delta]\,(s) = [\langle\langle K, \breve{0}\rangle, 0\rangle, \delta^3\beta_k]\,(s) = s$, т. е. $!\,\beta_{k+1}(\langle s, t\rangle)$.

Пусть $!\beta_{k+1}(\langle s, t\rangle)$, т. е. $s=\langle \mathbf{s}_1, s_2\rangle$ и $![\langle \mathit{0}, \langle \breve{\mathit{0}}, \mathit{0}\rangle\rangle, \delta](s)$. Следовательно, $s_2 \in B_0$ и $[\langle \mathit{0}, \langle \breve{\mathbf{0}}, \mathit{0}\rangle\rangle, \delta](s)=s$ и, значит, $![\langle\langle \breve{\mathbf{K}, \mathit{0}}\rangle, \mathit{0}\rangle, \delta^3\beta_k](s)$. Отсюда $s_1 \in B_0^k$ и равно $\delta_3(s_1) \in B_0$. Этим утверждение доказано.

Пусть $\mathbf{I}_i^k=\delta\pi^{k-i}, i=2, \ldots, k$ и $\mathbf{I}_1^k=\pi^{k-1}$.

Если $A_1 \times \ldots \times A_k$ — компонента, то существует просто вычислимая функция, которая определена всюду в B_0^k, и на $A_1 \times \ldots \times A_k$ ее значение $\mathit{0}$, а вне $A_1 \times \ldots \times A_k$ — $\langle \mathit{0}, \mathit{0}\rangle$.

Пусть $I_1=\{i : A_i=B\}=\{i_1, \ldots, i_p\}$, $\{1, \ldots, k\} \setminus I_1=\{j_1, \ldots, j_{k-p}\}$ и $\sigma_i=\pi\mathbf{I}_i^k$, $i=1, \ldots, k$. Определим $\bar{\sigma}_k^{(A_1, \ldots, A_k)}=(\sigma_{i_1} \supset \bar{\mathbf{I}}, (\sigma_{i2} \supset \breve{\mathbf{I}}, \ldots (\sigma_{i_p} \supset \bar{\mathbf{I}}, (\sigma_{j_1} \supset (\sigma_{j_2} \supset \ldots \supset (\sigma_{j_{k-p}} \supset \breve{\mathit{0}}, \breve{\mathbf{I}}), \ldots, \breve{\mathbf{I}}), \breve{\mathbf{I}})), \ldots)))$. Очевидно, это просто вычислимая функция, существование которой мы хотели доказать.

Теперь можем показать, что если $\varphi : B_0^k \text{-}\ominus\!\rightarrow B_0$ и φ допустима, то φ вычислима. Действительно, пусть $\varphi : B_0^k \text{-}\ominus\!\rightarrow B_0$ и φ допустима. Тогда ее область определения имеет вид $A_1^1 \times \ldots \times A_k^1 \cup \ldots \cup A_1^n \times \ldots \times A_k^n$. Если $n=0$, т. е. $\operatorname{Dom}\varphi=\varnothing$, то, очевидно, $\varphi=\alpha_5$. Рассмотрим случай, когда $n \geq 1$. Тогда полагаем $\theta=(\bar{\sigma}_k^{(A_1^1, \ldots, A_k^1)} \supset \widehat{\sigma}_1, (\bar{\sigma}_k^{(A_1^2, \ldots, A_k^2)} \supset \widehat{\sigma}_2, (\ldots (\bar{\sigma}_k^{(A_1^n, \ldots, A_k^n)} \supset \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_n\, \alpha_5) \ldots)))\beta_k$, где $\widehat{\sigma_i}$ — константа, если φ — константа на $A_1^i \times \ldots \times A_k^i$, и притом та же самая константа, значение которой φ принимает на $A_1^i \times \ldots \times A_k^i$, и $\sigma_i=\mathbf{I}_j^k$, если функция φ — проектирующая функция по j-тому аргументу. Очевидно, что $\varphi(\mathbf{s})=\mathbf{t} \leftrightarrow \exists \mathbf{r}(\theta(\langle s, \mathbf{r}\rangle)=\mathbf{t})$.

Этим подтверждена гипотеза Д. Скордева в случае, когда φ допустима, и множество B содержит не менее трех элементов. В случае, когда множество B содержит только два элемента $b_1, b_2, b_1 \neq b_2$, вопрос оказывается сложнее. Например, для функции двух аргументов $\varphi : B^2 \rightarrow B$, определенной равенствами $\varphi(b_1, b_1)=b_1, \varphi(b_1, b_2)=\varphi(b_2, b_1)=\varphi(b_2, b_2)=b_2$, мы не можем установить, что она не допустима, и не представляется возможным показать, что она вычислима. Здесь вопрос сводится к существованию подмножества A множества N, для которого не существует рекурсивная функция f двух переменных со свойством $f(i_1, i_2) \in A \leftrightarrow i_1 \in A \,\&\, i_2 \in A$. Этот вопрос в настоящей статье не решен.

Автор приносит благодарность Д. Скордеву за ценную помощь, оказанную в ходе работы над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. Москва, 1965.
2. В. А. Успенский. Лекции о вычислимых функциях. Москва, 1960.
3. Х. Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Москва, 1972.
4. Д. Г. Скордев. Комбинаторные пространства и рекурсивность в них. София, 1981.
5. Y. N. Moschovakis. Abstract first order computability, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **138**, 1969, 427—464.

Высший педагогический институт
9700 Шумен

Поступила 17. 9. 1979
в переработанном виде 5. 9. 1980